ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 473–487

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

# ОПИСАНИЕ СТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ НЕПРАВИЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2021 г. А. В. Липницкий

Рассматривается класс линейных параметрических дифференциальных систем $\dot{x} = \mu A(t)x$, заданных на полуоси $t \geqslant 0$, где $\mu \in \mathbb{R}$ – параметр, $x \in \mathbb{R}^n$, а матрица $A(\cdot)\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ кусочно-непрерывна и ограничена. Доказано, что при каждом $n \geqslant 2$ некоторое множество тогда и только тогда представляет собой множество неправильности одной из таких систем (т.е. множество тех $\mu$, при которых эта система неправильна по Ляпунову), когда оно является $G_{\delta\sigma}$-множеством вещественной прямой, не содержащим нуль. Необходимость указанных условий установлена ранее. Сформулированное утверждение решает задачу, поставленную Н.А. Изобовым в начале 90-х годов.

DOI: 10.31857/S0374064121040038

Рассмотрим зависящую от параметра $\mu \in \mathbb{R}$ линейную систему

$$\dot{x} = \mu C(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{$1_\mu$}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов. Множеством неправильности системы

$$\dot{x} = C(t)x, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{$2_C$}$$

называется [1] множество тех значений $\mu \in \mathbb{R}$, при которых соответствующая система $(1_\mu)$ неправильна по Ляпунову [2, с. 38].

Первый пример правильной системы (2), для которой множество неправильности не пусто, построен Н.А. Изобовым (см. [1]). Позднее были построены (см. библиографию в [3]) примеры систем $(2_C)$ с различными метрическими и топологическими свойствами их множеств неправильности. В частности, как установлено в [4, 5], мера Лебега такого множества может принимать любое наперёд заданное значение. В работе [4] установлено также, что множество неправильности необходимо должно быть $G_{\delta\sigma}$-множеством вещественной прямой, не содержащим нуля.

В связи с этими результатами в работе [3] была поставлена задача о полном описании класса множеств неправильности линейных систем $(2_C)$. В направлении решения этой задачи в работах [6] и [7] доказано, что множеством неправильности может быть соответственно любое открытое и любое замкнутое множества вещественной прямой, не содержащие нуля. Вместе с тем задача полного описания множеств неправильности оставалась нерешённой. Она решена в настоящей работе. Оказывается, что приведённые выше необходимые условия [4], которым должны удовлетворять множества неправильности: быть $G_{\delta\sigma}$-множеством и не содержать нуля, являются и достаточными. Для доказательства этого утверждения нам понадобится ряд лемм, из которых оно будет следовать непосредственно.

Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ матрицу поворота на угол $\varphi$ по часовой стрелке обозначим через $U(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ и положим

$$J := U(2^{-1}\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для всякого $y = (y_1, y_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2$ и $2\times 2$-матрицы $Z$ используем обозначения $\|y\| \equiv \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ для евклидовой нормы и $\|Z\| \equiv \max\limits_{\|y\|=1} \|Zy\|$ для спектральной нормы.

Для любой строго возрастающей последовательности $(m_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ и чисел $5 \leqslant i_k \in \mathbb{N}$ определим последовательность $(T_k)_{k=1}^{\infty}$, полагая

$$T_1 := 2, \quad T_{k+1} := m_k(i_k+2)T_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Положим также

$$\theta_k := m_k i_k T_k, \quad \tau_k := \theta_k + m_k T_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для любой последовательности $(b_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и числа $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, определим матрицу $A(\cdot) = A(\,\cdot\,, d, (m_k, i_k, b_k)_{k=1}^{\infty})$, для всех $l = \overline{1, T_k}$, $k \in \mathbb{N}$, полагая

$$A(t) \equiv b_k J, \quad t \in (\tau_k - m_k l, \tau_k - m_k l + 1],$$

$$A(t) \equiv -b_k J, \quad t \in [\tau_k + m_k l - 1, \tau_k + m_k l).$$

Для всех остальных $t \in \mathbb{R}_+$ положим $A(t) \equiv d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Обозначим через $X_A(t,s)$ матрицу Коши системы $(2_A)$ и зададим число $\delta(d)$ равенствами $\delta(d) := 1$, если $d > 0$, и $\delta(d) := 2$, если $d < 0$. Обозначим также

$$L_d(\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_{3-\delta(d)}/x_{\delta(d)}| \leqslant \alpha\}.$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} L_d(\alpha) = L_d(m^{-2\operatorname{sgn} d}\alpha).$$

**Лемма 1.** *Матрица $X_A(T_{k+1}, \theta_k)$ является самосопряжённой.*

**Доказательство.** Для любых $s(t) := 2\tau_k - t$ и $t \in [\tau_k, T_{k+1}]$ выполняется равенство $A(s(t)) = A^{\mathrm{т}}(t)$, следствием которого являются соотношения

$$\frac{d}{dt}X_A(s(t), \tau_k) = -A(s(t))X_A(s(t), \tau_k) = -A^{\mathrm{т}}(t)X_A(s(t), \tau_k).$$

Таким образом, столбцы матрицы $X_A(s(t), \tau_k)$ – решения сопряжённой к $(2_A)$ системы $\dot{x} = -A^{\mathrm{т}}(t)x$, из чего вытекает равенство

$$X_A(s(t), \tau_k) = X_{-A^{\mathrm{т}}}(t, \tau_k)C, \tag{3}$$

матрица $C$ в котором не зависит от $t$.

Согласно [8, с. 119] справедливо соотношение

$$X_{-A^{\mathrm{т}}}(t, \tau_k) = [X_A^{-1}(t, \tau_k)]^{\mathrm{т}} = X_A^{\mathrm{т}}(\tau_k, t). \tag{4}$$

Полагая в (3) $t := \tau_k$, получаем равенство $C = E$, учитывая которое и полагая в (3), (4) $t := T_{k+1}$, будем иметь $X_A(\tau_k, \theta_k) = X_A^{\mathrm{т}}(T_{k+1}, \tau_k)$. Отсюда следует соотношение

$$X_A(T_{k+1}, \theta_k) = X_A(T_{k+1}, \tau_k)X_A^{\mathrm{т}}(T_{k+1}, \tau_k),$$

из которого вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Для каждого $d \neq 0$ определим число $k_0(d) \in \mathbb{N}$ равенством $k_0(d) := 2 + [|d|^{-1}]$ (здесь и в дальнейшем $[\cdot]$ обозначает целую часть числа).

**Лемма 2.** *Для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k_0(d) - 1$, имеет место включение*

$$X(T_{k+1}, T_{k_0(d)})e_{\delta(d)} \subset L_d(2e^{4m_k T_k |d|}). \tag{$5_k$}$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное $k \geqslant k_0(d)$. Поскольку в силу леммы 1 матрица $X_A(T_{k+1}, \theta_k)$ является самосопряжённой, то она ортогональным преобразованием приводится к диагональному виду [9, с. 78], а её собственные значения вещественны и положительны, т.е. вследствие вытекающего из соотношения $\operatorname{Tr} A(t) \equiv 0$ равенства $\det X_A(T_{k+1}, \theta_k) = 1$ найдутся $f_1, h \in \mathbb{R}$, $h \geqslant 1$, такие, что

$$X_A(T_{k+1}, \theta_k) = U(f_1) \operatorname{diag}[h^2, h^{-2}] U(-f_1). \tag{6}$$

В силу верной для любого $l \in \mathbb{N}$ оценки $T_{l+1} \geqslant 2T_l$ и того, что $T_1 = 2$, имеет место неравенство $T_n \geqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда для любого $n \geqslant k-1$ в силу неравенств $n \geqslant k_0(d) - 1 \geqslant |d|^{-1}$ получаем оценки

$$e^{-T_n|d|} \leqslant e^{-1} < 2^{-1}. \tag{$7_n$}$$

Тогда, так как $i_j \geqslant 5$ при всех значениях $j$, то

$$2e^{4m_{k-1}T_{k-1}|d|} \leqslant 2e^{-T_{k-1}|d|} e^{T_k|d|} \overset{(7_{k-1})}{<} e^{T_k|d|} \quad \text{и} \quad 2\theta_k - 3T_k \geqslant 7m_k T_k,$$

откуда вытекают включение $L_d(2e^{4m_{k-1}T_{k-1}|d|}) \subset L_d(e^{T_k|d|})$ и, с учётом последнего, соотношение

$$\begin{aligned} X(\theta_k, T_k) L_d(2e^{4m_{k-1}T_{k-1}}) \subset \operatorname{diag}[e^{d(\theta_k - T_k)}, e^{-d(\theta_k - T_k)}] L_d(e^{T_k|d|}) = \\ = L_d(e^{(-2\theta_k + 3T_k)|d|}) \subset L_d(e^{-7m_k T_k |d|}). \end{aligned} \tag{8}$$

С другой стороны, из представления (6) для любого $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = 1$, и $g = g_x \in \mathbb{R}$, $z_x \in \mathbb{R}^2$, определяемых равенствами

$$(\cos g, \sin g)^{\mathrm{т}} := U(-f_1)x, \quad z_x := X_A(T_{k+1}, \theta_k)x,$$

следуют равенства (ниже через $(u \vee v) \overset{\text{def}}{=} \det[u, v]$ обозначено псевдоскалярное произведение векторов $u, v \in \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} (x \vee z_x) = (U(-f_1)x \vee U(-f_1)z) \overset{(6)}{=} (U(-f_1)x \vee \operatorname{diag}[h^2, 1/h^2] U(-f_1)x) = \\ = ((\cos g, \sin g)^{\mathrm{т}} \vee (h^2 \cos g, h^{-2} \sin g)^{\mathrm{т}}) = -(h^2 - h^{-2}) \cos g \sin g, \end{aligned} \tag{9}$$

откуда имеем

$$|\sin \angle(x, z_x)| \overset{(6),(9)}{=} (h^2 - h^{-2}) |\cos g \sin g| \|(h^2 \cos g, h^{-2} \sin g)^{\mathrm{т}}\|^{-1} \leqslant 1 - h^{-4}. \tag{10}$$

Для любых $j \in \mathbb{N}$, $t, s \in [j-1, j]$ справедливо одно из двух равенств: либо $X_A(t,s) = \operatorname{diag}[e^{d(t-s)}, e^{d(s-t)}]$, либо найдётся $\gamma_j \in \mathbb{R}$ такое, что $X_A(t,s) = U(\gamma_j(t-s))$. Поэтому

$$\|X_A(t,s)\| \leqslant \max\{\|\operatorname{diag}[e^{d(t-s)}, e^{d(s-t)}]\|, \|U(\gamma_j(t-s))\|\} = e^{|d||t-s|}.$$

Отсюда для любых $r, s \in \mathbb{R}$, $[r] > s \geqslant 0$, получаем оценки (произведение по пустому множеству считаем равным единице)

$$\|X_A(r,s)\| \leqslant \|X_A(r,[r])\| \left( \prod_{j=1+[s]}^{[r]-1} \|X(j, j-1)\| \right) \|X_A(1+[s], s)\| \leqslant e^{|d|(r-s)}.$$

Аналогично в случае $0 \leqslant r < [s]$ выполняются оценки

$$\|X_A(r,s)\| \leqslant \|X_A(r,[r]+1)\| \left( \prod_{j=1+[r]}^{[s]-1} \|X(j-1, j)\| \right) \|X_A([s], s)\| \leqslant e^{|d|(s-r)}.$$

В обоих случаях имеем неравенство

$$\|X_A(r,s)\| \leqslant e^{|d||r-s|}, \quad 0 \leqslant r,s \in \mathbb{R}. \qquad (11_{r,s})$$

Для любого $x \in L_d(e^{-7m_kT_k|d|}) \overset{(7_k)}{\subset} L_d(2^{-1}e^{-4m_kT_k|d|})$ из $(11_{T_{k+1},\theta_k})$ в силу оценок

$$h = \|X_A(T_{k+1},\theta_k)\|^{1/2} \overset{(11)}{\leqslant} e^{2^{-1}|T_{k+1}-\theta_k||d|} = e^{m_kT_k|d|}$$

вытекают неравенства

$$|\sin\angle(e_{\delta(d)},x)| = \frac{|x_{3-\delta(d)}|}{\|x\|} \leqslant \frac{|x_{3-\delta(d)}|}{|x_{\delta(d)}|} \leqslant 2^{-1}e^{-4m_kT_k|d|} \leqslant \frac{1}{2h^4}.$$

Отсюда вследствие (10) получаем, что

$$|\sin\angle(e_{\delta(d)},z_x)| \leqslant |\sin\angle(e_{\delta(d)},x)||\cos\angle(x,z_x)| + |\sin\angle(x,z_x)||\cos\angle(e_{\delta(d)},x)| \overset{(10)}{\leqslant} 1-1/(2h^4). \quad (12)$$

В случае $k = k_0(d)-1$ имеем $X_A(T_{k+1},T_{k_0(d)})e_{\delta(d)} = e_{\delta(d)} \subset L_d(2e^{4m_kT_k|d|})$, т.е. справедливо включение $(5_{k_0(d)-1})$.

Предположим, что включение $(5_{k-1})$ верно для некоторого $k \geqslant k_0(d)$. Тогда в силу вытекающих для любого $x \in L_d(e^{-7m_kT_k|d|})$ из неравенства (12) оценок

$$\left|\frac{(z_x)_{3-\delta(d)}}{(z_x)_{\delta(d)}}\right| = \left|\frac{\cos\angle(e_{3-\delta(d)},z_x)}{\cos\angle(e_{\delta(d)},z_x)}\right| \leqslant \frac{|\sin\angle(e_{\delta(d)},z_x)|}{|1-\sin\angle(e_{\delta(d)},z_x)|} \overset{(12)}{\leqslant} \frac{1-2^{-1}h^{-4}}{2^{-1}h^{-4}} = 2h^4-1$$

имеют место включения

$$X_A(T_{k+1},T_{k_0(d)})e_{\delta(d)} = X_A(T_{k+1},T_k)X_A(T_k,T_{k_0(d)})e_{\delta(d)} \overset{(5_{k-1})}{\subset}$$

$$\overset{(5_{k-1})}{\subset} X_A(T_{k+1},\theta_k)X_A(\theta_k,T_k)L_d(2e^{4m_{k-1}T_{k-1}|d|}) \overset{(8)}{\subset} X_A(T_{k+1},\theta_k)L_d(e^{-7m_kT_k|d|}) \subset$$
$$\subset L_d(2h^4-1) \subset L_d(2e^{4m_kT_k|d|}).$$

Таким образом, выполняется включение $(5_k)$, откуда, согласно методу математической индукции, следует справедливость включения $(5_n)$ для любого целого $n \geqslant k_0(d)-1$. Лемма доказана.

Введём обозначение $\hat{Y}_\varkappa(\gamma) := U(\gamma)\begin{pmatrix} e^{\varkappa} & 0 \\ 0 & e^{-\varkappa}\end{pmatrix}$, где $\gamma,\varkappa \in \mathbb{R}$.

**Замечание.** В работе [7] определена матрица

$$Y_k(\mu) := U(\mu/k+\pi/2)\begin{pmatrix} e^{k\mu} & 0 \\ 0 & e^{-k\mu}\end{pmatrix}.$$

Леммы 1 и 2 из [7] не верны. Их утверждения становятся корректными, если заменить $Y_k(\mu)$ матрицей

$$\check{Y}_k(\mu) := U(\mu/k+\pi/2)\begin{pmatrix} e^{k} & 0 \\ 0 & e^{-k}\end{pmatrix}.$$

**Лемма 3.** *Для любых $\gamma,\varkappa \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $|\cos\gamma| \leqslant 1/e^{2|\varkappa|}$, справедлива оценка*

$$\|\hat{Y}^2_\varkappa(\gamma)\| < e^2. \qquad (13)$$

**Доказательство** в силу равенства $\hat{Y}_\varkappa(\gamma) = \check{Y}_\varkappa(\gamma\varkappa - \pi/2)$ совпадает с учётом приведённого выше замечания с доказательством леммы 2 из [7], в котором $k$ следует заменить на $\varkappa$, а вместо $r_\mu$ взять $\gamma$.

**Лемма 4.** *Если $d \neq 0$ и найдутся $l \in \mathbb{N}$ и последовательность $(k_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ такие, что для любого $p \in \{k_j : j \in \mathbb{N}\}$ выполняются неравенства $i_p \leqslant l$, $m_p \geqslant 2\max\{l, |d|^{-1}\}$ и оценка $|\cos b_p| < e^{-2m_p|d|}$, то система $(2_A)$ неправильна по Ляпунову.*

**Доказательство.** Зафиксируем произвольные $0 \neq d \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $\varkappa_k :=$ $:= d(m_k - 1)$. Имеют место равенства

$$X_A(\tau_k - m_k l + 1, \tau_k - m_k(l+1)+1) = U(b_k)\mathrm{diag}\,[e^{d(m_k-1)}, e^{d(1-m_k)}] = \hat{Y}_{\varkappa_k}(b_k), \quad 0 < l \leqslant T_k, \tag{14}$$

$$X_A(\tau_k, \tau_k - m_k + 1) = \mathrm{diag}\,[e^{d(m_k-1)}, e^{d(1-m_k)}] = \hat{Y}_{\varkappa_k}(0), \quad X_A(\theta_k + 1, \theta_k) = U(b_k), \tag{15}$$

$$X_A(\tau_k + m_k l, \tau_k + m_k(l-1)) = U(-b_k)\mathrm{diag}\,[e^{d(m_k-1)}, e^{d(1-m_k)}] = \hat{Y}_{\varkappa_k}(-b_k), \quad 0 < l \leqslant T_k. \tag{16}$$

Из них с учётом чётности $T_k$ вытекает, что

$$X_A(\tau_k, \theta_k) = X_A(\tau_k, \tau_k - m_k + 1)\Bigg(\prod_{l=1}^{T_k-1} X_A(\tau_k - m_k l + 1, \tau_k - m_k(l+1)+1)\Bigg) X_A(\theta_k + 1, \theta_k) \overset{(14),(15)}{=}$$

$$\overset{(14),(15)}{=} U(-b_k)\hat{Y}_{\varkappa_k}(b_k)^{T_k} U(b_k). \tag{17}$$

Аналогичным образом приходим к равенствам

$$X_A(T_{k+1}, \tau_k) = \prod_{l=0}^{T_k-1} X_A(T_{k+1} - m_k l, T_{k+1} - m_k(l+1)) \overset{(16)}{=} \hat{Y}_{\varkappa_k}(-b_k)^{T_k}. \tag{18}$$

Возьмём произвольное $p$ из последовательности $(k_j)_{j=1}^\infty$, определённой в формулировке леммы. Из равенств (17) и (18) в силу леммы 3, учитывая делимость $T_p$ на $T_1 = 2$, получаем оценки

$$\|X(T_{p+1}, \theta_p)\| = \|X(T_{p+1}, \tau_p) X_A(\tau_p, \theta_p)\| \leqslant \|X(T_{p+1}, \tau_p)\|\|X_A(\tau_p, \theta_p)\| \overset{(17),(18)}{=}$$

$$\overset{(17),(18)}{=} \|\hat{Y}_{\varkappa_k}(-b_k)^{T_p}\|\|\hat{Y}_{\varkappa_k}(b_k)^{T_p}\| \leqslant \|\hat{Y}_{\varkappa_k}(-b_k)^2\|^{T_p/2}\|\hat{Y}_{\varkappa_k}(b_k)^2\|^{T_p/2} \overset{(13)}{\leqslant} e^{2T_p}. \tag{19}$$

Из неравенства $(11_{\theta_p,0})$ следует, что

$$\|X_A(\theta_p, 0)\| \leqslant e^{|d|\theta_p} = e^{m_p i_p T_p |d|}. \tag{20}$$

Используя (19), (20) и учитывая верные по условию леммы неравенства $2/m_p \leqslant |d|$ и $i_p \leqslant l$, получаем оценки

$$\frac{\ln\|X(T_{p+1}, 0)\|}{T_{p+1}} = \frac{1}{T_{p+1}}(\ln\|X(T_{p+1}, \theta_p)\| + \ln\|X(\theta_p, 0)\|) \overset{(19),(20)}{\leqslant} \frac{2T_p + m_p i_p T_p |d|}{m_p(i_p+2)T_p} =$$

$$= \frac{1}{i_p+2}\bigg(\frac{2}{m_p} + i_p|d|\bigg) \leqslant |d|\frac{1+i_p}{i_p+2} = |d|\bigg(1 - \frac{1}{i_p+2}\bigg) \leqslant |d|\bigg(1 - \frac{1}{l+2}\bigg) \leqslant |d|\bigg(1 - \frac{1}{3l}\bigg). \tag{$21_p$}$$

В силу неравенства $(11_{0,T_p})$ справедлива оценка

$$\|X_A(0, T_p)\| \leqslant e^{|d|T_p}, \tag{22}$$

учитывая которую и оценки $i_p \geqslant 4$, $m_p \geqslant 2l$,

$$\|X(\theta_p, T_p)\| \leqslant \|X(\theta_p, 0)\|\|X(0, T_p)\|, \tag{23}$$

а также равенства

$$\|X(\theta_p,T_p)\| = \|\mathrm{diag}\,[e^{d(\theta_p-T_p)}, e^{-d(\theta_p-T_p)}]\| = e^{|d|(\theta_p-T_p)}, \tag{24}$$

будем иметь

$$\frac{1}{\theta_p}\ln\|X(\theta_p,0)\| \overset{(23)}{\geqslant} \frac{1}{\theta_p}(\ln\|X(\theta_p,T_p)\| - \ln\|X(0,T_p)\|) \overset{(22),(24)}{\geqslant}$$

$$\overset{(22),(24)}{\geqslant} \frac{|d|(\theta_p-2T_p)}{\theta_p} = |d|\bigg(1-\frac{2}{m_pi_p}\bigg) \geqslant |d|\bigg(1-\frac{1}{4l}\bigg). \tag{25}$$

Согласно формуле Ляпунова [10, с. 41] для старшего характеристического показателя $\lambda_{\max}(A)$ имеет место равенство

$$\lambda_{\max}(A) = \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\|. \tag{26}$$

Пусть $x(t)$, $t\geqslant 0$, $\|x(0)\|=1$, – какое-либо решение системы $(2_A)$ такое, что $\lambda[x]=\lambda_{\max}(A)$.

Тогда из соотношений (25) и (26) вытекает оценка

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\| \overset{(26)}{=} \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\| \geqslant \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{1}{\theta_k}\ln\|X_A(\theta_k,0)\| \overset{(25)}{\geqslant} |d|\bigg(1-\frac{1}{4l}\bigg). \tag{27}$$

С другой стороны, поскольку $\|x(t)\|\leqslant\|X_A(t,0)\|$, $t\geqslant 0$, в силу $(21_{k_j})$, $j\in\mathbb{N}$, справедливы неравенства

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|x(t)\| \leqslant \varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_A(t,0)\| \leqslant \varliminf_{j\to+\infty}\frac{1}{T_{k_j+1}}\ln\|X_A(T_{k_j+1},0)\| \overset{(21)}{\leqslant} |d|\bigg(1-\frac{1}{3l}\bigg). \tag{28}$$

Из оценок (27) и (28) следует отсутствие точного предела у функции $\ln\|x(t)\|$ при $t\to+\infty$, что, согласно [8, с. 284], влечёт за собой неправильность системы $(2_A)$. Лемма доказана.

Обозначим $\tilde L_\varkappa := L_{\mathrm{sgn}\,\varkappa}(2^3\varkappa^2)$, $\varkappa\in\mathbb{R}$.

**Лемма 5.** *Для любых $\gamma,\varkappa\in\mathbb{R}$ таких, что*

$$|\sin\gamma|\geqslant\varkappa^{-2} \quad \text{и} \quad \varkappa>2^4, \tag{29}$$

*имеют место включение*

$$\hat Y_\varkappa(\gamma+\pi/2)\tilde L_\varkappa\subset\tilde L_\varkappa \tag{30}$$

*и для любого $x\in\tilde L_\varkappa$ неравенство*

$$\|\hat Y_\varkappa(\gamma+\pi/2)x\|/\|x\| > e^{\varkappa-\sqrt{\varkappa}}. \tag{31}$$

**Доказательство** в силу равенства $\hat Y_\varkappa(\gamma+\pi/2)=\check Y_\varkappa(\gamma\varkappa)$ совпадает с учётом приведённого выше замечания с доказательством леммы 2 из [7], в котором $k$ следует заменить на $\varkappa$, $L_k$ – конусом $\tilde L_\varkappa$, а вместо $\rho_\mu$ взять $\gamma$.

Обозначим $\hat L_{k,d} := L_d(2^3d^2(m_k-1)^2)$.

**Лемма 6.** *Для любых $d\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$ таких, что*

$$m_k>1+2^4/|d|, \quad |\cos b_k|\geqslant d^{-2}(m_k-1)^{-2}, \tag{32}$$

*выполняется включение*

$$X_A(T_{k+1},\theta_k-m_k+1)\hat L_{k,d}\subset\hat L_{k,d}, \tag{33}$$

*а для всякого решения $x(\cdot)$ системы $(2_A)$ с начальным условием $x(\theta_k-m_k+1)\in\hat L_{k,d}$ при любых $1\leqslant l\leqslant 2T_k$ имеет место оценка*

$$\frac{\|x(\theta_k+m_kl)\|}{\|x(\theta_k+m_k(l-1))\|}\geqslant e^{|d|(m_k-1)-\sqrt{|d|(m_k-1)}}. \tag{$34_l$}$$

**Доказательство.** В случае, если $d>0$, полагая в условиях леммы 5 $\varkappa=\varkappa_k:=d(m_k-1)$, $\gamma:=\delta b_k-\pi/2$, где $\delta\in\{-1,0,1\}$, учитывая равенства $\tilde L_\varkappa=\hat L_{k,d}$, $\hat Y_{\varkappa_k}(\gamma+\pi/2)=\hat Y_{\varkappa_k}(\delta b_k)$ и то, что, как следует из неравенств (32), справедливы условия (29), получаем из (30) включение

$$\hat Y_{\varkappa_k}(\delta b_k)\hat L_{k,d}\subset \hat L_{k,d}, \tag{$35_d$}$$

а из (31) для любого $x\in\hat L_{k,d}$ имеем неравенство

$$\|\hat Y_{\varkappa_k}(\delta b_k)x\|/\|x\|>e^{\varkappa_k-\sqrt{\varkappa_k}}=e^{|d|(m_k-1)-\sqrt{|d|(m_k-1)}}. \tag{36}$$

Если же $d<0$, то в силу равенств

$$\hat Y_{\varkappa_k}(\delta b_k)=U(\delta b_k)\mathrm{diag}\,[e^{\varkappa_k},e^{-\varkappa_k}]=U(\delta b_k)J\,\mathrm{diag}\,[e^{-\varkappa_k},e^{\varkappa_k}]J^{-1}=J\hat Y_{-\varkappa_k}(\delta b_k)J^{-1} \tag{37}$$

с учётом включения $(35_{-d})$ и того, что

$$\hat L_{k,d}=J\hat L_{k,-d}, \tag{38}$$

справедливы включения

$$\hat Y_{\varkappa_k}(\delta b_k)\hat L_{k,d}\overset{(37)}{=}J\hat Y_{-\varkappa_k}(\delta b_k)J^{-1}\hat L_{k,d}\overset{(38)}{=}J\hat Y_{-\varkappa_k}(\delta b_k)\hat L_{k,-d}\overset{(35_{-d})}{\subset}J\hat L_{k,-d}\overset{(38)}{=}\hat L_{k,d},$$

т.е. включение $(35_d)$ выполняется для любых $d\ne 0$.

В силу соотношений (36) и (37) для любого $x\in\hat L_{k,d}$, поскольку $J^{-1}x\in J^{-1}\hat L_{k,d}\overset{(38)}{=}\hat L_{k,-d}$, имеем оценки

$$\|\hat Y_{\varkappa_k}(\delta b_k)x\|\overset{(37)}{=}\|J\hat Y_{-\varkappa_k}(\delta b_k)J^{-1}x\|=$$
$$=\|\hat Y_{-\varkappa_k}(\delta b_k)J^{-1}x\|\overset{(36)}{>}\|x\|e^{-\varkappa_k-\sqrt{-\varkappa_k}}=\|x\|e^{|d|(m_k-1)-\sqrt{|d|(m_k-1)}}.$$

Таким образом, неравенство (36) справедливо для всех $d\ne 0$.

Из включения (35), используя равенства (14)–(16), получаем соотношения

$$X_A(\theta_k+m_kl+1,\theta_k+m_k(l-1)+1)\hat L_{k,d}\overset{(14)}{=}\hat Y_{\varkappa_k}(b_k)\hat L_{k,d}\overset{(35)}{\subset}\hat L_{k,d},\quad 0\leqslant l<T_k, \tag{39}$$

$$X_A(\tau_k,\tau_k-m_k+1)\hat L_{k,d}=\mathrm{diag}\,[e^{d(m_k-1)},e^{d(1-m_k)}]L_d(2^3d^2(m_k-1)^2)=$$
$$=L_d(e^{-2|d|(m_k-1)}2^3d^2(m_k-1)^2)\subset L_d(2^3d^2(m_k-1)^2)=\hat L_{k,d}, \tag{40}$$

$$X_A(\tau_k+m_kl,\tau_k+m_k(l-1))\hat L_{k,d}\overset{(16)}{=}\hat Y_{\varkappa_k}(-b_k)\hat L_{k,d}\overset{(35)}{\subset}\hat L_{k,d},\quad 0<l\leqslant T_k. \tag{41}$$

Тогда для любого $0\leqslant j<T_k$ выполняются включения

$$X_A(\theta_k+jm_k+1,\theta_k-m_k+1)\hat L_{k,d}=$$
$$=\Bigg(\prod_{l=0}^{j}X_A(\theta_k+m_k(j-l)+1,\theta_k+m_k(j-l-1)+1)\Bigg)\hat L_{k,d}\overset{(39)}{\subset}\hat L_{k,d}. \tag{42}$$

В частности, при $j=T_k-1$ отсюда вытекает, что

$$X_A(\tau_k-m_k+1,\theta_k-m_k+1)\hat L_{k,d}\subset\hat L_{k,d}. \tag{43}$$

Из (40) и (43) следуют включения

$$X_A(\tau_k,\theta_k-m_k+1)\hat L_{k,d}=X_A(\tau_k,\tau_k-m_k+1)X_A(\tau_k-m_k+1,\theta_k-k+1)\hat L_{k,d}\overset{(40),(43)}{\subset}\hat L_{k,d}, \tag{44}$$

в силу которых и включения (41) заключаем, что

$$X_A(\tau_k + jm_k, \theta_k - m_k + 1)\hat{L}_{k,d} = \left(\prod_{l=1}^{j} X_A(\tau_k + m_k l, \tau_k + m_k(l-1))\right)\times$$

$$\times X_A(\tau_k, \theta_k - m_k + 1)\hat{L}_{k,d} \overset{(41),(44)}{\subset} \hat{L}_{k,d} \qquad (45)$$

для любого $0 < j \leqslant T_k$. В частности, при $j = T_k$ имеем включение (33).

Положим $\tilde{\delta}(j) := 1$, если $0 \leqslant j < T_k$, и $\tilde{\delta}(j) := 0$, если $T_k \leqslant j \leqslant 2T_k$.

Пусть $x(\cdot)$ – какое-либо решение системы $(2_A)$ с начальным условием $x(\theta_k - m_k + 1) \in \hat{L}_{k,d}$. Из (42), (44) и (45) следует включение

$$y_{k,j} := x(\theta_k + m_k j + \tilde{\delta}(j)) \in \hat{L}_{k,d}, \quad 0 \leqslant j < 2T_k. \qquad (46_j)$$

Для любого $0 \leqslant j < T_k$ справедливы равенства

$$\|y_{k,j}\| = \|U(b_k)x(\theta_k + m_k j)\| = \|x(\theta_k + m_k j)\|. \qquad (47_j)$$

Тогда в силу $(46_j)$ для любого $0 < j \leqslant 2T_k$ и некоторого $\hat{\delta}(j) \in \{-1, 0, 1\}$ выполняются оценки

$$\frac{\|x(\theta_k + m_k j)\|}{\|x(\theta_k + m_k(j-1))\|} \overset{(47_j)}{=} \frac{\|y_{k,j}\|}{\|y_{k,j-1}\|} \overset{(14)-(16)}{=} \frac{\|\hat{Y}_{\varkappa_k}(\hat{\delta}(j)b_k)y_{k,j-1}\|}{\|y_{k,j-1}\|} \overset{(36),(46_{j-1})}{>} e^{|d|(m_k-1)-\sqrt{|d|(m_k-1)}},$$

т.е. имеет место неравенство $(34_j)$. Лемма доказана.

**Лемма 7.** *Если $m_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и для любого $l \in \mathbb{N}$ найдётся $k_l \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $k \geqslant k_l$, удовлетворяющих условию $i_k \leqslant l$, выполняется оценка**)

$$|\cos b_k| > |d|^{-2}(m_k - 1)^{-2}, \qquad (48)$$

*то система $(2_A)$ правильна по Ляпунову.*

**Доказательство.** Обозначим $x(t) := X_A(t, T_{k_0(d)})e_{\delta(d)}$.

Считаем, что $d \neq 0$, и зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k_0(d)$.

Из неравенства $T_{k+1} \geqslant i_k m_k T_k$ вытекают оценки

$$4m_kT_k + 2|d|^{-1}\ln 2 \overset{(7_k)}{\leqslant} 5m_kT_k \leqslant 5T_{k+1}i_k^{-1}. \qquad (49_k)$$

Возьмём произвольные $1 \leqslant \alpha \in \mathbb{R}$ и $y \in L_d(\alpha)$. Если $|y_{3-\delta(d)}| \leqslant 2^{-1}\|y\|$, то выполняются неравенства $|y_{\delta(d)}| \geqslant \|y\| - |y_{3-\delta(d)}| \geqslant 2^{-1}\|y\|$. В противном случае, так как $y \in L_d(\alpha)$, будут справедливы неравенства $|y_{\delta(d)}| \geqslant \alpha^{-1}|y_{3-\delta(d)}| \geqslant 2^{-1}\alpha^{-1}\|y\|$. В обоих случаях, учитывая, что $\alpha \geqslant 1$, получаем оценку

$$|y_{\delta(d)}| \geqslant 2^{-1}\alpha^{-1}\|y\|, \quad \alpha \geqslant 1, \quad y \in L_d(\alpha). \qquad (50_\alpha)$$

Положим $\alpha := 2e^{4m_kT_k|d|}$. Поскольку $T_k \geqslant k \geqslant k_0(d) > |d|^{-1}$, то, следовательно, $\alpha \geqslant 1$, поэтому в силу $(5_k)$, $(50_\alpha)$ и $(49_k)$ получаем неравенство

$$|x_{\delta(d)}(T_{k+1})| \overset{(5_k),(50_\alpha)}{\geqslant} 2^{-2}e^{-4m_kT_k|d|}\|x(T_{k+1})\| \overset{(49_k)}{\geqslant} e^{-5T_{k+1}i_k^{-1}|d|}\|x(T_{k+1})\|.$$

Отсюда для любого $t \in [T_{k+1}, \theta_{k+1}]$ следует, что

$$\|x(t)\| = \|\mathrm{diag}\,[e^{d(t-T_{k+1})}, e^{d(-t+T_{k+1})}]x(T_{k+1})\| \geqslant$$

*) Второе неравенство в (32).

$$\geqslant e^{|d|(t-T_{k+1})}|x_{\delta(d)}(T_{k+1})| \geqslant e^{|d|(t-T_{k+1}-5T_{k+1}i_k^{-1})}\|x(T_{k+1})\|. \tag{$51_k$}$$

При всех неотрицательных $r, s \in \mathbb{R}$ вследствие неравенства $(11_{r,s})$ справедливы оценки

$$\|x(r)\| = \|X_A(r,s)x(s)\| \leqslant \|X_A(r,s)\|\|x(s)\| \overset{(11_{r,s})}{\leqslant} e^{|d||r-s|}\|x(s)\|. \tag{$52_{r,s}$}$$

Полагая в них $r := T_{k_0(d)}$, $s := T_k$ и учитывая равенства $\|x(T_{k_0(d)})\| = \|e_{\delta(d)}\| = 1$, получаем

$$\|x(T_k)\| \overset{(52)}{\geqslant} e^{-|d||T_{k_0(d)}-T_k|}\|x(T_{k_0(d)})\| \geqslant e^{-|d|T_k}. \tag{53}$$

Далее, зафиксируем произвольно $l \in \mathbb{N}$ и число $k > k_0(d)$ такое, что выполняется неравенство $m_k \geqslant 1 + 2^4|d|^{-1}$. Из (53) в силу $(51_{k-1})$ с учётом неравенства $i_k \geqslant 5$ вытекают оценки

$$\|x(\theta_k)\| = \|\mathrm{diag}\,[e^{d(\theta_k-T_k)}, e^{-d(\theta_k-T_k)}]x(T_k)\| \overset{(51_{k-1})}{\geqslant} e^{|d|(\theta_k-T_k)}e^{-T_k|d|}\|x(T_k)\| \overset{(53)}{\geqslant} e^{|d|(\theta_k-3T_k)}. \tag{54}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $i_k \leqslant l$.

Вследствие оценок (48), $(49_{k-1})$ и неравенств $i_k \geqslant 5$, $i_{k-1} \geqslant 5$ имеем

$$-2(\theta_k - T_k - m_k + 1) + |d|^{-1}\ln 2 + 4m_{k-1}T_{k-1} \overset{(49_{k-1})}{\leqslant} 2(-i_k m_k T_k + T_k + m_k) + 5T_k i_{k-1}^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2(-3m_kT_k + (1-m_k)T_k + (1-T_k)m_k) + T_k \leqslant$$

$$\leqslant -6m_kT_k + T_k \leqslant 0 \leqslant |d|^{-1}\ln\frac{1}{|\cos b_k|} \overset{(48)}{\leqslant} |d|^{-1}\ln(|d|^2(m_k-1)^2). \tag{55}$$

В силу включения $(5_{k-1})$, полагая $\alpha := \theta_k - m_k + 1$ и учитывая оценку (55), получаем соотношения

$$x(\alpha) = \mathrm{diag}\,[e^{d(\alpha-T_k)}, e^{-d(\alpha-T_k)}]x(T_k) \overset{(5_{k-1})}{\in} \mathrm{diag}\,[e^{d(\alpha-T_k)}, e^{-d(\alpha-T_k)}]L_d(2e^{4m_{k-1}T_{k-1}|d|}) =$$

$$= L_d(e^{-2(\theta_k-T_k-m_k+1)|d|}2e^{4m_{k-1}T_{k-1}|d|}) \overset{(55)}{\subset} \hat{L}_{k,d}. \tag{56}$$

Обозначим $\beta_{k,d} := m_k^{-1}(m_k - 1 - \sqrt{(m_k-1)|d|^{-1}})$.

Из (48) и (56) в силу леммы 6 следует для любого $1 \leqslant l \leqslant 2T_k$ оценка

$$\frac{\|x(\theta_k + m_k l)\|}{\|x(\theta_k + m_k(l-1))\|} \geqslant e^{|d|(m_k-1)-\sqrt{|d|(m_k-1)}} = e^{|d|\beta_{k,d}m_k} \tag{57}$$

и включение $x(T_{k+1}) \subset \hat{L}_{k,d}$, из которого вследствие $(50_\alpha)$, где $\alpha := 2^3d^2(m_k-1)^2$, вытекает неравенство

$$|x_{\delta(d)}(T_{k+1})| \geqslant 2^{-4}m_k^{-2}|d|^{-2}\|x(T_{k+1})\|. \tag{58}$$

Для любого $\theta_k \leqslant t \leqslant T_{k+1}$ найдётся единственное $l_t \in \mathbb{N}$ такое, что $t \in [m_k(l_t-1), m_kl_t)$.

Для таких $t$ из $(52_{m_kl_t,t})$ и (57) следуют оценки

$$\frac{\|x(t)\|}{\|x(\theta_k)\|} = \frac{\|x(t)\|}{\|x(m_kl_t)\|}\frac{\|x(m_kl_t)\|}{\|x(\theta_k)\|} \overset{(52)}{\geqslant} e^{-|d||t-m_kl_t|}\prod_{p=1+\theta_km_k^{-1}}^{l_t}\frac{\|x(m_kp)\|}{\|x(m_k(p-1))\|} \overset{(57)}{\geqslant}$$

$$\overset{(57)}{\geqslant} e^{-|d|m_k}e^{(l_t-\theta_km_k^{-1})\beta_{k,d}m_k|d|} \geqslant e^{|d|(\beta_{k,d}(t-\theta_k)-m_k)}. \tag{59}$$

Отсюда и из (54), поскольку $\beta_{k,d} \leqslant 1$ и $t^{-1}(m_k+3T_k) \leqslant \theta_k^{-1}(m_k+3T_k) = i_k^{-1}(T_k^{-1}+3m_k^{-1})$, вытекают неравенства

$$\frac{\ln\|x(t)\|}{t} = \frac{1}{t}\left(\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\theta_k)\|} + \ln\|x(\theta_k)\|\right) \overset{(54),(59)}{\geqslant}$$

$$\overset{(54),(59)}{\geqslant} \frac{|d|}{t}(\beta_{k,d}(t-\theta_k) - m_k + \theta_k - 3T_k) \geqslant |d|(\beta_{k,d} - T_k^{-1} - 3m_k^{-1}), \quad t \in [\theta_k, T_{k+1}]. \qquad (60_t)$$

В силу (58) для любого $t \in [T_{k+1}, \theta_{k+1}]$ выполняются оценки

$$\|x(t)\| = \|\operatorname{diag}[e^{d(t-T_{k+1})}, e^{-d(t-T_{k+1})}]x(T_{k+1})\| \overset{(58)}{\geqslant} e^{|d|(t-T_{k+1})}2^{-4}m_k^{-2}|d|^{-2}\|x(T_{k+1})\|.$$

Отсюда и из $(60_{T_{k+1}})$, так как

$$\frac{\ln(4m_k|d|)}{t|d|} \leqslant \frac{4m_k|d|}{T_{k+1}|d|} = \frac{4}{i_k+2} \leqslant \frac{1}{T_k}, \quad t \geqslant T_{k+1}, \qquad (61)$$

вытекают неравенства

$$\frac{1}{t}\ln\|x(t)\| \overset{(60)}{\geqslant} \frac{1}{t}(|d|(t-T_{k+1}) - \ln(2^4 m_k^2|d|^2) + |d|(\beta_{k,d} - T_k^{-1} - 3m_k^{-1})T_{k+1}) \geqslant$$

$$\geqslant |d|\left(1 - \left(1 - \beta_{k,d} + \frac{1}{T_k} + \frac{3}{m_k}\right)\frac{T_{k+1}}{t} - 2\frac{\ln(4m_k|d|)}{t|d|}\right) \overset{(61)}{\geqslant}$$

$$\overset{(61)}{\geqslant} |d|\left(\beta_{k,d} - \frac{2}{T_k} - \frac{3}{m_k}\right), \quad T_{k+1} \leqslant t \leqslant \theta_{k+1}. \qquad (62)$$

В случае же, когда $i_k > l$, для любого $t \in [\theta_k, T_{k+1}]$ вследствие $(52_{T_{k+1},t})$ и (54), поскольку

$$2\theta_k - t = t - 2(\theta_k - t) \geqslant t - 2(\theta_k - T_{k+1}) = t - 4m_kT_k,$$

справедливы неравенства

$$\|x(t)\| \overset{(52)}{\geqslant} e^{-|d||t-\theta_k|}\|x(\theta_k)\| \overset{(54)}{\geqslant} e^{|d|(\theta_k-t)}e^{|d|(\theta_k-3T_k)} = e^{|d|(2\theta_k-t-3T_k)} \geqslant e^{|d|(t-(4m_k+3)T_k)}, \qquad (63)$$

откуда, так как

$$\frac{(4m_k+3)T_k}{t} \leqslant \frac{(4m_k+3)T_k}{\theta_k} = \frac{4m_k+3}{i_km_k} \leqslant \frac{7}{i_k}, \qquad (64)$$

вытекают оценки

$$\frac{\ln\|x(t)\|}{t} \overset{(63)}{\geqslant} \frac{|d|}{t}(t-(4m_k+3)T_k) \overset{(64)}{\geqslant} |d|\left(1 - \frac{7}{i_k}\right), \quad t \in [\theta_k, T_{k+1}]. \qquad (65)$$

Полагая, в частности, в (65) $t := T_{k+1}$, получаем в силу оценок $(51_k)$ для любого $t \in$ $\in [T_{k+1}, \theta_{k+1}]$ неравенства

$$t^{-1}\ln\|x(t)\| \overset{(51_k),(65)}{\geqslant} t^{-1}|d|(t - T_{k+1} - 5i_k^{-1}T_{k+1} + (1-7i_k^{-1})T_{k+1}) =$$

$$= |d|(1 - 12t^{-1}i_k^{-1}T_{k+1}) \geqslant |d|(1 - 12i_k^{-1}). \qquad (66)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $l_\varepsilon := 12|d|\varepsilon^{-1}$.

Выберем $k_\varepsilon \geqslant \max\{k_0(d)+1, 4\varepsilon^{-1}|d|\}$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$m_{k_\varepsilon} \geqslant \max\{1+2^4|d|^{-1}, 2^4|d| \max\{1, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}\}\}.$$

Зафиксируем произвольные $k \geqslant k_\varepsilon$ и $t \in [\theta_k, \theta_{k+1}]$.

Справедливы оценки

$$|d|\beta_{k,d} \geqslant |d| - \frac{|d|}{m_k} - \sqrt{\frac{|d|}{m_k}} \geqslant |d| - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{67}$$

Отсюда, если выполняется неравенство $i_k \leqslant l_\varepsilon$, вследствие (60) и (62) получаем, так как $T_k \geqslant k \geqslant 4\varepsilon^{-1}|d|$, оценки

$$t^{-1}\ln\|x(t)\| \overset{(60),(62)}{\geqslant} |d|(\beta_{k,d} - 2T_k^{-1} - 3m_k^{-1}) \overset{(67)}{\geqslant} |d| - \varepsilon. \tag{68}$$

Если же $i_k > l_\varepsilon$, то в силу (65) и (66) имеют место оценки

$$t^{-1}\ln\|x(t)\| \geqslant |d| - 12|d|i_k^{-1} \geqslant |d| - \varepsilon. \tag{69}$$

Из (68) и (69) вытекает существование точного предела $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|x(t)\|$, откуда в силу леммы из [11] следует правильность системы $(2_A)$. Лемма доказана.

Пусть $M$ – произвольное $G_{\delta\sigma}$-множество. Найдутся открытые множества $\check{M}_{n,l} \subset \mathbb{R}$, $l, n \in \mathbb{N}$, такие, что множества $\tilde{M}_l$, $l \in \mathbb{N}$, определённые равенствами $\tilde{M}_l := \bigcap_{n=1}^\infty \check{M}_{n,l}$, удовлетворяют соотношению $M = \bigcup_{l=1}^\infty \tilde{M}_l$. Обозначим $\hat{M}_{n,l} := \bigcap_{p=1}^n \check{M}_{p,l}$. Справедливы включение

$$\hat{M}_{n+1,l} \subset \hat{M}_{n,l} \tag{$70_n$}$$

и равенство $\tilde{M}_l = \bigcap_{n=1}^\infty \hat{M}_{n,l}$.

Определим рекуррентно последовательность $\{j_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{N} \bigsqcup \{0\}$, полагая $j_0 := 0$ и $j_n := 2n9^{n+n^3} + j_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Для любых $k, l, n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим $J_n := \{j_{n-1}+1, \ldots, j_n\}$,

$$\varkappa_k = \varkappa_k(n) := \frac{1}{9^{n+n^3}}\left(k - \frac{j_n + j_{n-1}}{2}\right), \quad \rho_{n,l}(\alpha) = \rho_{n,l}(\alpha, \hat{M}_{n,l}) := \inf_{\beta \in \mathbb{R}\setminus\hat{M}_{n,l}} |\alpha - \beta|.$$

Обозначим также через $I_{n,k} = I_{n,k}(\{\hat{M}_{n,l}\}_{n,l\in\mathbb{N}})$ множество тех $l \in \mathbb{N}$, для которых либо $\rho_{n,l}(\varkappa_k(n)) \geqslant 2/n$, либо найдётся $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ такое, что

$$2/n \leqslant \rho_{p,l}(\varkappa_k(n)) \leqslant 5/n. \tag{$71_{p,n}$}$$

**Лемма 8.** *Для любых $\mu \notin M$ и $l \in \mathbb{N}$ существует $n_0 = n_0(\mu, l) \in \mathbb{N}$ такое, что при любом $n \geqslant n_0$ выполнение для некоторого $k \in J_n$ неравенства*

$$|\mu - \varkappa_k(n)| < 2/n \tag{$72_{k,n}$}$$

*влечёт за собой включение $l \notin I_{n,k}$.*

**Доказательство.** Зафиксируем произвольные $\mu \notin M$ и $l \in \mathbb{N}$. Обозначим $\mathfrak{F}_{\mu,l} := \{p : \mu \in \hat{M}_{p,l}\}$. Так как $\mu \in \mathbb{R}\setminus M \subset \mathbb{R}\setminus\tilde{M}_l = \mathbb{R}\setminus(\bigcap_{n=1}^\infty \hat{M}_{n,l}) = \bigcup_{n=1}^\infty(\mathbb{R}\setminus\hat{M}_{n,l})$, то найдётся $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu \in \mathbb{R}\setminus\hat{M}_{n,l} \overset{(72)}{\subset} \mathbb{R}\setminus\hat{M}_{r,l}$, $r \geqslant n$. Поэтому $\sup\mathfrak{F}_{\mu,l} < n$, т.е. множество $\mathfrak{F}_{\mu,l}$ конечно.

Если $\mathfrak{F}_{\mu,l} = \varnothing$, то положим $q(\mu, l) := 0$, $n_0 := 1$. В противном случае обозначим $q = q(\mu, l) := \max\mathfrak{F}_{\mu,l}$. Из включения $\mu \in \hat{M}_{q,l}$ и того, что множество $\hat{M}_{q,l}$ открыто, следует положительность числа $\rho_{q,l}(\mu)$. Поэтому определена величина $n_0 := 1 + [8/\rho_{q,l}(\mu)]$.

Предположим, что для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, и $k \in J_n$ справедливо неравенство $(72_{k,n})$.

Для любого $p > q(\mu, l)$ в силу соотношения $p \notin \mathfrak{F}_{\mu,l}$, эквивалентного включению $\mu \in \mathbb{R} \backslash \hat{M}_{p,l}$, имеет место равенство $\rho_{p,l}(\mu) = 0$. Из него вследствие неравенств $(72_{k,n})$ вытекают оценки

$$\rho_{p,l}(\varkappa_k) \leqslant \rho_{p,l}(\mu) + |\mu - \varkappa_k(n)| \overset{(72_{k,n})}{<} 2/n, \quad p > q(\mu, l). \tag{$73_p$}$$

Отсюда в случае $q(\mu, l) = 0$ следует соотношение $l \notin I_{n,k}$.

Рассмотрим теперь случай $q(\mu, l) > 0$. Справедливо неравенство

$$8/\rho_{q,l}(\mu) < n_0. \tag{74}$$

Тогда для любого $p \in \{1, \ldots, q\}$ в силу вытекающего из $(70_r)$, $r \in \{p, \ldots, q-1\}$, включения $\hat{M}_{q,l} \subset \hat{M}_{p,l}$ справедливы неравенства

$$\rho_{p,l}(\varkappa_k) \geqslant \rho_{q,l}(\varkappa_k(n)) \geqslant \rho_{q,l}(\mu) - |\mu - \varkappa_k| \overset{(72),(74)}{>} \frac{8}{n_0} - \frac{2}{n} \geqslant \frac{6}{n}, \quad p \in \{1, \ldots, q\}.$$

Отсюда и из $(73_p)$ следует, что соотношения $(71_{p,n})$, $p \in \mathbb{N}$, не выполнены, а это влечёт за собой включение $l \notin I_{n,k}$. Лемма доказана.

Для любого натурального $k$ найдётся единственное $n = n(k) \in \mathbb{N}$ такое, что $k \in J_n$. Определим значения $m_k$, $i_k$ и $b_k$, зависящие от выбора открытых множеств $\check{M}_{n,l} \subset \mathbb{R}$, $l, n \in \mathbb{N}$, таких, что $M = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \check{M}_{n,l}$, равенствами

$$d := \mu, \quad m_k := 1 + n(k)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \tag{75}$$

$$i_k := \max\{5, \min I_{n,k}\}, \quad b_k(\mu) := \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}(\mu - \varkappa_k(n)), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \text{если} \quad I_{n,k} \neq \varnothing, \tag{76}$$

$$i_k := 5, \quad b_k(\mu) \equiv 0, \quad \text{если} \quad I_{n,k} = \varnothing. \tag{77}$$

Зададим матрицу $\tilde{A}_\mu(\cdot) = \tilde{A}_\mu(\,\cdot\,, (\hat{M}_{n,l})_{n,l \in \mathbb{N}})$, $\mu \in \mathbb{R}$, равенством

$$\tilde{A}_\mu(t) := A(t) = A(t, d, (m_k, i_k, b_k)_{k=1}^{\infty}), \quad t \geqslant 0,$$

в котором величины $d$, $m_k$, $i_k$, $b_k$ определяются соотношениями (75)–(77).

**Лемма 9.** *Если $0 \notin M$, то система $(2_{\tilde{A}_\mu})$ неправильна по Ляпунову при любом $\mu \in M$ и правильна при всех остальных $\mu \in \mathbb{R} \backslash M$.*

**Доказательство.** Пусть $\mu \notin M$. Зафиксируем произвольное $l_0 \in \mathbb{N}$.

Положим $n_1 = n_1(\mu, l_0) := \max(\{2|\mu|\} \bigcup \{n_0(\mu, l) : 1 \leqslant l \leqslant l_0\})$ (число $n_0(\mu, l)$ определено в формулировке леммы 8).

Для любого $k > j_{n_1}$ найдётся $n \geqslant n_1$ такое, что $k \in J_n$. Справедливы оценки

$$|\varkappa_k(n)| \leqslant \max\{|\varkappa_{j_{n-1}}(n)|, |\varkappa_{j_n}(n)|\} = 9^{-n-n^3}|j_n - j_{n-1}|/2 = n. \tag{78}$$

Если $I_{n,k} = \varnothing$, то выполняются соотношения

$$\cos b_k(\mu) = 1 > n^{-2}. \tag{79}$$

Рассмотрим случай, когда $I_{n,k} \neq \varnothing$. Из оценки (78) вытекают неравенства

$$\left|\frac{\pi}{2} - b_k(\mu)\right| = \frac{1}{n}|\mu - \varkappa_k(n)| \leqslant \frac{|\mu|}{n} + \frac{|\varkappa_k|}{n} \overset{(78)}{\leqslant} \frac{1}{2} + 1 < \frac{\pi}{2}. \tag{80}$$

Если $|\mu-\varkappa_k(n)|\geqslant 2/n,$ то вследствие (80) имеют место оценки

$$|\cos b_k(\mu)| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-b_k(\mu)\right)\right| \overset{(80)}{>} \frac{1}{2}\left|\frac{\pi}{2}-b_k(\mu)\right| = \frac{1}{2n}|\mu-\varkappa_k(n)| \geqslant \frac{1}{n^2}. \tag{81}$$

Если же $|\mu-\varkappa_k(n)|<2/n,$ то в силу леммы 8 любое натуральное $l,$ не превосходящее $l_0,$ не содержится в множестве $I_{n.k}.$ Отсюда следуют неравенства $i_k\geqslant \min I_{n,k}>l_0.$

Таким образом, для любого $k>j_{n_1(\mu,l_0)}$ выполняется одно из двух неравенств: либо $i_k>$ $>l_0,$ либо, поскольку $n^2=(m_k-1)^2/n^2\leqslant\mu^2(m_k-1)^2,$ вследствие (79) и (81) справедлива оценка $|\cos b_k(\mu)|>\mu^{-2}(m_k-1)^{-2}.$ Следовательно, выполнены условия леммы 7, а значит, система $(2_{\tilde{A}_\mu})$ правильна.

Пусть теперь $\mu\in M.$ В этом случае найдётся $l\in\mathbb{N}$ такое, что $\mu\in\tilde{M}_l.$ Тогда $\mu\in\hat{M}_{n,l}$ для всех $n\in\mathbb{N}.$

Зафиксируем произвольно натуральное $n\geqslant\max\{3,2|\mu|\}.$ В силу вытекающей из включения $\mu\in\hat{M}_{n,l}$ и того, что множество $\hat{M}_{n,l}$ открыто, положительности числа $\rho_{n,l}(\mu)$ определена величина $r=r(\mu,n,l):=[4/\rho_{n,l}(\mu)].$

Выполняются неравенства $r\leqslant 4/\rho_{n,l}(\mu)<1+r,$ откуда следуют оценки

$$4/r\geqslant\rho_{n,l}(\mu)>4/(1+r). \tag{82}$$

Рассмотрим случай, когда имеет место неравенство

$$\rho_{n,l}(\mu)<2^{-n}+9^{-n-n^3}. \tag{83}$$

Из (82) и (83) вытекает, что $1/n\overset{(83)}{>}\rho_{n,l}(\mu)/2\overset{(82)}{>}2/(1+r),$ откуда следуют оценки

$$r>2n-1\geqslant n\geqslant 3. \tag{84}$$

Поэтому в силу (82) и (84) справедливы неравенства

$$\rho_{n,l}(\mu)\overset{(82)}{>}4/(1+r)\overset{(84)}{>}4/(3^{-1}r+r)=3/r. \tag{85}$$

Для любого целого $p\geqslant n,$ поскольку $|\mu|\leqslant 2^{-1}p\overset{(78)}{<}\max\{|\varkappa_{j_{p-1}}(p)|,|\varkappa_{j_p}(p)|\},$ найдётся $q_p=q_p(\mu)\in J_p$ такое, что

$$|\mu-\varkappa_{q_p}(p)|\leqslant 9^{-p-p^3}. \tag{$86_p$}$$

В силу (82), (85) и $(86_r)$ выполняются неравенства

$$\frac{5}{r}\geqslant\frac{4}{r}+\frac{1}{9^{r+r^3}}\overset{(82),(86_r)}{\geqslant}\rho_{n,l}(\mu)+|\mu-\varkappa_{q_r}(r)|\geqslant\rho_{n,l}(\varkappa_{q_r}(r))\geqslant$$

$$\geqslant\rho_{n,l}(\mu)-|\mu-\varkappa_{q_r}(r)|\overset{(85),(86_r)}{>}\frac{3}{r}-\frac{1}{9^{r+r^3}}\geqslant\frac{2}{r}.$$

Следовательно, имеют место оценки $(71_{n,r}),$ в силу которых, учитывая верное, согласно (84), неравенство $n<r,$ получаем включение $l\in I_{r,q_r}.$

В случае же, когда неравенство (83) не выполняется, справедливы вследствие $(86_n)$ неравенства

$$\rho_{n,l}(\varkappa_{q_n}(n))\geqslant\rho_{n,l}(\mu)-|\mu-\varkappa_{q_n}(n)|\overset{(86_n)}{\geqslant}2/n,$$

из которых вытекает включение $l\in I_{n,q_n}.$ Таким образом, в любом случае для некоторого $p\in\{n,r\}$ имеет место включение $l\in I_{p,q_p},$ влекущее за собой в силу (76) оценку

$$i_{q_p}\leqslant\tilde{l}:=\max\{5,l\}.$$

Обозначим
$$\Xi_l := \{k \in \mathbb{N} : i_k \leqslant \tilde{l}, \quad |\cos b_k(\mu)| < e^{-2m_k|\mu|}\}.$$

Предположим, что существует $k_0 := \max \Xi_l$. Зафиксируем произвольно
$$n_0 \geqslant \max\{k_0, 2\tilde{l}, 2|\mu|, 2|\mu|^{-1}\}.$$

Тогда для некоторого $p \geqslant n_0$ существует $q_p \in J_p$, при котором выполняются оценка $i_{q_p} \leqslant \tilde{l}$ и соотношение $I_{p,q_p} \neq \varnothing$. Вследствие этого и неравенства $(86_p)$ справедливы оценки
$$|\cos b_{q_p}(\mu)| = |\sin(p^{-1}(\mu - \varkappa_{q_p}(p)))| \leqslant |p^{-1}(\mu - \varkappa_{q_p}(p))| \overset{(86_p)}{\leqslant} 9^{-p-p^3} \leqslant 3^{-2m_{q_p}|\mu|} < e^{-2m_{q_p}|\mu|}.$$

Поэтому $q_p \in \Xi_l$. При этом $q_p > j_{p-1} \geqslant j_{n_0-1} \geqslant j_{k_0}$, откуда с учётом неравенства $k_0 \leqslant j_{k_0}$ получаем оценку $q_p > k_0$. Последнее противоречит равенству $k_0 := \max \Xi_l$, а значит, множество $\Xi_l$ неограничено.

Учитывая верные для любого целого $p > j_{n_0-1}$ неравенства
$$m_p = 1 + n(p)^2 > n(p) \geqslant n_0 \geqslant 2\max\{\tilde{l}, |\mu|^{-1}\},$$
заключаем, что для данного $l$ выполнены условия леммы 4, в которой вместо $l$ следует взять $\tilde{l}$, а в качестве последовательности $(k_j)_{j=1}^{\infty}$ – множество $\Xi_l \bigcap (j_{n_0-1}, +\infty)$. Следовательно, система $(2_{\tilde{A}_\mu})$ неправильна. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех $t \in \mathbb{R}_+$ таких, что $\tilde{A}_\mu(t) = \mu \operatorname{diag}[1, -1]$.

Для каждого $t \in \mathcal{T}$ определим функцию $\omega(\cdot)$ равенством $\omega(t) \equiv 0$. Для всех остальных $t \in [T_k, T_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, полагаем $q_t := 0$, если $t < \tau_{k,j}$, и $q_t := 1$ в противном случае, и пусть $\omega(t) := (-1)^{q_t} b_k(0)$. Справедливо равенство
$$\tilde{A}_0(t) = \omega(t)J, \quad t \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathcal{T}. \tag{87}$$

Определим для каждого $k \in \mathbb{N}$ число $\zeta_k$, полагая $\zeta_k = 0$, если $I_{n(k),k} = \varnothing$, и $\zeta_k := 1/n(k)$ в противном случае. При любом $t \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathcal{T}$ выполняются соотношения
$$\tilde{A}_\mu(t) = (-1)^{q_t}\zeta_k \mu J + \tilde{A}_0(t) \overset{(87)}{=} ((-1)^{q_t}\zeta_k\mu + \omega(t))J, \tag{$88_\mu$}$$
влекущие за собой равенства
$$\mu\tilde{A}_1(t) + (1-\mu)\omega(t)J \overset{(88_1)}{=} \mu((-1)^{q_t}\zeta_k + \omega(t))J + (1-\mu)\omega(t)J \overset{(88_\mu)}{=} \tilde{A}_\mu(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathcal{T}. \tag{89}$$

Зададим матрицу $C(t)$, $t \geqslant 0$, следующим образом:
$$C(t) := U^{-1}(\tau)\left(\tilde{A}_1(t)U(\tau) - \frac{d}{dt}U(\tau)\right), \quad t \geqslant 0, \quad \tau = \tau(t) := \int\limits_0^t \omega(s)ds. \tag{90}$$

Сделав в семействе $(1_\mu)$ с матрицей $C(\cdot)$, задаваемой равенством (90), линейную замену переменных $y(t) := U(\tau(t))x(t)$, учитывая соотношения
$$\frac{d}{dt}U(\tau(t)) = \begin{pmatrix} -\sin\tau & \cos\tau \\ -\cos\tau & -\sin\tau \end{pmatrix} \frac{d}{dt}\tau(t) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \omega(t) = \omega(t)JU(\tau(t)) \tag{91}$$

и используя равенство (89), придём, как легко убедиться, к семейству $(2_{\tilde{A}_\mu})$:

$$\frac{dy}{dt} = \mu U(\tau(t))C(t)x + \left(\frac{d}{dt}U(\tau(t))\right)x \overset{(90)}{=} \mu\left(\tilde{A}_1(t)U(\tau(t)) - \frac{d}{dt}U(\tau(t))\right)x +$$

$$+ \left(\frac{d}{dt}U(\tau(t))\right)x \overset{(91)}{=} \mu\tilde{A}_1(t)U(\tau(t))x + (1-\mu)\omega(t)JU(\tau(t))x \overset{(89)}{\equiv} \tilde{A}_\mu(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0.$$

Основной результат настоящей работы составляет следующая

**Теорема.** *Для любого $G_{\delta\sigma}$-множества $M \subset \mathbb{R}$, $0 \notin M$, система ($1_\mu$) с матрицей $C(\cdot)$, заданной равенством (90), неправильна по Ляпунову при всех $\mu \in M$ и правильна при всех остальных $\mu \in \mathbb{R}$.*

**Доказательство.** Из леммы 9 следует, что система $(2_{\tilde{A}_\mu})$ неправильна по Ляпунову при всех $\mu \in M$ и правильна при всех остальных $\mu \in \mathbb{R}$.

Отсюда, поскольку в силу асимптотической эквивалентности систем $(1_\mu)$ и $(2_{\tilde{A}_\mu})$ они обе одновременно либо правильны, либо неправильны, и вытекает утверждение теоремы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Изобов Н.А., Макаров Е.К.* О неправильных по Ляпунову линейных системах с параметром при производной // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 11. С. 1870–1880.
2. *Ляпунов А.М.* Собр.соч.: в 6-ти т. Т. 2. М.-Л., 1956.
3. *Изобов Н.А.* Исследования в Белоруссии по теории характеристических показателей Ляпунова и её приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2034–2055.
4. *Макаров Е.К.* О мере множества неправильности линейной системы с параметром при производной // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 4. С. 302–305.
5. *Липницкий А.В.* О мере множеств неправильности линейных систем // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 211–215.
6. *Барабанов Е.А.* О множествах неправильности семейств линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1067–1084.
7. *Липницкий А.В.* Замкнутые множества неправильности линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 2. С. 189–194.
8. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
9. *Ланкастер П.* Теория матриц М., 1973.
10. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006.
11. *Макаров Е.К.* О линейных системах с множествами неправильности полной меры // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 2. С. 209–212.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 17.07.2020 г.
После доработки 17.07.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.