

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛОСЕ С НЕГЛАДКОЙ КРИВОЙ РАЗДЕЛА СРЕД

© 2021 г. С. И. Сахаров

Доказано существование классического решения контактной задачи для параболических по Петровскому систем второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами в полосе, разделённой негладкой кривой на две области.

DOI: 10.31857/S0374064121040051

Важное место в теории краевых задач для параболических систем занимают задачи с разрывными коэффициентами (см. [1, с. 157]). Однозначная классическая разрешимость в классах Гёльдера $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}$ контактной задачи для параболических систем установлена в работах [2–4]. Особый интерес такая задача представляет в случае негладкой кривой раздела сред (см., например, [5, с. 183–188; 6, 7]). В [8] исследованы существование и единственность решения в классе Дини контактной задачи для параболического уравнения с коэффициентами, разрывными на негладкой кривой раздела сред, принадлежащей классу Дини–Гёльдера. В работах [9, 10] доказана однозначная разрешимость в классах $C^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}$ контактной задачи для многомерного по пространственной переменной x параболического уравнения с коэффициентами, разрывными на негладкой поверхности раздела сред.

В настоящей работе установлена классическая разрешимость в классе $C^{1,0}$ контактной задачи для одномерных (по x) параболических систем второго порядка с негладкой кривой раздела сред, принадлежащей классу Дини–Гёльдера, при более слабых, чем в [8], предположениях о гладкости коэффициентов и минимальных предположениях о гладкости правых частей в условиях сопряжения. В частности, от правой части в условии сопряжения первого рода требуется только существование непрерывной дробной производной порядка $1/2$, а от правой части в условии сопряжения второго рода – лишь непрерывность. Исследование проводится методом интегральных уравнений, разработанным в [11–13].

Статья состоит из трёх пунктов. В п. 1 вводятся используемые в работе обозначения и функциональные пространства, ставится контактная задача и формулируется основная теорема. В п. 2 устанавливается однозначная разрешимость системы интегральных уравнений, к которой редуцируется исходная задача. В п. 3 доказывается основная теорема.

1. Постановка задачи. Пусть фиксировано положительное число T . Через $C[0, T]$ обозначим линейное пространство непрерывных (вектор-)функций $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, с нормой $\|\psi; [0, T]\|^0 = \max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|$, а через $C_0[0, T]$ – его подпространство, состоящее из (вектор-)функций, обращающихся в нуль в нуль. Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под нормой $|a|$ (соответственно, нормой $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2}\psi)(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \psi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

– оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя [11, 12], введём следующие линейные нормированные пространства: $C^{1/2}[0, T] := \{\psi \in C[0, T] : \partial^{1/2}\psi \in C[0, T]\}$ с нормой $\|\psi; [0, T]\|^{1/2} = \max_{t \in [0, T]} |\psi(t)| + \max_{t \in [0, T]} |\partial^{1/2}\psi(t)|$ и $C_0^{1/2}[0, T] := \{\psi \in C^{1/2}[0, T] : \psi(0) = 0, \partial^{1/2}\psi(0) = 0\}$.

Пусть $D = \mathbb{R} \times (0, T)$, а Ω – некоторая область в D . Рассмотрим линейное пространство $C^0(\overline{\Omega})$ непрерывных и ограниченных (вектор-)функций $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$ с нормой $\|u; \Omega\|^0 = \sup_{(x,t) \in \Omega} |u(x,t)|$ и его подпространство $C_0^0(\overline{\Omega}) := \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : u(x, 0) = 0\}$, а также линейное

пространство $C_0^{1,0}(\overline{\Omega}) := \{u \in C_0^0(\overline{\Omega}) : \partial_x u \in C_0^0(\overline{\Omega})\}$ с нормой $\|u; \Omega\|^{1,0} = \sum_{l=0}^1 \|\partial_x^l u; \Omega\|^0$.

Под значениями функций и их производных на границе области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω .

Функция $\nu(z)$, $z \geq 0$, называется *почти убывающей*, если при некоторой положительной постоянной C выполняется неравенство $\nu(z_1) \leq C\nu(z_2)$ для всех $z_1 \geq z_2 \geq 0$.

Следуя [14, с. 147], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такую, что $\omega(0) = 0$. Заметим, что

$$\omega(|x|) \exp\{-|x|^2/t\} \leq C\omega(t^{1/2}) \exp\{-c|x|^2/t\}$$

для некоторых положительных постоянных C , c и всех $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$. Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если выполняется соотношение

$$\tilde{\omega}(z) := \int_0^z \omega(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0. \quad (1)$$

Если модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Дини (1), то функция $\tilde{\omega}$ – также модуль непрерывности, причём $\omega(z) \leq 2\tilde{\omega}(z)$, $z \geq 0$. Кроме того, функция $\omega^*(z) = \omega(z^{1/2})$ также является модулем непрерывности, при этом, если ω удовлетворяет условию (1), то ω^* также удовлетворяет условию Дини (1) и при $z \geq 0$ имеет место равенство $\tilde{\omega}^*(z) = 2\tilde{\omega}(z^{1/2})$.

Пусть ω – некоторый модуль непрерывности. Через $H_0^{1/2+\omega}[0, T]$ обозначим линейное пространство (вектор-)функций $\psi \in C[0, T]$, для которых

$$\|\psi; [0, T]\|^{1/2+\omega} = \|\psi; [0, T]\|^0 + \sup_{t, t+\Delta t \in (0, T)} \left\{ \frac{|\psi(t+\Delta t) - \psi(t)|}{|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} < \infty.$$

Введём пространство $H_0^\omega[0, T]$ (вектор-)функций $\psi \in C[0, T]$, для которых

$$\|\psi; [0, T]\|^\omega = \|\psi; [0, T]\|^0 + \sup_{t, t+\Delta t \in (0, T)} \left\{ \frac{|\psi(t+\Delta t) - \psi(t)|}{\omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} < \infty.$$

Замечание 1.1. Если $\psi \in H_0^{1/2+\omega}[0, T]$, где ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию (1), то $\psi \in C_0^{1/2}[0, T]$ (см. [15]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [12]).

В полосе D рассмотрим равномерно параболические по Петровскому (см. [16]) операторы

$$L^{(s)}u = \partial_t u - \sum_{k=0}^2 A_k^{(s)}(x, t) \partial_x^k u, \quad u = (u_1, \dots, u_m)^T, \quad s = 1, 2,$$

где $A_k^{(s)} = \|a_{ijk}^{(s)}\|_{i,j=1}^m - m \times m$ -матрицы, элементы которых – вещественные функции, определённые в $\overline{D}$ и удовлетворяющие следующим условиям:

(а) собственные числа $\mu_r^{(s)}$ матриц $A_2^{(s)}$ подчиняются неравенствам $\operatorname{Re} \mu_r^{(s)}(x, t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x, t) \in \overline{D}$, $r = \overline{1, m}$, $s = 1, 2$;

(б) $a_{ijk}^{(s)} \in C^0(\overline{D})$ и $|\Delta_{x,t} a_{ijk}^{(s)}(x, t)| \leq \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$, $k = 0, 1, 2$, $i, j = \overline{1, m}$, $s = 1, 2$, где ω_0 – модуль непрерывности такой, что $\tilde{\omega}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty$, $z > 0$, и для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ функция $\omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z > 0$, почти убывает.

Полоса D разделяется на области $\Omega^{(1)} = \{(x, t) \in D : x < g(t)\}$ и $\Omega^{(2)} = \{(x, t) \in D : x > g(t)\}$ негладкой, вообще говоря, кривой $\Sigma = \{(x, t) \in \overline{D} : x = g(t)\}$, где функция g удовлетворяет условию

$$|\Delta_t g(t)| \leq |\Delta t|^{1/2} \omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t + \Delta t \in [0, T], \quad (2)$$

ω_1 – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию (1), и такой, что при некотором $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ функция $\omega_1(z)z^{-\varepsilon_1}$, $z > 0$, почти убывает.

Ставится задача нахождения (вектор-)функций $u^{(s)} \in C_0^{1,0}(\overline{\Omega}^{(s)})$, $s = 1, 2$, являющихся регулярными решениями уравнений

$$L^{(s)}u^{(s)}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega^{(s)}, \quad s = 1, 2, \quad (3)$$

удовлетворяющими начальным условиям

$$u^{(1)}(x, 0) = 0, \quad x \leq g(0); \quad u^{(2)}(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad (4)$$

и на границе Σ условиям сопряжения

$$\partial_x^k(u^{(1)} - u^{(2)})(g(t), t) = \psi_{k+1}(t), \quad k = 0, 1, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где $\psi_1 \in C_0^{1/2}[0, T]$, $\psi_2 \in C[0, T]$ – заданные функции.

Известно (см. [17]), что при выполнении условий (а) и (б) у систем $L^{(s)}u^{(s)} = 0$, $s = 1, 2$, существуют фундаментальные матрицы решений

$$\Gamma^{(s)}(x, t; \xi, \tau) = Z(x - \xi, t - \tau; A_2^{(s)}(\xi, \tau)) + W^{(s)}(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in \overline{D} \times \overline{D}, \quad t > \tau, \quad (6)$$

где

$$Z(x, t; A_2^{(s)}(\xi, \tau)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} \exp\{-\sigma^2 A_2^{(s)}(\xi, \tau)t\} d\sigma, \quad t > 0, \quad 0 \leq \tau \leq T, \quad x, \xi \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

$$W^{(s)}(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} Z(x - y, t - \eta; A_2^{(s)}(y, \eta)) \mu^{(s)}(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (8)$$

(вектор-)плотности $\mu^{(s)}$ в представлении (8) находятся из условия, что матрицы $\Gamma^{(s)}(x, t; \xi, \tau)$ при любых фиксированных (ξ, τ) , $\xi \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau < T$, удовлетворяют по переменным (x, t) уравнениям $L^{(s)}u^{(s)} = 0$ в слое $\mathbb{R} \times (\tau, T)$.

Имеют место следующие оценки (см. [17]):

$$|\partial_t^k \partial_x^l \Gamma^{(s)}(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-(2k+l+1)/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\},$$

$$|\partial_t^k \partial_x^l W^{(s)}(x, t; \xi, \tau)| \leq C\tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})(t - \tau)^{-(2k+l+1)/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\}, \quad (9)$$

$2k + l \leq 2$, $x, \xi \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau < t \leq T$,

$$|\partial_t^k \partial_x^l Z(x, t; A_2^{(s)}(\xi, \tau))| \leq C(k, l)t^{-(2k+l+1)/2} \exp\{-x^2/t\}, \quad (10)$$

$$|\Delta_{\xi, \tau} \partial_t^k \partial_x^l Z(x, t; A_2^{(s)}(\xi, \tau))| \leq C(k, l)\omega_0(|\Delta \xi| + |\Delta \tau|^{1/2})t^{-(2k+l+1)/2} \exp\{-cx^2/t\},$$

$k, l \geq 0$, $x, \xi, \xi + \Delta \xi \in \mathbb{R}$, $\tau, \tau + \Delta \tau \in [0, T]$, $t > 0$,

$$|\Delta_t \partial_x^l W^{(s)}(x, t; \xi, \tau)| \leq C(\Delta t)^{1-l/2} \tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})(t - \tau)^{-3/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\}, \quad (11)$$

$l = 0, 1$, $x, \xi \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau < t < t + \Delta t \leq T$, $\Delta t \leq t - \tau$. Здесь и далее через C и c обозначаем положительные постоянные, зависящие от величин δ , T , коэффициентов операторов $L^{(s)}$ и кривой Σ .

Основным результатом работы является следующая

Теорема. Пусть коэффициенты операторов $L^{(s)}$, $s = 1, 2$, удовлетворяют условиям (а) и (b), а для функции g , задающей кривую Σ , выполняется условие (2). Тогда для любых (вектор-)функций $\psi_1 \in C_0^{1/2}[0, T]$ и $\psi_2 \in C_0[0, T]$ решением задачи (3)–(5) являются потенциалы простого слоя

$$u^{(s)}(x, t) = \int_0^t \Gamma^{(s)}(x, t; g(\tau), \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \overline{\Omega^{(s)}}, \quad s = 1, 2, \quad (12)$$

где $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})^T \in C_0[0, T] \times C_0[0, T]$ – единственное в $C[0, T] \times C[0, T]$ решение системы интегральных уравнений

$$\sum_{s=1}^2 (-1)^{(s+1)} \int_0^t \Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau = \psi_1(t), \quad (13)$$

$$\sum_{s=1}^2 \left[(2A_2^{(s)})^{-1} (g(t), t) \varphi^{(s)}(t) + (-1)^{s+1} \int_0^t \partial_x \Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau \right] = \psi_2(t), \quad (14)$$

$t \in [0, T]$, и справедливы оценки

$$\|u^{(s)}; \Omega^{(s)}\|^{1,0} \leq C(\|\psi_1; [0, T]\|^{1/2} + \|\psi_2; [0, T]\|^{1/2}), \quad s = 1, 2. \quad (15)$$

Замечание 1.2. Условия $\psi_1 \in C_0^{1/2}[0, T]$, $\psi_2 \in C_0[0, T]$ теоремы являются минимальными для того, чтобы функции $u^{(s)}$, $s = 1, 2$, являющиеся решением задачи (3)–(5), принадлежали классам $C^{1,0}(\overline{\Omega^{(s)}})$, $s = 1, 2$.

В самом деле, пусть $D^+ = \{(x, t) \in D : x > 0\}$ и функция $u \in C^{1,0}(\overline{D^+})$ является регулярным решением уравнения $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ в D^+ . Обозначим $\hat{\psi}_1(t) = u(0, t)$, $\hat{\psi}_2(t) = \partial_x u(0, t)$, $t \in [0, T]$. Тогда $\hat{\psi}_2 \in C_0[0, T]$. Докажем, что $\hat{\psi}_1 \in C_0^{1/2}[0, T]$. Из представления

$$u(x, t) = -2 \int_0^t Z(x, t - \tau) \hat{\psi}_2(\tau) d\tau, \quad \text{где} \quad Z(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4t} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

и равенства (см. [12])

$$\partial_t^{1/2} Z(x, t) = -\partial_x Z(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0,$$

следует, что

$$\begin{aligned} \partial_t^{1/2} u(x, t) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \partial_t \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} d\tau \int_0^\tau Z(x, \tau - \eta) \hat{\psi}_2(\eta) d\eta = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \partial_t \int_0^t \hat{\psi}_2(\tau) d\tau \int_\tau^t (t - \eta)^{-1/2} Z(x, \eta - \tau) d\eta = -2 \int_0^t \hat{\psi}_2(\tau) \partial_t^{1/2} Z(x, t - \tau) d\tau = \\ &= 2 \int_0^t \hat{\psi}_2(\tau) \partial_x Z(x, t - \tau) d\tau = -\partial_x u(x, t), \quad (x, t) \in D^+. \end{aligned} \quad (16)$$

Из равномерной по $t \in [0, T]$ сходимости $\partial_x u(x, t) \rightarrow \hat{\psi}_2(t)$ при $x \rightarrow +0$ и из (16) следует, что

$$\partial_t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} u(x, \tau) d\tau \rightarrow -\hat{\psi}_2(t)$$

при $x \rightarrow +0$ равномерно по $t \in [0, T]$. Отсюда в силу соотношения

$$\lim_{x \rightarrow +0} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} u(x, \tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \hat{\psi}_1(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

закключаем, что существует

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_t \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \hat{\psi}_1(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

и $\hat{\psi}_1 \in C^{1/2}[0, T]$.

2. Система интегральных уравнений. Следуя методу из [11–13], докажем, что для любых $\psi_1 \in C^{1/2}[0, T]$ и $\psi_2 \in C[0, T]$ существует единственное решение $\varphi^{(s)} \in C[0, T]$, $s = 1, 2$, системы (13), (14). Пусть $\bar{A}^{(s)}(\tau) = A_2^{(s)}(g(\tau), \tau)$, $s = 1, 2$. Используя представление (6), положим

$$\Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau) = Z(0, t - \tau; \bar{A}^{(s)}(\tau)) + N_1^{(s)}(t, \tau),$$

где

$$N_1^{(s)}(t, \tau) = [Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \bar{A}^{(s)}(\tau)) - Z(0, t - \tau; \bar{A}^{(s)}(\tau))] + W^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau).$$

Обозначим $N_2^{(s)}(t, \tau) = \partial_x \Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau)$. Тогда система (13), (14) запишется в виде

$$\sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} \left\{ \int_0^t Z(0, t - \tau; \bar{A}^{(s)}(\tau)) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau + \int_0^t N_1^{(s)}(t, \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau \right\} = \psi_1(t), \quad (17)$$

$$\sum_{s=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} (\bar{A}^{(s)})^{-1}(t) \varphi^{(s)}(t) + (-1)^{s+1} \int_0^t N_2^{(s)}(t, \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau \right\} = \psi_2(t), \quad t \in [0, T]. \quad (18)$$

Пусть

$$M^{(s)}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-y^2 \bar{A}^{(s)}(\tau)\} dy, \quad s = 1, 2, \quad (19)$$

и

$$I^{1/2} \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

В силу обозначения (7) имеем

$$Z(0, t - \tau; \bar{A}^{(s)}(\tau)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} M^{(s)}(\tau), \quad s = 1, 2,$$

поэтому уравнение (17) может быть записано в виде

$$\sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} \left\{ \frac{1}{2} I^{1/2} (M^{(s)} \varphi^{(s)})(t) + \int_0^t N_1^{(s)}(t, \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau \right\} = \psi_1(t), \quad t \in [0, T].$$

Обозначим

$$H_k^{(s)} \varphi^{(s)}(t) = \int_0^t N_k^{(s)}(t, \tau) \varphi^{(s)}(\tau) d\tau, \quad s = 1, 2, \quad k = 1, 2, \quad t \in [0, T],$$

и запишем систему (17), (18) в операторном виде

$$\sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} \left\{ \frac{1}{2} I^{1/2} (M^{(s)} \varphi^{(s)}) + H_1^{(s)} \varphi^{(s)} \right\} = \psi_1, \quad (20)$$

$$\sum_{s=1}^2 \{ (2\bar{A}^{(s)})^{-1} \varphi^{(s)} + (-1)^{s+1} H_2^{(s)} \varphi^{(s)} \} = \psi_2. \quad (21)$$

Лемма 2.1. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда операторы $H_1^{(s)}$, $s = 1, 2$, являются ограниченными операторами из $C[0, T]$ в $H_0^{1/2+\omega}[0, T]$, $\omega = \tilde{\omega}_0 + \omega_1$.

Доказательство. Достаточно доказать оценки

$$|H_1^{(s)} \varphi(t)| \leq C \|\varphi\|^0 t^{1/2} \omega(t^{1/2}), \quad (22)$$

$$|\Delta_t H_1^{(s)} \varphi(t)| \leq C \|\varphi\|^0 (\Delta t)^{1/2} \omega((\Delta t)^{1/2}), \quad (23)$$

$t, t + \Delta t \in [0, T]$, $\Delta t > 0$, $s = 1, 2$, $\|\varphi\|^0 = \|\varphi; [0, T]\|^0$.

Докажем неравенство (22). В силу условия (2) и оценки (10) имеем

$$|Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \bar{A}^{(s)}(\tau)) - Z(0, t - \tau; \bar{A}^{(s)}(\tau))| \leq C(t - \tau)^{-1/2} \omega_1((t - \tau)^{1/2}),$$

откуда, с учётом (9),

$$|N_1^{(s)}(t, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-1/2} \omega((t - \tau)^{1/2}), \quad (24)$$

и, следовательно,

$$|H_1^{(s)} \varphi(t)| \leq C \|\varphi\|^0 \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \omega((t - \tau)^{1/2}) d\tau \leq C \|\varphi\|^0 t^{1/2} \omega(t^{1/2}), \quad s = 1, 2.$$

Неравенство (23) в силу оценки (22) достаточно доказать в случае $0 < \Delta t < t$. Положим

$$\begin{aligned} \Delta_t H_k^{(s)} \varphi(t) &= \sum_{j=0}^1 (-1)^{j+1} \int_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t} N_k^{(s)}(t + j\Delta t, \tau) \varphi(\tau) d\tau + \int_0^{t-\Delta t} [\Delta_t N_k^{(s)}(t, \tau)] \varphi(\tau) d\tau \equiv \\ &\equiv R_{k,1}^{(s)}(t) - R_{k,0}^{(s)}(t) + R_{k,2}^{(s)}(t), \quad k = 1, 2, \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (25)$$

Из неравенства (24) вытекает оценка для $R_{1,j}^{(s)}(t)$ при $j = 0, 1$ и $s = 1, 2$:

$$|R_{1,j}^{(s)}(t)| \leq C \|\varphi\|^0 \int_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t} (t + j\Delta t - \tau)^{-1/2} \omega((t + j\Delta t - \tau)^{1/2}) d\tau \leq C \|\varphi\|^0 (\Delta t)^{1/2} \omega((\Delta t)^{1/2}).$$

Рассмотрим функцию $R_{1,2}^{(s)}(t)$. Из представления (см. [18])

$$\partial_x Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \overline{A}^{(s)}(\tau)) = -\frac{g(t) - g(\tau)}{2(t - \tau)} (\overline{A}^{(s)})^{-1}(\tau) Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \overline{A}^{(s)}(\tau)), \quad (26)$$

теоремы о среднем и неравенств (2), (10) следует, что

$$\begin{aligned} & |\Delta_t [Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \overline{A}^{(s)}(\tau)) - Z(0, t - \tau; \overline{A}^{(s)}(\tau))]| \leq \\ & \leq C\omega_1((t - \tau)^{1/2})[(\Delta t)^{1/2}(t - \tau)^{-1}\omega_1((\Delta t)^{1/2}) + \Delta t(t - \tau)^{-3/2}], \quad \Delta t \leq t - \tau. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (11) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} |\Delta_t N_1^{(s)}(t, \tau)| & \leq C\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t - \tau)^{-1}\omega_1((t - \tau)^{1/2}) + \\ & + \Delta t(t - \tau)^{-3/2}\omega((t - \tau)^{1/2})\}, \quad \Delta t \leq t - \tau, \end{aligned}$$

вследствие которого получаем

$$\begin{aligned} |R_{1,2}^{(s)}(t)| & \leq C\left\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})\tilde{\omega}_1(T^{1/2}) + (\Delta t)^{1-\varepsilon_0/2}\tilde{\omega}_0((\Delta t)^{1/2}) \int_0^{t-\Delta t} (t - \tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2} d\tau + \right. \\ & \left. + (\Delta t)^{1-\varepsilon_1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2}) \int_0^{t-\Delta t} (t - \tau)^{-(3-\varepsilon_1)/2} d\tau\right\} \|\varphi\|^0 \leq C\|\varphi\|^0 (\Delta t)^{1/2}\omega((\Delta t)^{1/2}), \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда операторы $H_2^{(s)}$, $s = 1, 2$, являются ограниченными операторами из $C[0, T]$ в $H_0^{\tilde{\omega}}[0, T]$, $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из оценок

$$|H_2^{(s)}\varphi(t)| \leq C\|\varphi\|^0 \tilde{\omega}(t^{1/2}), \quad (27)$$

$$|\Delta_t H_2^{(s)}\varphi(t)| \leq C\|\varphi\|^0 \tilde{\omega}((\Delta t)^{1/2}), \quad (28)$$

$t, t + \Delta t \in [0, T]$, $s = 1, 2$, $\Delta t > 0$.

Докажем неравенство (27). В силу представления (6) имеем

$$N_2^{(s)}(t, \tau) = \partial_x Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \overline{A}^{(s)}(\tau)) + \partial_x W^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau), \quad s = 1, 2.$$

Из неравенств (2), (10) и представления (26) следует оценка

$$|\partial_x Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \overline{A}^{(s)}(\tau))| \leq C\omega_1((t - \tau)^{1/2})(t - \tau)^{-1},$$

которая вместе с неравенством (9) даёт оценку

$$|N_2^{(s)}(t, \tau)| \leq C\omega((t - \tau)^{1/2})(t - \tau)^{-1}, \quad s = 1, 2, \quad (29)$$

и, следовательно,

$$|H_2^{(s)}\varphi(t)| \leq C\|\varphi\|^0 \int_0^t \omega((t - \tau)^{1/2})(t - \tau)^{-1} d\tau \leq C\|\varphi\|^0 \tilde{\omega}(t^{1/2}), \quad s = 1, 2.$$

Неравенство (28) для $s = 1, 2$ доказываем с помощью представления (25). При этом в силу оценки (27) можно считать, что $0 < \Delta t < t$. Из (29) вытекает, что при $s = 1, 2$, $j = 0, 1$ справедлива оценка

$$|R_{2,j}^{(s)}(t)| \leq C\|\varphi\|^0 \int_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t} \omega((t+j\Delta t-\tau)^{1/2})(t+j\Delta t-\tau)^{-1} d\tau \leq C\|\varphi\|^0 \tilde{\omega}((\Delta t)^{1/2}).$$

Рассмотрим $R_{2,2}^{(s)}(t)$. Используя соотношения (2), (10) и (26), получаем

$$|\Delta t \partial_x Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; \bar{A}^{(s)}(\tau))| \leq C[(\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2})(t - \tau)^{-3/2} + (\Delta t) \omega_1((t - \tau)^{1/2})(t - \tau)^{-2}] \leq C(\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2})(t - \tau)^{-3/2}, \quad 0 < \Delta t < t - \tau, \quad s = 1, 2.$$

Вместе с неравенством (11) это даёт оценку

$$|R_{2,2}^{(s)}(t)| \leq C\|\varphi\|^0 \left\{ (\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}) \int_0^{t-\Delta t} (t - \tau)^{-3/2} d\tau + (\Delta t)^{(1-\varepsilon_0)/2} \tilde{\omega}_0((\Delta t)^{1/2}) \int_0^{t-\Delta t} (t - \tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2} d\tau \right\} \leq C\|\varphi\|^0 \omega((\Delta t)^{1/2}), \quad s = 1, 2.$$

Приведём известные результаты для дальнейшего исследования полученной системы интегральных уравнений.

Лемма 2.3 [15]. Пусть ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (1). Тогда $\partial^{1/2}$ – ограниченный оператор из $H_0^{1/2+\omega}[0, T]$ в $H_0^{\tilde{\omega}}[0, T]$.

Следуя А.Н. Тихонову [19], назовём оператор $K : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ вольтерровым, если для любого $t \in [0, T]$ из равенства $\varphi_1 = \varphi_2$ на $[0, t]$ следует, что $K\varphi_1 = K\varphi_2$ на $[0, t]$.

Лемма 2.4 [12]. Пусть $K : C[0, T] \rightarrow H_0^{\omega}[0, T]$ – линейный ограниченный вольтерров оператор, где ω – модуль непрерывности. Тогда для любой (вектор-)функции $\psi \in C[0, T]$ уравнение $\varphi + K\varphi = \psi$ имеет единственное решение $\varphi \in C[0, T]$ и справедлива оценка $\|\varphi; [0, T]\|^0 \leq C\|\psi; [0, T]\|^0$ с некоторой положительной постоянной C .

Основным результатом этого пункта работы является

Лемма 2.5. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для любых (вектор-)функций $\psi_1 \in C_0^{1/2}[0, T]$ и $\psi_2 \in C_0[0, T]$ система (13), (14) имеет единственное решение $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) \in C_0[0, T] \times C_0[0, T]$ и для него справедливы оценки

$$\|\varphi^{(s)}; [0, T]\|^0 \leq C(\|\psi_1; [0, T]\|^{1/2} + \|\psi_2; [0, T]\|^0), \quad s = 1, 2. \quad (30)$$

Доказательство. Как показано выше, система (13), (14) может быть записана в виде системы (20), (21). Применяя к обеим частям векторного уравнения (20) оператор дробного дифференцирования $\partial^{1/2}$, получаем в силу лемм 2.1–2.3 и равенств $\partial^{1/2} I^{1/2} \varphi = \varphi$, $I^{1/2} \partial^{1/2} \psi = \psi$, справедливых для любых $\varphi \in C[0, T]$ и $\psi \in C^{1/2}[0, T]$, следующую систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода, эквивалентную для $\varphi^{(s)} \in C[0, T]$ системе (20), (21):

$$\sum_{s=1}^2 [(-1)^{s+1} M^{(s)} \varphi^{(s)} + K_1^{(s)} \varphi^{(s)}] = 2\partial^{1/2} \psi_1, \quad (31)$$

$$\sum_{s=1}^2 [(\bar{A}^{(s)})^{-1} \varphi^{(s)} + K_2^{(s)} \varphi^{(s)}] = 2\psi_2, \quad (32)$$

где $K_1^{(s)} = (-1)^{s+1} 2\partial^{1/2} H_1^{(s)}$, $K_2^{(s)} = (-1)^{s+1} 2H_2^{(s)}$, $s = 1, 2$.

Положим

$$A(t) = \begin{pmatrix} M^{(1)} & -M^{(2)} \\ (\overline{A}^{(1)})^{-1} & (\overline{A}^{(2)})^{-1} \end{pmatrix} (t), \quad t \in [0, T],$$

и докажем, что $\det A(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$. В самом деле, пусть $t_0 \in [0, T]$ фиксировано, $A = A(t_0)$, $A^{(s)} = \overline{A}^{(s)}(t_0)$, $M^{(s)} = M^{(s)}(t_0)$, $s = 1, 2$, и

$$Q(p) = \begin{pmatrix} M^{(1)}/\sqrt{p} & -M^{(2)}/\sqrt{p} \\ (A^{(1)})^{-1} & (A^{(2)})^{-1} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Достаточно проверить, что $\det Q(p) \neq 0$, $\operatorname{Re} p > 0$. Известны оценки (см. [20, с. 299])

$$|\exp\{-t(pE + A^{(s)}\sigma^2)\}| \leq C(1 + t^{1/4} + t^{1/4}|\sigma|)^{8(m-1)} \exp\{-ct(1 + \sigma^2)\}, \quad (33)$$

$t \geq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $s = 1, 2$, где C и c – некоторые положительные постоянные, E – единичная матрица. В [21, с. 354] доказано, что

$$\det(pE + A^{(s)}\sigma^2) \neq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad s = 1, 2. \quad (34)$$

Вследствие обозначения (19) и соотношений (33), (34) с использованием теоремы Коши (см. [21, с. 357]) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p}} M^{(s)} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-tA^{(s)}\sigma^2\} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} 2 \exp\{-t(pE + A^{(s)}\sigma^2)\} d\sigma = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} d\sigma \int_0^{+\infty} 2(pE + A^{(s)}\sigma^2)^{-1} \partial_t \exp\{-t(pE + A^{(s)}\sigma^2)\} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (pE + A^{(s)}\sigma^2)^{-1} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma^+} (pE + A^{(s)}\sigma^2)^{-1} d\sigma, \end{aligned} \quad (35)$$

$\operatorname{Re} p > 0$, $s = 1, 2$, где γ^+ – простой замкнутый контур, лежащий целиком в положительной полуплоскости и охватывающий корни уравнений $\det(pE + A^{(s)}\sigma^2)$, $s = 1, 2$, имеющие положительные мнимые части.

Кроме того, известны равенства (см. [21, с. 357])

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma^+} \sigma (pE + A^{(s)}\sigma^2)^{-1} d\sigma = (A^{(s)})^{-1}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad s = 1, 2.$$

Отсюда и из представления (35) следует, что

$$Q(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma^+} (pE + A^{(1)}\sigma^2)^{-1} d\sigma & -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma^+} (pE + A^{(2)}\sigma^2)^{-1} d\sigma \\ \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma^+} \sigma (pE + A^{(1)}\sigma^2)^{-1} d\sigma & \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma^+} \sigma (pE + A^{(2)}\sigma^2)^{-1} d\sigma \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Условие $\det Q(p) \neq 0$, $\operatorname{Re} p > 0$, совпадает (см. [1, с. 694–700]) с условием однозначной разрешимости следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L(d/dx, p)v &= 0, \quad x > 0, \\ (B(d/dx)v)(x, p)|_{x=0} &= 0, \\ |v(x, p)| &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

где

$$L(d/dx, p) = pE + \hat{A} d^2/dx^2, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & 0 \\ 0 & A^{(2)} \end{pmatrix}, \quad B(d/dx) = \begin{pmatrix} E & -E \\ E d/dx & E d/dx \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

и равносильным образом может быть сформулировано в виде (см. [1, с. 700]): строки матрицы

$$\hat{Q}(p) = \begin{pmatrix} P^{(1)}(\sigma)(pE + A^{(1)}\sigma^2)^{-1} & -P^{(2)}(\sigma)(pE + A^{(2)}\sigma^2)^{-1} \\ i\sigma P^{(1)}(\sigma)(pE + A^{(1)}\sigma^2)^{-1} & i\sigma P^{(2)}(\sigma)(pE + A^{(2)}\sigma^2)^{-1} \end{pmatrix},$$

где $P^{(s)}$, $s = 1, 2$, – полиномы по σ , корни которых совпадают соответственно с корнями уравнений $\det(pE + A^{(s)}\sigma^2)$, $s = 1, 2$, имеющими отрицательную мнимую часть, линейно независимы как полиномы по σ при $\operatorname{Re} p > 0$. Так как это условие для $\hat{Q}$, очевидно, выполнено, то, следовательно, $\det Q(p) \neq 0$, $\operatorname{Re} p > 0$.

Введём обозначения

$$K = \begin{pmatrix} K_1^{(1)} & K_1^{(2)} \\ K_2^{(1)} & K_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ \varphi^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 2\partial^{1/2}\psi_1 \\ 2\psi_2 \end{pmatrix}$$

и запишем систему (31), (32) в виде векторного уравнения

$$\varphi + \hat{K}\varphi = \hat{\psi}, \tag{36}$$

где оператор $\hat{K}$ действует по правилу:

$$(\hat{K}\varphi)(t) = A^{-1}(t)(K\varphi)(t), \quad \varphi \in C[0, T], \quad \hat{\psi}(t) = A^{-1}(t)\psi(t).$$

В силу лемм 2.1–2.3 $\hat{K} : C[0, T] \rightarrow H_0^{\tilde{\omega}}[0, T]$ – линейный ограниченный вольтерров оператор, и по лемме 2.4 уравнение (36) имеет единственное решение $\varphi \in C[0, T]$, причём выполнена оценка $\|\varphi; [0, T]\|^0 \leq C\|\psi; [0, T]\|^0$. Следовательно, справедлива оценка (30). Кроме того, из вида уравнений (31), (32), условий на ψ_1 , ψ_2 и лемм 2.1–2.3 следует, что $\varphi^{(s)}(0) = 0$, $s = 1, 2$.

3. Доказательство теоремы. Решение задачи (3)–(5) ищем в виде потенциалов простого слоя (12), где (вектор-)плотности $\varphi^{(s)} \in C[0, T]$, $s = 1, 2$, подлежат определению. Для любых $\varphi^{(s)} \in C[0, T]$, $s = 1, 2$, (вектор-)функции $u^{(s)}$, $s = 1, 2$, являются регулярными решениями уравнений (3) и удовлетворяют начальным условиям (4). Подставляя представления (12) в условия сопряжения (5), получаем для нахождения неизвестных (вектор-)плотностей $\varphi^{(s)}$, $s = 1, 2$, систему интегральных уравнений Вольтерры (13), (14). Из леммы 2.5 следует, что система (13), (14) имеет единственное решение $\varphi^{(s)} \in C_0[0, T]$, $s = 1, 2$. Поэтому существует решение задачи (3)–(5), которое имеет вид (12), где $\varphi^{(s)}$, $s = 1, 2$, – решение системы (13), (14). Из результатов работы [13] о свойствах потенциала простого слоя и оценок (30) следует, что найденные решения принадлежат классам $C_0^{1,0}(\overline{\Omega}^{(s)})$, $s = 1, 2$, и выполнены оценки (15). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору Е.А. Бадерко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
2. *Житарашу Н.В.* Шаудеровские оценки и разрешимость общих краевых задач для общих параболических систем с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169. № 3. С. 511–513.
3. *Эйдельман С.Д., Ивасишен С.Д.* Матрица Грина однородной параболической граничной задачи для систем с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 4. С. 797–800.
4. *Дринь М.М., Ивасишен С.Д.* Матрица Грина общей граничной задачи для параболической по И.Г. Петровскому системы с разрывными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 11. С. 7–10.
5. *Лазтин Ю.М., Коган Я.Д., Шлис Г.И., Бёмер З.* Теория и технология азотирования. М., 1992.
6. *Mittemeijer E., Somers M.A.J.* Thermodynamics, kinetics, and process control of nitriding // Surface Engineering. 1997. V. 13. № 6. P. 483–497.
7. *Ratajski J.* Model of growth kinetics of nitrided layer in the binary Fe–N system, nitriding technology. Theorie & practice // Proc. the 9th Intern. Seminar. Warsaw, 2003. P. 149–159.
8. *Камынин Л.И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. № 4. С. 806–834.
9. *Шевелева В.Н.* Об одной задаче контактной теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 172–174.
10. *Шевелева В.Н.* Об одной задаче контактной теплопроводности. II // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 4. С. 729–730.
11. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
12. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
13. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Bitsadze–Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 753–765.
14. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
15. *Камынин Л.И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
16. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 7. С. 1–72.
17. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНТИ РАН. 16.04.92. № 1294-B92.
18. *Тверитинов В.А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка // Деп. ВИНТИ АН СССР. 02.09.88. № 6850-B88.
19. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 8. С. 1–25.
20. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
21. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 14.09.2020 г.
После доработки 14.09.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.