ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 466–472

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.52+517.977

УПРАВЛЕНИЕ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИАГОНАЛЬНЫМ УСРЕДНЕНИЕМ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

© 2021 г. А. К. Деменчук

Рассматривается линейная система управления с почти периодической матрицей коэффициентов, имеющей диагональное усреднение, и управлением в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным. Матрица при управлении постоянная квадратная, имеет нулевые строки, а её ненулевые строки линейно независимы. Коэффициент обратной связи предполагается почти периодическим и таким, что его частотный модуль содержится в частотном модуле матрицы коэффициентов. Получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых разрешима задача управления асинхронным спектром этой системы, состоящая в нахождении такого управления из допустимого множества, чтобы у замкнутой этим управлением системы появились почти периодические решения с наперёд заданными частотами, причём пересечение модулей частот решения и матрицы коэффициентов тривиально.

DOI: 10.31857/S0374064121040026

Введение. Изучению различных вопросов теории управления для обыкновенных дифференциальных периодических систем посвящено достаточно большое число работ (см., например, [1–3] и др.). Для почти периодических систем управления подобные исследования существенно усложняются. В этом направлении можно отметить работы [4–8], характерной особенностью которых является рассмотрение так называемого *регулярного случая,* т.е. когда априори предполагается, что множество частот любого почти периодического решения системы является подмножеством множества частот её правой части.

Вместе с тем, как показали в 1955 г. Я. Курцвейль и О. Вейвода [9], нормальная система первого порядка обыкновенных дифференциальных почти периодических уравнений может допускать такие решения, для которых пересечение их частотных модулей и частотных модулей правой части системы является тривиальным. Впоследствии такого рода решения были названы *сильно нерегулярными,* их частотный спектр – *асинхронным,* а описываемые ими колебания – *асинхронными.* В случае периодической системы нерегулярность означает несоизмеримость частот системы и её решения.

Отметим, что ещё в середине 30-х годов прошлого века в исследованиях параметрического воздействия на двухконтурные системы, проводившихся под общим руководством Л.И. Мандельштама и Н.Д. Папалекси, в отличие от обычного параметрического возбуждения, которое имело место только при целочисленном отношении частот, была продемонстрирована возможность возбуждения колебаний на частотах, находящихся практически в любом отношении с частотой изменения параметров [10]. Асинхронные колебания, начиная с 70-х годов прошлого века, реализовывались в ряде технических устройств. В частности, пример устойчивой колебательной системы, в которой действующая на пролетающий в конденсаторном поле заряд гармоническая сила имеет в общем случае частоту, несоизмеримую с частотой колебаний самого заряда, приведён в работе [11]. В обзоре [12] показано, что некоторые неавтономные системы, а именно, системы с высокочастотным источником энергии, могут вести себя как автоколебательные, важным свойством которых является независимость частотного спектра колебаний от спектра источника. Осуществимость асинхронных колебаний при переходе к макроскопическим массам установлена в работе [13] на примере электромеханической системы.

Задача синтеза обыкновенных дифференциальных периодических систем, обладающих сильно нерегулярными решениями, поставлена в работе [14] в виде задачи управления асинхронным спектром. Серия условий её разрешимости приведена в монографии [15, гл. III].

Задача управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем сформулирована в работе [16], в которой дан критерий её разрешимости в случае, когда среднее значение матрицы коэффициентов нулевое.

В настоящей статье исследуются вопросы разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем, у которых усреднение матрицы коэффициентов является диагональным, а матрица при управлении имеет нулевые строки.

1. Предварительные сведения и обозначения. Пусть $P=(p_{ij}),\ \ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,m},$ – некоторая матрица и $1\leqslant k_1<\ldots<k_s\leqslant n,\ \ 1\leqslant l_1<\ldots<l_q\leqslant m$ – две упорядоченные последовательности натуральных чисел. Подматрицу матрицы $P,$ стоящую на пересечении строк с номерами $k_1,\ldots,k_s$ и столбцов с номерами $l_1,\ldots,l_q,$ обозначим через $P^{l_1\ldots l_q}_{k_1\ldots k_s}$, т.е. эта $s\times q$-матрица имеет вид

$$P^{l_1\ldots l_q}_{k_1\ldots k_s}=\begin{pmatrix}p_{k_1l_1} & \ldots & p_{k_1l_q}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ p_{k_sl_1} & \ldots & p_{k_sl_q}\end{pmatrix}.$$

Приведём необходимые для дальнейшего изложения понятия и факты из теории почти периодических (по Бору) функций [17, гл. 1, 2]. Пусть $F(t)$ – непрерывная на всей числовой оси почти периодическая вещественнозначная матрица (вектор). Через $\widehat{F}$ будем обозначать её *среднее значение*

$$\widehat{F}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t)\,dt,$$

а через $\widetilde{F}$ – *осциллирующую часть:* $\widetilde{F}(t)=F(t)-\widehat{F}.$ Вещественное число λ называется *показателем Фурье (частотой)* матрицы $F(t),$ если хотя бы один из пределов

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t)\cos(\lambda t)\,dt,\qquad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t)\sin(\lambda t)\,dt$$

отличен от нуля. Как известно, множество таких чисел λ не более чем счётно. Через $\mathrm{Mod}\,(F)$ обозначим *модуль частот* (*частотный модуль*) матрицы $F(t),$ т.е. наименьшую аддитивную группу вещественных чисел, содержащую все показатели Фурье этой матрицы.

Под *частотным модулем* нормальной системы первого порядка будем понимать частотный модуль её правой части. Из результатов работы [9] следует, что линейная дифференциальная система $\dot z=F(t)z$ может иметь почти периодическое решение $z(t)$ такое, что пересечение частотных модулей решения $\mathrm{Mod}\,(z)$ и системы $\mathrm{Mod}\,(F)$ тривиально:

$$\mathrm{Mod}\,(z)\bigcap\mathrm{Mod}\,(F)=\{0\}.$$

Такого рода решения называются *сильно нерегулярными* [18]. Из результатов работы [18] следует, что вектор-функция $z(t)$ является также решением линейной функциональной системы.

Столбцовым рангом матрицы $F(t)$ называется наибольшее число её линейно независимых столбцов, т.е. наибольшее число её столбцов таких, что никакая нетривиальная линейная их комбинация, коэффициенты которой – вещественные числа, не равна тождественно нулю. Столбцовый ранг матрицы $F(t)$ обозначим $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}F.$ Аналогично – с заменой столбцов строками – определяется строчный ранг матрицы $F(t),$ который обозначим $\mathrm{rank}_{\mathrm{row}}F.$ Очевидно, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $F(t)$ не обязаны совпадать между собой*). Будем говорить, что $F(t)$ – матрица *неполного столбцового ранга*, если её столбцовый ранг меньше числа столбцов.

Справедлива вытекающая из [18]

---

*) Простейший пример доставляет матрица $F(t)=\begin{pmatrix}\sin t & \sin t\\ \cos t & \cos t\end{pmatrix}$; для неё $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}F=1,$ а $\mathrm{rank}_{\mathrm{row}}F=2.$

Лемма. *Линейная функциональная система*

$$\widetilde{F}(t)z = 0$$

имеет нетривиальное сильно нерегулярное почти периодическое решение $z(t)$ *в том и только в том случае, когда* $\widetilde{F}(t)$ *– матрица неполного столбцового ранга.*

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2, \tag{1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, $u = u(t) \in \mathbb{R}^n$ – вход, $A(t)$ – непрерывная почти периодическая $n \times n$-матрица коэффициентов, матрица B при управлении является постоянной квадратной и имеет порядок n. Будем считать, что управление задаётся в виде линейной по фазовым переменным обратной связи

$$u = U(t)x \tag{2}$$

с непрерывной почти периодической $n \times n$-матрицей $U(t)$ (*коэффициентом обратной связи*), модуль частот которой содержится в модуле частот матрицы коэффициентов, т.е. $\operatorname{Mod}(U) \subset \subset \operatorname{Mod}(A)$.

Задачу выбора такого коэффициента обратной связи $U(t)$, чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L, будем называть *задачей управления асинхронным спектром с целевым множеством* L. Для системы (1) исследуем вопросы разрешимости поставленной задачи.

Заметим, что если матрица при управлении невырожденная, то решение такой задачи не вызывает затруднений. Поэтому далее считаем, что матрица B вырожденная, её строки с номерами $k_1, \ldots, k_d$, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_d \leqslant n$, нулевые, а ненулевые её строки линейно независимы, т.е.

$$\operatorname{rank} B = r < n, \quad B^{1\ldots n}_{k_1\ldots k_d} = 0 \quad (d = n - r). \tag{4}$$

Будем также предполагать, что среднее значение матрицы коэффициентов является диагональным

$$\widehat{A} = \operatorname{diag}[\widehat{a}_{11}, \ldots, \widehat{a}_{nn}]. \tag{5}$$

3. Основной результат. Пусть $k_{d+1}, \ldots, k_n$, $1 \leqslant k_{d+1} < \ldots < k_n \leqslant n$, – номера ненулевых строк матрицы B при управлении. С учётом нумерации нулевых и ненулевых строк этой матрицы примем следующие обозначения:

$$A_{11}(t) = A^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d}(t), \quad A_{12}(t) = A^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_1\ldots k_d}(t), \quad A_{21}(t) = A^{k_1\ldots k_d}_{k_{d+1}\ldots k_n}(t), \quad A_{22}(t) = A^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_{d+1}\ldots k_n}(t),$$

$$U_{11}(t) = U^{k_1\ldots k_d}_{1\ldots n}(t), \quad U_{12}(t) = U^{k_{d+1}\ldots k_n}_{1\ldots n}(t), \quad x' = \operatorname{col}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_d}), \quad x'' = \operatorname{col}(x_{k_{d+1}}, \ldots, x_{k_n}).$$

Если у некоторой матрицы M произвольным образом поменять местами её строки (столбцы), то через $\operatorname{ord}_{\mathrm{col}} M$ (через $\operatorname{ord}_{\mathrm{row}} M$) обозначим результат обратной перестановки строк (столбцов) в порядке возрастания их номеров. Тогда, в частности, будем иметь

$$\operatorname{ord}_{\mathrm{row}}(\operatorname{col}(x', x'')) = x, \quad \operatorname{ord}_{\mathrm{col}}(U_{11}(t)\ U_{12}(t)) = U(t).$$

Пусть $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$, $\lambda_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots$, – множество действительных чисел таких, что пересечение образованного ими модуля и частотного модуля матрицы коэффициентов $A(t)$ тривиально. Справедлива

Теорема. *Для системы (1), (4), (5) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством* L *разрешима в том и только в том случае, когда матрица* $A_{12}(t)$ *имеет неполный столбцовый ранг*
$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} A_{12} = r_1 < r \tag{6}$$
и мощность $|L|$ *целевого множества удовлетворяет оценке**)
$$|L| \leqslant [(r - r_1)/2]. \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть поставленная задача разрешима. Это означает, что существует коэффициент обратной связи $U(t),$ $\operatorname{Mod}(U) \subset \operatorname{Mod}(A),$ такой, что замкнутая управлением (2) система (3) имеет сильно нерегулярное почти периодическое решение $x(t)$ с множеством частот $L.$

Из компонент вектора $x(t)$ образуем векторы $x'(t)$ и $x''(t).$ Из [19] следует, что вектор $x'(t)$ будет решением линейной однородной системы с постоянной матрицей коэффициентов, которая в силу условий (4), (5) является диагональной. Поэтому этот вектор не может иметь нетривиальных частот. Следовательно, множество L определяется только частотами вектор-функции $x''(t),$ а значит, она должна быть нетривиальной.

Согласно [19] вектор $x''(t)$ удовлетворяет, с одной стороны, линейной стационарной дифференциальной системе, а с другой, с учётом условия (4), – линейной функциональной системе
$$A_{12}(t)x'' = 0. \tag{8}$$
Так как вектор-функция $x(t)$ – сильно нерегулярное решение системы (3), то выполняется условие $\operatorname{Mod}(x) \bigcap \operatorname{Mod}(A) = \{0\}.$ Отсюда, поскольку имеют место включения $\operatorname{Mod}(x'') \subset \subset \operatorname{Mod}(x)$ и $\operatorname{Mod}(A_{12}) \subset \operatorname{Mod}(A),$ вытекает равенство $\operatorname{Mod}(x'') \bigcap \operatorname{Mod}(A_{12}) = \{0\},$ которое означает, что вектор-функция $x''(t)$ является сильно нерегулярным решением функциональной системы (8). Тогда из леммы следует, что матрица коэффициентов этой системы имеет неполный столбцовый ранг, т.е. справедливо неравенство (6).

В силу того, что столбцовый ранг матрицы $A_{12}(t)$ равен $r_1,$ между компонентами решения $x''(t)$ системы (8) имеется следующая зависимость: некоторые его r_1 компонент линейно выражаются через остальные $r - r_1$ компонент (назовём их *базисными*). Поэтому частоты вектор-функции $x''(t)$ определяются только частотами её базисных компонент. Как отмечено выше, вектор-функция $x''(t),$ а значит, и $r - r_1$ её базисных компонент являются решением линейной стационарной системы. Следовательно, число частот базисных компонент не превосходит величины $[(r - r_1)/2].$ Поскольку других частот у решения $x(t)$ системы (3) нет, то справедлива оценка (7).

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Требуемый для решения поставленной задачи матричный коэффициент обратной связи будем искать в так называемом *каноническом* виде $U(t) = \widehat{U} + \widetilde{U}(t).$ Предварительно рассмотрим систему
$$\dot{x} = (\widehat{A} + B\widehat{U})x, \quad (\widetilde{A}(t) + B\widetilde{U}(t))x = 0. \tag{9}$$
Применительно к матрице B при управлении для краткости положим
$$B_{11} = B^{1\ldots n}_{k_1\ldots k_d}, \quad B_{21} = B^{1\ldots n}_{k_{d+1}\ldots k_n}.$$
Из условия (4) вытекает, что $d \times n$-матрица B_{11} является нулевой, а $r \times n$-матрица $B_{21},$ составленная из ненулевых строк матрицы B с номерами $1 \leqslant k_{d+1} < \ldots < k_n \leqslant n,$ имеет полный строчный ранг
$$\operatorname{rank} B_{21} = r. \tag{10}$$
Поскольку, согласно предположению (5), среднее значение матрицы $A(t)$ является диагональным, то матрицы $\widehat{A}_{11}$ и $\widehat{A}_{22}$ также диагональные, а матрицы $\widehat{A}_{12}$ и $\widehat{A}_{21}$ нулевые, при этом $\widetilde{A}_{12}(t) = A_{12}(t),$ $\widetilde{A}_{21} = A_{21}(t).$

*) Здесь и далее $[\cdot]$ – целая часть числа.

Значит, с учётом условий (4), (5) и принятых обозначений систему (9) можно записать в виде

$$\dot{x}' = \widehat{A}_{11}x', \quad \dot{x}'' = (\widehat{A}_{21} + B_{21}\widehat{U}_{11})x' + (\widehat{A}_{22} + B_{21}\widehat{U}_{12})x',$$
$$\widetilde{A}_{11}(t)x' + A_{12}(t)x'' = 0, \quad (A_{21}(t) + B_{21}\widetilde{U}_{11}(t))x' + (\widetilde{A}_{22}(t) + B_{21}\widetilde{U}_{12}(t))x'' = 0. \tag{11}$$

Так как матрица $\widehat{A}_{11}$ диагональная, то первое уравнение системы (11) не имеет почти периодических решений $x'(t)$ с ненулевыми частотами, отличных от тривиального. Поэтому $x'(t) \equiv 0$ и система (11) примет вид

$$A_{12}(t)x'' = 0, \quad \dot{x}'' = (\widehat{A}_{22} + B_{21}\widehat{U}_{12})x'', \quad (\widetilde{A}_{22}(t) + B_{21}\widetilde{U}_{12}(t))x'' = 0, \quad x'(t) \equiv 0. \tag{12}$$

Как видим, блоки $\widehat{U}_{11}$ и $\widetilde{U}_{11}(t)$ могут быть произвольными. Поскольку столбцовый ранг матрицы $A_{12}(t)$ равен $r_1 < r$, то найдётся постоянная неособенная $r \times r$-матрица Q такая, что у матрицы $A_{12}(t)Q$ первые $d_1 = r - r_1$ столбцов нулевые, а остальные r_1 столбцов линейно независимые между собой (один из алгоритмов построения матрицы Q приведён в монографии [15, с. 43]). Тогда замена переменных

$$x'' = Qy \tag{13}$$

приводит систему (12) к системе

$$A_{12}(t)Qy = 0, \quad \dot{y} = Q^{-1}(\widehat{A}_{22} + B_{21}\widehat{U}_{12})Qy, \quad (\widetilde{A}_{22}(t) + B_{21}\widetilde{U}_{12}(t))Qy = 0, \quad x'(t) \equiv 0. \tag{14}$$

Ввиду того, что последние r_1 столбцов матрицы $A_{12}(t)Q$ линейно независимы, из леммы следует, что соответствующие компоненты искомого сильно нерегулярного почти периодического решения $y(t)$ первого уравнения системы (14) тривиальны, т.е. $y(t) = \operatorname{col}(y'(t), y''(t))$, $y'(t) = \operatorname{col}(y_1(t), \ldots, y_{d_1}(t))$, $y''(t) \equiv \operatorname{col}(0, \ldots, 0)$. Поэтому система (14) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix}\dot{y}'\\0\end{pmatrix} = Q^{-1}(\widehat{A}_{22} + B_{21}\widehat{U}_{12})Q\begin{pmatrix}y'\\0\end{pmatrix}, \quad (\widetilde{A}_{22}(t) + B_{21}\widetilde{U}_{12}(t))Q\begin{pmatrix}y'\\0\end{pmatrix} = 0,$$
$$y''(t) \equiv 0, \quad x'(t) \equiv 0. \tag{15}$$

Принимая во внимание условие (7), возьмём постоянную блочно-треугольную $r \times r$-матрицу

$$H = \begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\0 & H_{22}\end{pmatrix},$$

у которой $d_1 \times d_1$- блок H_{11} имеет чисто мнимые собственные числа

$$\pm i\lambda_1, \ldots, \pm i\lambda_s, \quad \lambda_j \in L, \quad j = \overline{1, s}, \quad s \leqslant [d_1/2],$$

а остальные блоки H_{12} и H_{22} произвольные.

Пусть $E_{r,r}$ – квадратная единичная матрица порядка r. Так как ранг $r \times n$-матрицы B_{21} равен r и $r < n$, то ранг расширенной $r \times (n + r)$-матрицы, составленной из матриц B_{21} и $E_{r,r}$, также равен r. Следовательно, алгебраическая неоднородная система

$$B_{21}V = E_{r,r} \tag{16}$$

с неизвестной $r \times r$-матрицей V имеет решение $V = V_0$. Положим

$$\widehat{U}_{12} = V_0(QHQ^{-1} - \widehat{A}_{22}). \tag{17}$$

Подставляя определённое равенством (17) значение $\widehat{U}_{12}$ в первое уравнение системы (15), получаем

$$\begin{pmatrix}\dot{y}'\\0\end{pmatrix} = Q^{-1}(\widehat{A}_{22} + B_{21}(W_0(QHQ^{-1} - \widehat{A}_{22})))Q\begin{pmatrix}y'\\0\end{pmatrix} = H\begin{pmatrix}y'\\0\end{pmatrix},$$

откуда с учётом строения матрицы H находим, что

$$\dot{y}' = H_{11}y'.$$

Полученная система имеет $2s$-параметрическое семейство почти периодических решений

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{s}(A_j\cos(\lambda_j t) + B_j\sin(\lambda_j t)), \tag{18}$$

где постоянные векторы A_j, B_j, $j=\overline{1,s}$, зависят от $2s$ произвольных вещественных постоянных. Итак, при выполнении условий (16), (17) первое уравнение системы (15) имеет решение (18).

Далее возьмём почти периодическую блочную матрицу $G(t) = \begin{pmatrix} G_{11}(t) & G_{12}(t)\end{pmatrix}$ такую, что её $r\times d_1$-блок G_{11} нулевой, а $r\times r_1$-блок G_{12} – произвольная почти периодическая матрица с нулевым средним значением и $\mathrm{Mod}\,(G_{12})\subset \mathrm{Mod}\,(A)$. В силу условия (4) матричное уравнение

$$B_{21}W = G(t)Q^{-1} - \widetilde{A}_{22}(t)$$

относительно неизвестной $r\times r$-матрицы W имеет решение

$$W(t) = V_0(G(t)Q^{-1} - \widetilde{A}_{22}(t)), \quad \mathrm{Mod}\,(W)\subset \mathrm{Mod}\,(G)\subset \mathrm{Mod}\,(A).$$

Положим

$$\widetilde{U}_{12}(t) = W(t) = V_0(G(t)Q^{-1} - \widetilde{A}_{22}(t)). \tag{19}$$

Тогда выполняется тождество

$$(\widetilde{A}_{22}(t) + B_{21}\widetilde{U}_{12}(t))Q\begin{pmatrix} y'(t)\\ 0\end{pmatrix} = (\widetilde{A}_{22}(t) + B_{21}V_0(G(t)Q^{-1} - \widetilde{A}_{22}(t)))Q\begin{pmatrix} y'(t)\\ 0\end{pmatrix} \equiv 0.$$

Значит, при выполнении условия (16), (19) вектор $y'(t)$ будет удовлетворять и второму уравнению системы (15). В результате получаем, что система (15) имеет решение

$$y'(t), \quad y''(t)\equiv 0, \quad x'(t)\equiv 0.$$

Возвращаясь к исходным переменным с учётом преобразования (13), находим решение системы (11):

$$x'(t)\equiv 0, \quad x''(t) = Q\mathrm{col}\,(y'(t), y''(t)) = Q\mathrm{col}\,(y'(t), 0). \tag{20}$$

Тогда вектор-функция

$$x(t) = \mathrm{ord}_{\mathrm{row}}(\mathrm{col}\,(x'(t), x''(t))), \tag{21}$$

компоненты которой определяются равенствами (18), (20), удовлетворяет системе (9), при этом в силу свойства чисел λ_j, $j=\overline{1,s}$, из множества L выполняется условие

$$\mathrm{Mod}\,(x)\bigcap \mathrm{Mod}\,(A) = \{0\}.$$

Следовательно, согласно [19], вектор-функция $x(t)$ является сильно нерегулярным почти периодическим решением с множеством частот L системы (3).

Таким образом, при выполнении условий теоремы для системы (1) разрешима задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L. Требуемый для этого коэффициент обратной связи управления (2) имеет вид

$$U(t) = \mathrm{ord}_{\mathrm{col}}(U_{11}(t)\ U_{12}(t)),$$

где блок $U_{11}(t)$ – произвольная почти периодическая $d_1\times r$-матрица, модуль частот которой содержится в модуле частот матрицы коэффициентов, а стационарная и осциллирующая части блока $U_{12}(t)$ задаются равенствами (17) и (19) соответственно. Сильно нерегулярное почти периодическое решение $x(t)$ замкнутой управлением (2) системы (3) определяется равенством (21). Достаточность, а вместе с ней и теорема доказаны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф20Р-005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
2. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М., 1975.
3. *Тонков Е.Л.* Линейная задача оптимального управления периодическими решениями // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 6. С. 1007–1011.
4. *Иванов А.Г.* Оптимальное управление почти периодическими движениями // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 837–846.
5. *Гайшун И.В.* Введение в теорию нестационарных линейных систем. Минск, 1999.
6. *Иванов А.Г.* Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. I // Изв. Ин-та математики и информатики. 2002. Вып. 1. С. 3–100.
7. *Попова С.Н.* Управление асимптотическими инвариантами систем с почти периодическими коэффициентами // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2008. Вып. 2. С. 117–118.
8. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск, 2012.
9. *Курцвейль Я., Вейвода О.* О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журн. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370.
10. *Папалекси Н.Д.* Об одном случае параметрически связанных систем // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1939. Т. 1. С. 373–379.
11. *Пеннер Д.И., Дубошинский Я.Б., Дубошинский Д.Б., Козаков М.И.* Колебания с саморегулирующимся временем взаимодействия // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 5. С. 1065–1066.
12. *Ланда П.С., Дубошинский Я.Б.* Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии // Успехи физ. наук. 1989. Т. 158. Вып. 4. С. 729–742.
13. *Пеннер Д.И., Дубошинский Д.Б., Козаков М.И., Вермель А.С., Галкин Ю.В.* Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний // Успехи физ. наук. 1973. Т. 109. Вып. 1. С. 402–406.
14. *Деменчук А.К.* Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 4. С. 37–42.
15. *Деменчук А.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление. Saarbrücken, 2012.
16. *Деменчук А.К.* Необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем с нулевым средним матрицы коэффициентов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2019. Т. 55. № 2. С. 176–181.
17. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. М., 1953.
18. *Demenchuk A.K.* Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems // Math. Bohemica. 2001. V. 126. № 1. P. 221–228.
19. *Деменчук А.К.* О почти периодических решениях обыкновенных дифференциальных систем // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1987. № 4. С. 16–22.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 12.09.2020 г.
После доработки 12.09.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.