ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 507–525

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:539.3

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ПОЛОГИХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО С НЕЗАКРЕПЛЁННЫМИ КРАЯМИ

© 2021 г. С. Н. Тимергалиев

Изучается разрешимость нелинейной краевой задачи для системы пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при заданных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих пологих неоднородных анизотропных оболочек с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко. Краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в соболевском пространстве, разрешимость которого устанавливается с использованием принципа сжатых отображений.

DOI: 10.31857/S0374064121040063

1. Постановка задачи. В плоской односвязной ограниченной области Ω рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$T^{j\lambda}_{\alpha^\lambda} + R^j = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$T^{\lambda 3}_{\alpha^\lambda} + k_\lambda T^{\lambda\lambda} + (T^{\lambda\mu} w_{3\alpha^\mu})_{\alpha^\lambda} + R^3 = 0,$$

$$M^{j\lambda}_{\alpha^\lambda} - T^{j3} + L^j = 0, \quad j = 1, 2, \tag{1}$$

при выполнении на границе Γ области Ω условий

$$T^{j1}\, d\alpha^2/ds - T^{j2}\, d\alpha^1/ds = P^j(s), \quad j = 1, 2,$$

$$T^{13}\, d\alpha^2/ds - T^{23}\, d\alpha^1/ds + T^{11} w_{3\alpha^1}\, d\alpha^2/ds - T^{22} w_{3\alpha^2}\, d\alpha^1/ds +$$

$$+ T^{12}(w_{3\alpha^2}\, d\alpha^2/ds - w_{3\alpha^1}\, d\alpha^1/ds) = P^3(s),$$

$$M^{j1}\, d\alpha^2/ds - M^{j2}\, d\alpha^1/ds = N^j(s), \quad j = 1, 2. \tag{2}$$

В (1), (2) и ниже используются следующие обозначения:

$$T^{ij} \equiv T^{ij}(\gamma^0) = D_0^{ijkn}\gamma^0_{kn}, \quad M^{ij} \equiv M^{ij}(\gamma^1) = D_2^{ijkn}\gamma^1_{kn}, \quad i, j, k, n = \overline{1, 3},$$

$$\gamma^l = (\gamma^l_{11}, \gamma^l_{12}, \gamma^l_{13}, \gamma^l_{22}, \gamma^l_{23}, \gamma^l_{33}), \quad l = 0, 1;$$

$$D_m^{ijkn} = D_m^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2) = \int\limits_{-h_0/2}^{h_0/2} B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)(\alpha^3)^m\, d\alpha^3, \quad m = 0, 2, \quad i, j, k, n = \overline{1, 3};$$

$$\gamma^0_{jj} = w_{j\alpha^j} - k_j w_3 + w^2_{3\alpha^j}/2 \quad (j = 1, 2), \quad \gamma^0_{12} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} + w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^2}, \quad \gamma^1_{jj} = \psi_{j\alpha^j} \quad (j = 1, 2),$$

$$\gamma^1_{12} = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1}, \quad \gamma^0_{j3} = w_{3\alpha^j} + \psi_j \quad (j = 1, 2), \quad \gamma^0_{33} = \gamma^1_{k3} \equiv 0 \quad (k = \overline{1, 3}), \tag{3}$$

$B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ – известные функции трёх переменных, $\alpha^j = \alpha^j(s)$ $(j = 1, 2)$ – уравнения кривой Γ, s – длина дуги Γ; нижний индекс α^λ в (1)–(3) и далее означает дифференцирование по α^λ, $\lambda = 1, 2$.

Система (1) совместно с граничными условиями (2) описывает состояние равновесия упругой пологой анизотропной неоднородной оболочки с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко [1, с. 168–170, 269], отнесённой к декартовой системе координат. При этом: T^{ij} – усилия, M^{ij} – моменты; γ_{ij}^l $(i,j=\overline{1,3},\ l=0,1)$ – компоненты деформаций срединной поверхности S_0 оболочки, отождествляемой с областью Ω; w_j $(j=1,2)$ и w_3 – соответственно тангенциальные и нормальное перемещения точек поверхности S_0; ψ_i $(i=1,2)$ – углы поворота нормальных сечений поверхности S_0; R^j, P^j $(j=\overline{1,3})$, L^k, N^k $(k=1,2)$ – компоненты внешних сил, действующих на оболочку; $B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ $(i,j,k,n=\overline{1,3})$ – упругие характеристики оболочки; $k_j=k_j(\alpha^j)$ $(j=1,2)$ – главные кривизны; $h_0=\mathrm{const}$ – толщина оболочки; α^1, α^2 – декартовы координаты точек области Ω.

В (1)–(3) и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам ведётся суммирование от 1 до 3, по повторяющимся греческим индексам – от 1 до 2.

Задача (1), (2). Требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям (2).

Необходимо отметить, что к настоящему времени достаточно полно изучена разрешимость системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей состояние равновесия оболочек в рамках простейшей модели Кирхгофа–Лява [2–5]. Вопросы существования решений нелинейных задач в рамках более сложных моделей теории оболочек, не опирающихся на гипотезы Кирхгофа–Лява, вошли в известный список нерешённых проблем математической теории оболочек [2, с. 349]. В настоящее время имеется ряд работ [6–12], в которых в рамках сдвиговой модели Тимошенко исследована разрешимость и доказаны теоремы существования обобщённых решений в соболевских пространствах нелинейных задач для пологих изотропных оболочек с незакреплёнными и шарнирно-опёртыми краями. В основе исследований в [6–12] лежат интегральные представления для обобщённых перемещений, содержащие произвольные голоморфные функции, которые находятся таким образом, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли заданным граничным условиям. Построение интегральных представлений является одним из существенных моментов этого метода исследования.

В настоящей статье метод работ [6–12] развивается на случай пологих неоднородных анизотропных оболочек типа Тимошенко с незакреплёнными краями, который описывается более общей системой нелинейных дифференциальных уравнений, что существенно усложняет исследование краевой задачи.

Краевую задачу (1), (2) будем изучать в обобщённой постановке. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(a) квадратичная форма $B^{ijkn}\gamma_{ij}\gamma_{kn}$ положительно определена во всём объёме, занятом оболочкой;

(b) упругие характеристики $B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ – чётные функции по переменной α^3 на отрезке $[-h_0/2,h_0/2]$, и имеют место включения $B^{ijkn}\in W_p^{(1)}(\Omega)\times L_1[-h_0/2,h_0/2]$ $(i,j,k,n=\overline{1,3})$ и $B^{1111},B^{1212},B^{1313}\in C_\beta(\overline{\Omega})\times L_1[-h_0/2,h_0/2]$;

(c) $k_j\in W_p^{(1)}(\Omega)$ $(j=1,2)$;

(d) компоненты внешних сил R^j $(j=\overline{1,3})$ и L^k $(k=1,2)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, а компоненты P^j $(j=\overline{1,3})$ и N^k $(k=1,2)$ – пространству $C_\beta(\Gamma)$;

(e) Ω – произвольная односвязная область с границей $\Gamma\in C_\beta^1$.

Здесь и везде далее $2<p<4/(2-\beta)$, $0<\beta<1$.

Определение. Назовём вектор обобщённых перемещений $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$ *обобщённым решением* задачи (1), (2), если a принадлежит пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$ и почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничным условиям (2).

Здесь $W_p^{(i)}(\Omega)$ $(i=1,2)$ – пространства Соболева. В силу теорем вложения для соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p>2$ обобщённое решение a принадлежит пространству $C_\alpha^1(\overline{\Omega})$. Здесь и везде далее $\alpha=(p-2)/p$. Заметим, что при $2<p<4/(2-\beta)$ справедливо неравенство $\alpha<\beta/2$.

2. Построение интегральных представлений для обобщённых перемещений. Введём в рассмотрение две комплексные функции:

$$\omega_j = \omega_j(z) = D^{1111}_{n_j}(\nu_{j1\alpha^1} + \nu_{j2\alpha^2}) + iD^{1212}_{n_j}(\nu_{j2\alpha^1} - \nu_{j1\alpha^2}), \quad n_j = 2(j-1),$$

$$\nu_{1j} = w_j, \quad \nu_{2j} = \psi_j, \quad j = 1,2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2. \tag{4}$$

В системе (1) усилия T^{jk}, моменты M^{jk} и компоненты деформаций γ^l_{jk} заменим их выражениями из (3). Прибавляя после этого к первому уравнению в (1) второе, умноженное на мнимую единицу i, а к четвёртому уравнению – пятое, умноженное также на i, систему (1) при помощи функций $\omega_j(z)$ из (4) представим в удобной для дальнейших исследований форме

$$\omega_{j\bar z} + h^j(a) = f^j(a) - F^j(z), \quad j = 1,2,$$

$$D^{1313}_0(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) + h^3(a) = f^3(a) - F^3(z), \quad z \in \Omega, \tag{5}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\omega_{j\bar z} = (\omega_{j\alpha^1} + i\omega_{j\alpha^2})/2, \quad j = 1,2, \quad f^j(a) = f^j_e(a) + f^j_\chi(a), \quad f^j_e(a) = f^j_s(a'') + f^j_c(a), \quad j = \overline{1,3},$$

$$h^j(a) = D^{1212}_{n_j\alpha^2}\nu_{j2\alpha^1} - D^{1212}_{n_j\alpha^1}\nu_{j2\alpha^2} + i(D^{1212}_{n_j\alpha^1}\nu_{j1\alpha^2} - D^{1212}_{n_j\alpha^2}\nu_{j1\alpha^1}) - (j-1)D^{1313}_0(\gamma^0_{13} + i\gamma^0_{23})/2,$$

$$n_j = 2(j-1), \quad j = 1,2, \quad h^3(a) = D^{1313}_{0\alpha^\lambda} w_{3\alpha^\lambda} + (D^{1313}_0\psi_\lambda)_{\alpha^\lambda};$$

$$f^{2j-1}_s(a'') = f^{\lambda\mu}_{2j-1k} w_{k\alpha^\lambda\alpha^\mu}, \quad j = 1,2, \quad f^2_s(a'') = f^{\lambda\mu}_{2\delta}\psi_{\delta\alpha^\lambda\alpha^\mu},$$

$$f^{jj}_{k1} = -iD^{12jj}_{n_k}/2, \quad 2f^{12}_{kj} = -i^{j-1}[D^{12jj}_{n_k} - i(-1)^j D_{n_k}/2], \quad j = 1,2,$$

$$f^{11}_{k2} = -D^{1112}_{n_k}/2, \quad f^{22}_{k2} = [i(D^{1111}_{n_k} - D^{2222}_{n_k}) - D^{1222}_{n_k}]/2, \quad k = 1,2;$$

$$f^{jj}_{13} = -(D^{1jj3}_0 + iD^{j2j3}_0)/2, \quad j = 1,2, \quad 2f^{12}_{13} = -i^{\lambda-1}(D^{1\lambda23}_0 + D^{2\lambda13}_0)/2;$$

$$f^{jj}_{3k} = D^{j3jk}_0, \quad j,k = 1,2, \quad 2f^{12}_{3j} = D^{231j}_0 + D^{13j2}_0, \quad j = \overline{1,3}, \quad f^{11}_{33} = 0, \quad f^{22}_{33} = D^{2323}_0 - D^{1313}_0,$$

$$D_{n_k} = D^{1122}_{n_k} - D^{1111}_{n_k} + 2D^{1212}_{n_k}, \quad n_k = 2(k-1), \quad k = 1,2;$$

$$f^j_c(a) = (-1/2)\{D^{12\lambda\lambda}_{n_j\alpha^2}\nu_{j\lambda\alpha^\lambda} + D^{1112}_{n_j\alpha^1}(\nu_{j1\alpha^2} + \nu_{j2\alpha^1}) + D_{n_j\alpha^1}\nu_{j2\alpha^2} + (2-j)[D^{1\mu\lambda3}_{0\alpha^\mu} w_{3\alpha^\lambda} -$$

$$- (D^{1\mu\lambda\lambda}_0 k_\lambda w_3)_{\alpha^\mu} + (D^{1\mu\lambda3}_0\psi_\lambda)_{\alpha^\mu}] + (j-1)[D^{13\lambda\lambda}_0 k_\lambda w_3 - D^{1323}_0\gamma^0_{23} - D^{13\lambda\lambda}_0 w_{\lambda\alpha^\lambda} -$$

$$- D^{1312}_0 e^0_{12}] + i\{D^{1\lambda\lambda2}_{n_j\alpha^1}\nu_{j\lambda\alpha^\lambda} + D^{1222}_{n_j\alpha^2}(\nu_{j1\alpha^2} + \nu_{j2\alpha^1}) + D_{n_j\alpha^2}\nu_{j1\alpha^1} + (D^{2222}_{n_j} - D^{1111}_{n_j})_{\alpha^2}\nu_{j2\alpha^2} +$$

$$+ (2-j)[D^{2\mu\lambda3}_{0\alpha^\mu} w_{3\alpha^\lambda} - (D^{2\mu\lambda\lambda}_0 k_\lambda w_3)_{\alpha^\mu} + (D^{2\mu\lambda3}_0\psi_\lambda)_{\alpha^\mu}] + (j-1)[D^{23\lambda\lambda}_0 k_\lambda w_3 -$$

$$- D^{1323}_0\gamma^0_{13} + (D^{1313}_0 - D^{2323}_0)\gamma^0_{23} - D^{23\lambda\lambda}_0 w_{\lambda\alpha^\lambda} - D^{2312}_0 e^0_{12}]\}\}, \quad j = 1,2,$$

$$f^3_c(a) = -\{D^{\lambda311}_{0\alpha^\lambda} w_{1\alpha^1} + D^{\lambda312}_{0\alpha^\lambda} e^0_{12} + D^{\lambda322}_{0\alpha^\lambda} w_{2\alpha^2} + D^{1323}_{0\alpha^\lambda} w_{3\alpha^{3-\lambda}} + (D^{2323}_0 - D^{1313}_0)_{\alpha^2} w_{3\alpha^2} +$$

$$+ (D^{1323}_0\psi_\lambda)_{\alpha^{3-\lambda}} + [(D^{2323}_0 - D^{1313}_0)\psi_2]_{\alpha^2} - (D^{\lambda3\mu\mu}_0 k_\mu w_3)_{\alpha^\lambda} + k_\lambda T^{\lambda\lambda}(e^0)\};$$

$$f^1_\chi(a) = (-1/2)[T^{1\lambda}_{\alpha^\lambda}(\chi^0) + iT^{2\lambda}_{\alpha^\lambda}(\chi^0)], \quad f^2_\chi(a) = [T^{13}(\chi^0) + iT^{23}(\chi^0)]/2,$$

$$f^3_\chi(a) = -T^{\lambda3}_{\alpha^\lambda}(\chi^0) - k_\lambda T^{\lambda\lambda}(\chi^0) - (T^{\lambda\mu} w_{3\alpha^\mu})_{\alpha^\lambda}; \quad F^1 = (R^1 + iR^2)/2,$$

$$F^2 = (L^1 + iL^2)/2, \quad F^3 = R^3; \quad e^0 = (e^0_{11}, e^0_{12}, e^0_{22}), \quad \chi^0 = (\chi^0_{11}, \chi^0_{12}, \chi^0_{22}); \tag{6}$$

через e^0_{jk} и χ^0_{jk} обозначены соответственно линейные и нелинейные части компонент деформации γ^0_{jk}, т.е. $\gamma^0_{jk} = e^0_{jk} + \chi^0_{jk}$, $j,k = 1,2$; a'' – 15-мерный вектор, компонентами которого являются частные производные второго порядка обобщённых перемещений $w_{j\alpha^\lambda\alpha^\mu}$, $\psi_{k\alpha^\lambda\alpha^\mu}$, $j = \overline{1,3}$, $k,\lambda,\mu = 1,2$.

Аналогично, граничные условия (2) запишем в виде

$$\mathrm{Re}\,[(-1)^{j-1}i^j t'\omega_1(t)] + 2(-1)^{j-1}D_0^{1212}w_{3-j\alpha^\lambda}\,d\alpha^\lambda/ds = \varphi_j(a)(t) - P^j(s), \quad j=1,2,$$

$$D_0^{1313}[(w_{3\alpha^2}+\psi_2)\,d\alpha^1/ds - (w_{3\alpha^1}+\psi_1)\,d\alpha^2/ds] = \varphi_3(a)(t) - P^3(s),$$

$$\mathrm{Re}\,[(-1)^{j-1}i^j t'\omega_2(t)] + 2(-1)^{j-1}D_2^{1212}\psi_{3-j\alpha^\lambda}\,d\alpha^\lambda/ds = \varphi_{3+j}(a)(t) - N^j(s), \quad j=1,2, \quad t\in\Gamma, \tag{7}$$

где

$$\varphi_j(a)(t) = \varphi_{je}(a)(t) + \varphi_{j\chi}(a)(t), \quad j=\overline{1,5};$$

$$\varphi_{je}(a)(t) = (-1)^{j-1}[D_0^{12jj}e_{12}^0 + D_0 w_{3-j\alpha^{3-j}} + D_0^{jj\lambda3}\gamma_{\lambda3}^0 - D_0^{jj\lambda\lambda}k_\lambda w_3 +$$

$$+ (j-1)(D_0^{2222} - D_0^{1111})w_{2\alpha^2}]\,d\alpha^{3-j}/ds + (-1)^j(D_0^{12\lambda\lambda}e_{\lambda\lambda}^0 + D_0^{12\lambda3}\gamma_{\lambda3}^0)\,d\alpha^j/ds, \quad j=1,2,$$

$$\varphi_{3+je}(a)(t) = (-1)^{j-1}[D_2^{12jj}\gamma_{12}^1 + D_2\psi_{3-j\alpha^{3-j}} + (j-1)(D_2^{2222} - D_2^{1111})\psi_{2\alpha^2}]\,d\alpha^{3-j}/ds +$$

$$+ (-1)^j D_2^{1\lambda\lambda2}\psi_{\lambda\alpha^\lambda}\,d\alpha^j/ds, \quad j=1,2, \quad \varphi_{3e}(a)(t) = (-1)^{\mu-1}(D_0^{\mu3\lambda\lambda}e_{\lambda\lambda}^0 + D_0^{\mu312}e_{12}^0)\,d\alpha^{3-\mu}/ds +$$

$$+ (-1)^\mu D_0^{1323}\gamma_{\mu3}^0\,d\alpha^\mu/ds - (D_0^{2323} - D_0^{1313})\gamma_{23}^0\,d\alpha^1/ds;$$

$$\varphi_{j\chi}(a)(t) = T^{j1}(\chi^0)\,d\alpha^2/ds - T^{j2}(\chi^0)\,d\alpha^1/ds, \quad j=1,2,$$

$$\varphi_{3\chi}(a)(t) = T^{13}(\chi^0)\,d\alpha^2/ds - T^{23}(\chi^0)\,d\alpha^1/ds + T^{11}w_{3\alpha^1}\,d\alpha^2/ds -$$

$$- T^{22}w_{3\alpha^2}\,d\alpha^1/ds + T^{12}(w_{3\alpha^2}\,d\alpha^2/ds - w_{3\alpha^1}\,d\alpha^1/ds), \quad \varphi_{3+j\chi}(a)(t) = 0, \quad j=1,2; \tag{8}$$

T^{jk}, $T^{jk}(\chi^0)$ определены в (3).

В основе исследования системы уравнений (5) с граничными условиями (7) лежат интегральные представления для обобщённых перемещений w_j $(j=\overline{1,3})$, ψ_k $(k=1,2)$. Для их вывода рассмотрим уравнения

$$\omega_{j\bar z} = \rho^j \quad (j=1,2), \quad D_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) = \rho^3, \tag{9}$$

где $\rho^1 = \rho_1 + i\rho_2$, $\rho^2 = \rho_4 + i\rho_5$, $\rho^3 = \rho_3$ – произвольно фиксированные функции, принадлежащие пространству $L_p(\Omega)$.

Первые два уравнения в (9) представляют собой неоднородные уравнения Коши–Римана. Их общие решения даются формулами [13, с. 29]

$$\omega_j(z) = \Phi_j(z) + T\rho^j(z) \equiv \omega_j(\Phi_j;\rho^j)(z),$$

$$T\rho^j(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{\rho^j(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta, \quad j=1,2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{10}$$

где $\Phi_j(z)$ – произвольные голоморфные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\overline{\Omega})$.

Известно [13, с. 39–41, 46], что T – вполне непрерывный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$ и $C_\alpha^k(\overline{\Omega})$, отображающий их в пространства $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и $C_\alpha^{k+1}(\overline{\Omega})$ соответственно. Кроме того, существуют обобщённые производные

$$\frac{\partial Tf}{\partial \bar z} = f, \quad \frac{\partial Tf}{\partial z} \equiv Sf = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\xi\,d\eta, \tag{11}$$

где S – линейный ограниченный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$, $p>1$, и $C_\alpha^k(\overline{\Omega})$.

Представления (10) в свою очередь при помощи функций $\omega_1^0 = w_2 + iw_1$ и $\omega_2^0 = \psi_2 + i\psi_1$ запишем в виде неоднородных уравнений Коши–Римана

$$\omega_{j\bar z}^0 = i(d_{n_j}^1\omega_j + d_{n_j}^2\overline{\omega_j}) \equiv id_{n_j}[\omega_j], \quad j=1,2,$$

$$d_{n_j}^k = (1/D_{n_j}^{1111} + (-1)^k/D_{n_j}^{1212})/4, \quad n_j = 2(j-1), \quad j,k=1,2, \tag{12}$$

общие решения которых имеют вид

$$\omega_j^0(z) = \Psi_j(z) + iTd_{n_j}[\omega_j](z) \equiv \omega_j^0(\Psi_j;\omega_j)(z), \quad j=1,2, \tag{13}$$

где $\Psi_j(z)$ – произвольные голоморфные функции пространства $C_\alpha^1(\overline{\Omega})$.

Третье уравнение в (9) представим в виде

$$w_{3z\overline{z}} = \widetilde{\rho}_3/4, \quad \widetilde{\rho}_3 = \rho_3/D_0^{1313}, \quad w_{3z} = (w_{3\alpha^1} - iw_{3\alpha^2})/2,$$

откуда находим, что

$$w_3(z) = \operatorname{Re}\Psi_3(z) - \widetilde{T}\widetilde{\rho}_3 \equiv w_3(\Psi_3;\rho_3)(z), \quad \widetilde{T}\widetilde{\rho}_3 = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} \widetilde{\rho}_3(\zeta)\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\xi\, d\eta, \tag{14}$$

где $\Psi_3(z) \in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$ – произвольная голоморфная функция.

Соотношения (13), (14) представляют собой искомые интегральные представления для обобщённых перемещений. Для их частных производных первого порядка с учётом равенств (10), (11), (13), (14) несложно получить формулы

$$\nu_{jk\alpha^k} = \operatorname{Im}[\omega_{j\overline{z}}^0 - (-1)^k\omega_{jz}^0], \quad \nu_{jk\alpha^n} = \operatorname{Re}[\omega_{jz}^0 + (-1)^k\omega_{j\overline{z}}^0], \quad k\neq n, \quad j,k,n=1,2;$$

$$\omega_{jz}^0 = \Psi_j'(z) + iSd_{n_j}[\omega_j](z), \quad \nu_{1j} = w_j, \quad \nu_{2j} = \psi_j,$$

$$w_{3\alpha^j} = 2\operatorname{Re}(i^{j-1}w_{3z}), \quad j=1,2, \quad w_{3z} = \Psi_3'(z)/2 + T\widetilde{\rho}_3(z)/4; \tag{15}$$

$\omega_{j\overline{z}}^0$ $(j=1,2)$ определяются равенствами (12).

Дифференцируя равенство (12) по z и $\overline{z}$, равенство (13) дважды по z, используя при этом формулу (8.20) из [13, с. 58] и соотношения (11), для производных второго порядка функции ω_j^0 получаем представления

$$\omega_{j\overline{z}z}^0 = i(d_{n_jz}[\omega_j] + d_{n_j}[\omega_j]_z), \quad \omega_{j\overline{z}\overline{z}}^0 = i(d_{n_j\overline{z}}[\omega_j] + d_{n_j}[\omega_j]_{\overline{z}}), \quad n_j = 2(j-1),$$

$$\omega_{jzz}^0 = \Psi_j''(z) + iS(d_{n_j\zeta}[\omega_j] + d_{n_j}[\omega_j]_\zeta)(z) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{d_{n_j}[\omega_j](\tau)}{(\tau-z)^2}\,d\overline{\tau},$$

$$w_{3zz} = \Psi_3''(z)/2 + S\widetilde{\rho}_3(z)/4, \quad w_{3z\overline{z}} = \widetilde{\rho}_3/4; \quad d_{n_jz}[\omega_j] = d_{n_jz}^1\omega_j + d_{n_jz}^2\overline{\omega_j},$$

$$d_{n_j}[\omega_j]_z = d_{n_j}^1\omega_{jz} + d_{n_j}^2\overline{\omega_{j\overline{z}}}, \quad d_{n_j}[\omega_j]_{\overline{z}} = d_{n_j}^1\omega_{j\overline{z}} + d_{n_j}^2\overline{\omega_{jz}}, \quad j=1,2; \tag{16}$$

где функции ω_j, $d_{n_j}[\omega_j]$, $\omega_{j\overline{z}}$, ω_{jz} определены в (10), (12), (15).

Производные второго порядка обобщённых перемещений выражаются через функции $\omega_{jz\overline{z}}^0$, $\omega_{j\overline{z}\overline{z}}^0$, ω_{jzz}^0 по формулам

$$\nu_{kn\alpha^j\alpha^j} = -\operatorname{Re}\{i^n[\omega_{kz\overline{z}}^0 + (-1)^j(\omega_{kzz}^0 + \omega_{k\overline{z}\overline{z}}^0)]\} \equiv P_{kn}^{jj}(\omega_k^0), \nu_{kn\alpha^1\alpha^2} = \operatorname{Re}\{i^{n-1}(\omega_{kzz}^0 - \omega_{k\overline{z}\overline{z}}^0)\} \equiv$$

$$\equiv P_{kn}^{12}(\omega_k^0), \quad k,n,j=1,2; \quad w_{3\alpha^j\alpha^j} = 2[w_{3z\overline{z}} + (-1)^{j-1}\operatorname{Re}w_{3zz}] \equiv P_{13}^{jj}(w_3), \quad j=1,2,$$

$$w_{3\alpha^1\alpha^2} = -2\operatorname{Im}w_{3zz} \equiv P_{13}^{12}(w_3). \tag{17}$$

3. Решение задачи (1), (2). Интегральные представления (13), (14) для обобщённых перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ содержат произвольные голоморфные функции $\Phi_j(z)$ $(j=1,2)$, $\Psi_k(z)$ $(k=\overline{1,3})$ и произвольные функции $\rho^j(z)$ $(j=\overline{1,3})$. Их найдём так, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли системе (5) и граничным условиям (7), при этом правые части уравнений (5) и граничных условий (7) временно считаем известными. С этой целью представления для функций (9), (13)–(15) подставим в левые части системы (5) и граничных условий (7). В результате система уравнений (5) запишется в виде

$$\rho^j(z)+h_1^j(\rho)(z)+h_2^j(\Phi)(z)=f^j(a)(z)-F^j(z),\quad j=\overline{1,3},\quad z\in\Omega, \tag{18}$$

где через $h_1^j(\rho)(z)$ и $h_2^j(\Phi)(z)$ обозначены те части выражения оператора $h^j(a)$ в (6), которые содержат функции $\rho=(\rho^1,\rho^2,\rho^3)$ и $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)$ соответственно.

Граничные условия (7) с учётом представлений

$$Sd_{n_j}[\Phi_j]^+(t)=-(\overline{t}')^2\,d^1_{n_j}(t)\Phi_j(t)+K_{0j}(\Phi_j)(t),$$

$$K_{0j}(\Phi_j)(t)=-\frac{d^1_{n_j}(t)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\tau-t}\Phi_j(\tau)\,d\tau-\frac{d^2_{n_j}(t)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{\Phi_j(\tau)}\,d\overline{\tau}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega\frac{d^1_{n_j}(\zeta)-d^1_{n_j}(t)}{(\zeta-t)^2}\Phi_j(\zeta)\,d\xi\,d\eta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega\frac{d^2_{n_j}(\zeta)-d^2_{n_j}(t)}{(\zeta-t)^2}\overline{\Phi_j(\zeta)}\,d\xi\,d\eta,\quad j=1,2,$$

$$\psi(\tau,t)=(\overline{\tau}-\overline{t})/(\tau-t),\quad \psi(t,t)=(\overline{t}')^2, \tag{19}$$

которые получаются при помощи равенств (10)–(12), формул (4.7), (4.9) из [13, с. 28] и формул Сохоцкого [14, с. 66], преобразуются к виду

$$(-1)^{j-1}\beta_{n_k}(t)\,\mathrm{Re}\,[i^jt'\Phi_k(t)]+2D^{1212}_{n_k}(t)\,\mathrm{Re}\,[i^{j-1}t'\Psi'_k(t)]+$$

$$+\,2D^{1212}_{n_k}(t)\,\mathrm{Re}\,[i^jt'K_{0k}(\Phi_k)(t)]+H_{3(k-1)+j}\rho^k(t)=\varphi_{3(k-1)+j}(a)(t)-F^{3k+j}(s),\quad k,j=1,2,$$

$$D^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}\,[it'\Psi'_3(t)]+K_{03}(\Phi)(t)+H_3\rho(t)=\varphi_3(a)(t)-F^6(s), \tag{20}$$

где приняты следующие обозначения:

$$H_{3(k-1)+j}\rho^k(t)=(-1)^{j-1}\mathrm{Re}\,[i^jt'T\rho^k(t)]+2D^{1212}_{n_k}(t)\,\mathrm{Re}\,\{i^j(t'Sd_{n_k}[T\rho^k]^+(t)+\overline{t}'d_{n_k}[T\rho^k](t))\},$$

$$n_k=2(k-1),\quad j,k=1,2,\quad H_3\rho(t)=D^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}\,[it'T\widetilde{\rho}_3(t)]+D^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}\,\{it'Td_2[T\rho^2](t)\},$$

$$K_{03}(\Phi)(t)=D^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}\,\{t'(\Psi_2(t)+iTd_2[\Phi_2](t))\};\quad \beta_{n_j}(t)=[1-D^{1212}_{n_j}(t)/D^{1111}_{n_j}(t)]/2,$$

$$j=1,2;\quad F^{3+j}(s)=P^j(s)\quad (j=\overline{1,3}),\quad F^{6+k}(s)=N^k(s)\quad (k=1,2);\quad \Phi_j(t)\equiv\Phi_j^+(t), \tag{21}$$

$\Psi'_k(t)\equiv\Psi_k^{'+}(t)$, $t\in\Gamma$; символ $\Psi^+(t)$ здесь и далее означает предел функции $\Psi(z)$ при стремлении $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω.

Таким образом, для определения функций $\rho^j\in L_p(\Omega)$ $(j=\overline{1,3})$, $\Phi_k(z)\in C_\alpha(\overline{\Omega})$ $(k=1,2)$ и $\Psi_j(z)\in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ $(j=\overline{1,3})$ получили систему уравнений (18), (20). Голоморфные функции будем искать в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями:

$$\Phi_k(z)=\Theta(\mu_{2k})(z)\equiv\Phi_k(\mu_{2k})(z),\quad k=1,2,$$

$$\Psi'_j(z)=i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta(\mu_{2j-1})(z)\equiv\Psi'_j(\mu_{2j-1})(z),\quad j=\overline{1,3},$$

$$\Theta(f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau'(\tau-z)}, \tag{22}$$

где $\mu_j(t)\in C_\alpha(\Gamma)$ $(j=\overline{1,5})$ – произвольные действительные функции, $\tau'=d\tau/d\sigma$, $d\sigma$ – элемент длины дуги кривой Γ.

Для функций $\Psi_j(z)$ $(j=\overline{1,3})$ имеем представления

$$\Psi_j(z)=i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta^0(\mu_{2j-1})(z)+c_{2j-1}+ic_{2j}\equiv\Psi_j(\mu_{2j-1})(z)+c_{2j-1}+ic_{2j},\quad j=\overline{1,3},$$

$$\Theta^0(f)(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\tau)}{\tau'}\ln\biggl(1-\frac{z}{\tau}\biggr)\,d\tau, \tag{23}$$

где c_j $(j=\overline{1,6})$ – произвольные действительные постоянные, под $\ln(1-z/\tau)$ понимается однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$.

Воспользовавшись формулами Сохоцкого [14, с. 66], находим $\Phi_k(t)$ $(k=1,2)$ и $\Psi'_j(t)$ $(j=\overline{1,3})$, $t\in\Gamma$. Подставляя выражения для них, а также представление (23) в систему (18), (20), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений относительно функций $\rho=(\rho^1,\rho^2,\rho^3)\in L_p(\Omega)$ и $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)\in C_\alpha(\Gamma)$:

$$\rho^j(z)+h_1^j(\rho)(z)+h_2^j(\mu)(z)=f^j(a)(z)+g_c^j(z)-F^j(z),\quad z\in\Omega,\quad j=\overline{1,3},$$

$$\sum_{n=1}^5\biggl[a_{jn}(t)\mu_n(t)+b_{jn}(t)\int\limits_\Gamma\frac{\mu_n(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\biggr]+K_j\mu(t)+H_j\rho(t)=$$
$$=\varphi_j(a)(t)+g_c^{3+j}(t)-F^{3+j}(t),\quad t\in\Gamma,\quad j=\overline{1,5}, \tag{24}$$

в которой приняты обозначения

$$K_{3(n-1)+j}\mu(t)=\beta_{j1}^n(t)\{\mathrm{Re}\,[it'\Theta(\mu_{2n+1-j})(t)]-i\Theta(\tau'\mu_{2n+1-j})(t)\}+\beta_{j2}^n(t)\,\mathrm{Re}\,[t'\Theta(\mu_{2n+j-2})(t)]+$$
$$+2D_{m_n}^{1212}(t)\,\mathrm{Re}\,[i^jt'K_{0n}(\mu_{2n})(t)],\quad n,j=1,2,\quad K_3\mu(t)=K_{03}(\mu)(t)-D_0^{1313}\mathrm{Re}\,[t'\Theta(\mu_5)(t)];$$
$$g_c^2(z)=D_0^{1313}(c_4+ic_3)/2,\quad g_c^3(z)=-c_4D_{0\alpha^1}^{1313}-c_3D_{0\alpha^2}^{1313},$$
$$g_c^6(t)=D_0^{1313}(t)(-c_4\,d\alpha^2/ds+c_3\,d\alpha^1/ds),\quad g_c^1(z)=g_c^{3+j}(t)\equiv0,\quad j=1,2,4,5;$$
$$a_{11}=D_0^{1212},\quad a_{22}=\beta_0/2,\quad a_{35}=-D_0^{1313}/2,\quad a_{43}=D_2^{1212},\quad a_{54}=\beta_2/2,$$
$$b_{12}=\beta_0/(2\pi),\quad b_{21}=D_0^{1212}/\pi,\quad b_{44}=\beta_2/(2\pi),\quad b_{53}=D_2^{1212}/\pi; \tag{25}$$

остальные a_{jk}, b_{jk} равны нулю; здесь $h_2^j(\mu)(z)\equiv h_2^j(\Phi(\mu))(z)$, $K_{0j}(\mu_{2j})(t)\equiv K_{0j}(\Phi_j(\mu_{2j}))(t)$, $j=1,2$; $K_{03}(\mu)(t)\equiv K_{03}(\Phi(\mu))(t)$, $\Phi(\mu)=(\Phi_1(\mu_2),\Phi_2(\mu_4),\Psi_1(\mu_1),\Psi_2(\mu_3),\Psi_3(\mu_5))$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (b), (c), (d), (e). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $h_1^j(\rho)$ $(j=\overline{1,3})$ – линейные вполне непрерывные операторы в $L_p(\Omega)$;

2) $h_2^j(\mu)$ $(j=\overline{1,3})$ – линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ при любом $\nu\in(0,1)$;

3) $K_j\mu$ $(j=\overline{1,5})$ – линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при любых $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta/2$;

4) $H_j\rho$ $(j=\overline{1,5})$ – линейные вполне непрерывные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_{\alpha'}(\Gamma)$ при любом $\alpha'<\alpha$ и ограниченные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_\alpha(\Gamma)$;

5) имеют место включения $f^j(a)(z),F^j(z),g_c^j(z)\in L_p(\Omega)$ $(j=\overline{1,3})$, $\varphi_j(a)(t)\in C_\alpha(\Gamma)$ и $F^{3+j}(t),g_c^6(t),a_{jk}(t),b_{jk}(t)\in C_\beta(\Gamma)$ $(j,k=\overline{1,5})$.

Доказательство. Известно [13, с. 26–27], что интеграл типа Коши $\Theta(f)$ в (22) представляет собой ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$, а его производная $\Theta'(f)$ – ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $L_q(\Omega)$, $1<q<2/(1-\alpha)$. Кроме того, нетрудно показать, что $\Theta(f)$ – вполне непрерывный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ при любом $p>1$ и в $C_{\alpha'}(\overline{\Omega})$ при всех $\alpha'<\alpha$. Учитывая это, а также свойства операторов T и S, определённых соответственно в

(10) и (11), используя представления (15) для производных первого порядка обобщённых перемещений и выражения для операторов $h^j(a)$ в (6), получаем, что первые два утверждения леммы справедливы.

Так как $\psi(\tau,t)\in C_\beta(\Gamma)\times C_\beta(\Gamma)$ [14, с. 28–32], $d_j^k(z)\in C_\beta(\overline{\Omega})$, то, принимая во внимание следствие 4.3 из [15, с. 124], легко убеждаемся в том, что первые два слагаемых правой части равенства в (19), определяющего оператор $K_{0j}(\mu_{2j})$, представляют собой вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при любых $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta$. Также нетрудно показать, что третье и четвёртое слагаемые этого равенства в (19) представляют собой вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при всех $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta$. Тогда получаем, что $K_{0j}(\mu_{2j})$ $(j=1,2)$ – линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при любых $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta$. Так как $D_0^{1313}\in C_\beta(\overline{\Omega})$, то аналогично из определения оператора $K_{03}(\mu)$ в (21) следует, что $K_{03}(\mu)$ – линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\beta(\Gamma)$ для всех $\nu\in(0,1)$.

Далее, первые два слагаемых в правой части формулы для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (25) преобразуем к виду

$$\beta_{j1}^n(t)\bigg\{\frac{\overline{t}'}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu_{2n+1-j}(\tau)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\tau'}{\tau-t}\right)d\tau+\frac{1}{4\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\mu_{2n+1-j}(\tau)}{\tau't'}\frac{(\tau'-t')^2}{\tau-t}\,d\tau\bigg\}.$$

Следовательно, с учётом включений $\tau',\beta_{j1}^n\in C_\beta(\Gamma)$ и равенства

$$\mathrm{Im}\,[\tau'/(\tau-t)]=k_*(\tau,t)/|\tau-t|^{1-\beta/2},$$

где $k_*(\tau,t)\in C_{\beta/2}(\Gamma)\times C_{\beta/2}(\Gamma)$ [14, с. 31–32, 55–56], а также следствий 4.4, 4.5 из [15, с. 125] получаем, что первые два слагаемых в выражении для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (25) определяют линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при любых $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta/2$. Третье слагаемое в выражении для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ запишем в виде

$$\frac{\beta_{j2}^n(t)}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\mu_{2n+j-2}(\tau)}{\tau'}\,\mathrm{Im}\left(\frac{t'}{\tau-t}\right)d\tau,$$

откуда, как и выше, получаем, что третье слагаемое представляет собой линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при всех $\nu\in(0,1)$ и $\gamma<\beta/2$. Тогда из представлений операторов $K_j\mu$ $(j=\overline{1,5})$ в (25) вытекает справедливость третьего утверждения леммы. Справедливость четвёртого её утверждения следует из представлений операторов $H_j\rho$ $(j=\overline{1,5})$ в (21) с учётом свойств операторов T и S, интеграла типа Коши и соотношений

$$Sd_{n_k}[T\rho^k]^+(t)=T\bigg(\frac{\partial}{\partial\zeta}\,d_{n_k}[T\rho^k]\bigg)(t)-\frac12(\overline{t}')^2\,d_{n_k}[T\rho^k](t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{d_{n_k}[T\rho^k](\tau)}{\tau-t}\,d\overline{\tau},\quad k=1,2,$$

которые получаются с использованием формул (8.20) из [13, с. 58] и формул Сохоцкого. Справедливость пятого утверждения леммы непосредственно вытекает из формул (6), (8), (25). Лемма доказана.

Исследуем разрешимость системы уравнений (24) в пространстве $L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$, $\alpha'<\alpha$. Заметим, что любое решение $(\rho,\mu)\in L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$ системы (24) в силу леммы 1 принадлежит пространству $L_p(\Omega)\times C_\alpha(\Gamma)$. Используя выражения для $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$ из (25), вычисляем определитель

$$\det\,[A(t)-\pi iB(t)]=(-1/4)D_0^{1212}D_2^{1212}D_0^{1313}\beta_0\beta_2,$$

где β_0, β_2 определены в (21), а $A=(a_{jk})_{5\times5}$, $B=(b_{jk})_{5\times5}$ – квадратные матрицы 5-го порядка. Итак, $\det\,[A(t)-\pi iB(t)]\neq0$ на Γ и для индекса системы (24) получаем равенство

$$\chi=\frac{1}{2\pi}\bigg[\arg\frac{\det\,(A-\pi iB)}{\det\,(A+\pi iB)}\bigg]_\Gamma=0$$

(здесь символ $[\arg\varphi]_\Gamma$ означает приращение аргумента функции φ при обходе кривой Γ один раз в положительном направлении). Следовательно, к системе (24) применима альтернатива Фредгольма. Пусть $(\rho,\mu)\in L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$ – решение системы (24) при нулевой правой части $((f^j+g_c^j-F^j)(z)\equiv 0,\ j=\overline{1,3},\ (\varphi_j+g_c^{3+j}-F^{3+j})(t)\equiv 0,\ j=\overline{1,5})$. Этому решению по формулам (22), (23) с постоянными $c_j=0\ (j=\overline{1,6})$ соответствуют голоморфные функции $\Phi_k(z),\ \Psi_j(z)$, которые в свою очередь, согласно формулам (13), (14), определяют обобщённые перемещения $w_j\ (j=\overline{1,3}),\ \psi_k\ (k=1,2)$. Эти перемещения, как нетрудно видеть, удовлетворяют однородной системе линейных уравнений (5) $(f^j-F^j\equiv 0,\ j=\overline{1,3})$ и однородным линейным граничным условиям (7) $(\varphi_j-F^{3+j}\equiv 0,\ j=\overline{1,5})$. Действительную и мнимую части первого уравнения однородной системы (5) умножим соответственно на w_1 и w_2, второго уравнения – соответственно на ψ_1 и ψ_2, а третье уравнение – на w_3. После этого проинтегрируем по области Ω и сложим получившиеся равенства. С учётом однородных граничных условий в (7) при выполнении условий

$$D_{n_j}^{1111}(z)-D_{n_j}^{1212}(z)>0,\quad n_j=2(j-1),\quad z\in\overline{\Omega},\quad j=1,2, \tag{26}$$

получаем, что $w_j\ (j=\overline{1,3})$ и $\psi_k\ (k=1,2)$ удовлетворяют системе

$$\nu_{j1\alpha^1}=0,\quad \nu_{j2\alpha^2}=0,\quad \nu_{j1\alpha^2}+\nu_{j2\alpha^1}=0,\quad w_{3\alpha^j}+\psi_j=0,\quad j=1,2, \tag{27}$$

где $\nu_{1j}=w_j,\ \nu_{2j}=\psi_j,\ j=1,2.$ Решая систему (27), находим

$$w_1=-c_0\alpha^2+c_1,\quad w_2=c_0\alpha^1+c_2,\quad w_3=-c_4\alpha^1-c_5\alpha^2+c_6,\quad \psi_1=c_4,\quad \psi_2=c_5, \tag{28}$$

где c_j – произвольные действительные постоянные. Так как $\Psi_j(0)=0\ (j=\overline{1,3}),\ w_3(0)=0$, то из (28) вытекает, что $w_1=-c_0\alpha^2+c_1,\ w_2=c_0\alpha^1+c_2,\ w_3=\psi_1=\psi_2\equiv 0.$ Тогда $\omega_1(z)=2ic_0D_0^{1212},\ \omega_2(z)\equiv 0$ и из уравнений (9) следуют равенства

$$\rho^1(z)=2ic_0D_{0\overline{z}}^{1212},\quad \rho^2(z)=\rho^3(z)\equiv 0,\quad z\in\Omega. \tag{29}$$

Используя формулы (10), (13), (14) и представление для ω_{jz}^0 из (15), находим

$$\Phi_1(z)=c_0\alpha_0(z),\quad \Psi_1'(z)=c_0\gamma_0'(z),\quad \Phi_2(z)=\Psi_2'(z)=\Psi_3'(z)\equiv 0,$$

$$\alpha_0(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma\frac{D_0^{1212}(t)}{t-z}\,dt,\quad \gamma_0'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{d\overline{t}}{t-z},$$

подставляя эти функции в (22), получаем

$$\mu_1(t)/t'-c_0(\overline{t}')^2=F_1^-(t),\quad \mu_2(t)/t'-2ic_0D_0^{1212}(t)=F_2^-(t),\quad \mu_j(t)/t'=F_j^-(t),\quad j=\overline{3,5},$$

где $F_j^-(t)$ – граничные значения функции $F_j^-(z)$, голоморфной во внешности Ω и исчезающей на бесконечности. Следовательно, для функции $F_j^-(z)$ во внешности области Ω приходим к задаче Римана–Гильберта с краевым условием $\operatorname{Re}[it'F_j^-(t)]=f_j^-(t),\ j=\overline{1,5}$, где $f_1^-(t)=c_0\operatorname{Re}(it'),\ f_2^-(t)=2c_0D_0^{1212}(t)\operatorname{Re}t',\ f_j^-(t)=0,\ j=\overline{3,5}.$ Решение этой задачи имеет вид [16, с. 253]

$$F_j^-(z)=c_0f_j^0(z)+\beta_{0j}f_j^1(z),\quad j=1,2,\quad F_j^-(z)=\beta_{0j}f_j^1(z),\quad j=\overline{3,5},\quad z\in\Omega_1\equiv\mathbb{C}\backslash\overline{\Omega};$$

здесь $f_j^k(z)$ – известные голоморфные вне области Ω функции, $c_0,\ \beta_{0j}$ – произвольные действительные постоянные. Тогда для функций $\mu_j(t)$ получаем представления

$$\mu_j(t)=c_0\mu_j^0(t)+\beta_{0j}\mu_j^1(t),\quad j=1,2,\quad \mu_j(t)=\beta_{0j}\mu_j^1(t),\quad j=\overline{3,5}, \tag{30}$$

где $\mu_j^k(t)$ – известные действительные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\Gamma)$.

Решения (29), (30) показывают, что однородная система уравнений (24) имеет шесть линейно независимых решений. Тогда союзная с ней система уравнений также будет иметь шесть линейно независимых решений. Для вывода союзной системы действительные и мнимые части левых частей уравнений в (18) умножим соответственно на действительные функции $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, и проинтегрируем по области Ω, а левые части уравнений в (20) умножим на действительные функции $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5 \in C_\alpha(\Gamma)$ и проинтегрируем по кривой Γ. После этого их сложим и приравняем к нулю. Заменяя голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_k(z)$, $\Psi'_k(z)$ их выражениями из (22), (23) с постоянными, равными нулю, переставляя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, после несложных, но достаточно громоздких преобразований приходим к искомой союзной системе уравнений

$$\overline{v^j} + 2(-1)^{j-1} T d_{n_j}[S_j v](z) + 2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z) = 0, \quad v^j = v_{3j-2} + i v_{3j-1}, \quad \nu^j = \nu_{3j-2} + i\nu_{3j-1}, \quad j = 1,2,$$

$$D_0^{1313} v_3(z) + \operatorname{Re}\,[T(D_0^{1313} v^2)(z)/4 - T(D_{0\overline{\zeta}}^{1313} v_3)(z) + \Theta(\tau' D_0^{1313}\nu_3)(z)] = 0 \tag{31}$$

в области Ω и с условиями

$$\begin{gathered}
\operatorname{Re} i\{(-1)^{j-1} T d_{n_j}[S_j v](t) + \Theta^-(\tau'\overline{\nu^j})(t)\} = 0, \quad j = 1,2, \\
\operatorname{Re}\{T(D_{0\overline{\zeta}}^{1313} v_3)(t) - T(D_0^{1313} v^2)(t)/4 - \Theta^-(\tau' D_0^{1313}\nu_3)(t)\} = 0, \\
\operatorname{Re}\{T(D_{n_j\overline{\zeta}}^{1212} v^j)(t) - 2\Theta^-(\tau' D_{n_j}^{1212}\nu^j)(t) + (j-1)[iT^0(D_{0\overline{\zeta}}^{1313} v_3)(t) - \\
- iT^0(D_0^{1313} v^2)(t)/4 + T_\Gamma^0(D_0^{1313}\tau'\nu_3)(t)]\} = 0, \quad j = 1,2,
\end{gathered} \tag{32}$$

на границе Γ.

В уравнениях (31), (32) приняты обозначения

$$\begin{gathered}
S_j v(z) = (-1)^j\{S(D_{n_j\overline{\zeta}}^{1212} v^j)(z) - D_{n_j z}^{1212} v^j(z) - 2\Theta'(\tau' D_{n_j}^{1212}\nu^j)(z)\} + \\
+ (j-1)\{T(D_0^{1313} v^2)(z)/4 - T(D_{0,\overline{\zeta}}^{1313} v_3)(z) + D_0^{1313} v_3(z) + \Theta(\tau' D_0^{1313}\nu_3)(z)\}, \quad j = 1,2, \\
T^0 f(z) = -\frac{1}{\pi i}\iint\limits_{\Omega} f(\zeta)\ln\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right) d\xi\, d\eta, \quad T_\Gamma^0 f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\tau)\ln\left(1 - \frac{\tau}{z}\right) d\sigma, \\
\Theta'(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau'(\tau - z)^2}, \quad v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5);
\end{gathered} \tag{33}$$

$\Theta^-(f)(t)$ – граничные значения функции $\Theta(f)(z)$ при стремлении $z \to t \in \Gamma$ извне области Ω; операторы Tf, Sf, $d_j[f]$, $\Theta(f)$ определены в (10)–(12), (22) соответственно.

Система (31), (32), как отмечено выше, имеет шесть линейно независимых решений. Получим для них явные выражения. Далее в (31), (32) под $v \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5) \in C_\alpha(\Gamma)$ будем понимать некоторое её решение.

Заметим, что операторы T и T^0, T_Γ^0, введённые соответственно в (10) и (33), определяют функции $Tf(z)$, $T^0 f(z)$, $T_\Gamma^0 f(z)$, которые голоморфны во внешности области Ω и обращаются в нуль на бесконечности. Этими же свойствами обладают и функции $\Theta(f)(z)$. Поэтому равенства в (32) представляют собой краевые условия задачи Римана–Гильберта с нулевым индексом для функций, голоморфных вне области Ω и исчезающих на бесконечности. Такая задача, как известно, имеет только нулевое решение. Следовательно, равенства в (32) преобразуются к виду

$$\begin{gathered}
(-1)^{j-1} T d_{n_j}[S_j v](z) + \Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z) = 0, \quad j = 1,2, \\
T(D_{0\overline{\zeta}}^{1313} v_3)(z) - T(D_0^{1313} v^2)(z)/4 - \Theta(\tau' D_0^{1313}\nu_3)(z) = 0, \\
T(D_{n_j\overline{\zeta}}^{1212} v^j)(z) - 2\Theta(\tau' D_{n_j}^{1212}\nu^j)(z) + (j-1)[iT^0(D_{0\overline{\zeta}}^{1313} v_3)(z) - \\
- iT^0(D_0^{1313} v^2)(z)/4 + T_\Gamma^0(D_0^{1313}\tau'\nu_3)(z)] = 0, \quad j = 1,2, \quad z \in \Omega_1.
\end{gathered} \tag{34}$$

Пусть дополнительно выполнены условия

$$D_{n_j}^{1212} \quad (j=1,2), \quad D_0^{1313} \in W_p^{(2)}(\Omega), \quad 2<p<4/(2-\beta). \tag{35}$$

Тогда из системы (31) в силу указанных выше свойств операторов T, S и интеграла типа Коши $\Theta(f)(z)$, следует, что функции v_j $(j=\overline{1,5})$ принадлежат пространству $W_{q_1}^{(1)}(\Omega)$, $1<$ $<q_1<2/(1-\alpha)$. Перейдём в равенствах (31) к пределу при $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω, а в первых трёх равенствах в (34) – извне области Ω и последние вычтем из первых трёх соответственно. Принимая во внимание непрерывность функций вида $Tf(z)$ при $f\in L_p(\Omega)$ на $\mathbb{C}$ и используя формулы Сохоцкого, получаем

$$v^j(t)=-2\nu^j(t), \quad j=1,2, \quad v_3(t)=-\nu_3(t), \quad t\in\Gamma. \tag{36}$$

Продифференцируем первые два соотношения в (31) по $\overline{z}$. С учётом (11) получим

$$\overline{v^j}_{\overline{z}}=2(-1)^j\, d_{n_j}[S_jv](z), \quad z\in\Omega, \quad j=1,2.$$

Рассматривая последние равенства как систему относительно S_jv, $j=1,2$, и решая её, будем иметь

$$S_jv(z)=2(-1)^{j-1}D_{n_j}^{1111}D_{n_j}^{1212}(d_{n_j}^1\overline{v^j}_{\overline{z}}-d_{n_j}^2v_z^j), \quad j=1,2. \tag{37}$$

Используя представления в (33) для операторов S_jv $(j=1,2)$, находим производные по $\overline{z}$:

$$(S_jv)_{\overline{z}}=(-1)^{j-1}(D_{n_jz}^{1212}v_{\overline{z}}^j-D_{n_j\overline{z}}^{1212}v_z^j)+(j-1)D_0^{1313}(v_{3\overline{z}}+v^2/4), \quad j=1,2. \tag{38}$$

Теперь соотношения (37) продифференцируем по $\overline{z}$, после этого левые части получившихся равенств заменим их выражениями из (38). Третье равенство в (31) дифференцируем по z и $\overline{z}$. При помощи несложных преобразований полученных соотношений убеждаемся в том, что вектор-функция $(v_1,v_2,2v_3,v_4,v_5)$ является решением системы линейных уравнений (5) при нулевой правой части $(f^j-F^j\equiv 0,\ j=\overline{1,3})$.

Далее, в равенствах (37) переходим к пределу при $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω, при этом левую часть $(S_jv)^+(t)$ заменим выражением, полученным с использованием представления $(S_jv)(z)$ в (33). Затем из них вычитаем соответственно равенства, которые получаются в результате дифференцирования по z последних двух соотношений в (34) и последующего перехода в них к пределу при $z\to t\in\Gamma$ извне Ω. Продифференцируем третьи соотношения в (31) и (34) по z, в получившихся равенствах перейдём к пределу при $z\to t\in\Gamma$ соответственно изнутри и извне области Ω и затем вычтем их друг из друга. При помощи полученных таким образом равенств на кривой Γ, используя соотношения (36) и формулы

$$(Sf)^+(t)-(Sf)^-(t)=-f(t)\cdot(\overline{t}')^2, \quad \Theta'^+(\tau'f)(t)-\Theta'^-(\tau'f)(t)=f_t+f_{\overline{t}}\cdot(\overline{t}')^2, \quad t\in\Gamma,$$

в которых операторы Sf, $\Theta'(f)$ определены в (11), (33), после несложных преобразований приходим к тому, что вектор-функция $(v_1,v_2,2v_3,v_4,v_5)$ удовлетворяет также и однородным линейным граничным условиям в (7) $(\varphi_j-F^{3+j}\equiv 0,\ j=\overline{1,5})$. Таким образом, вектор-функция $\widetilde{v}=(v_1,v_2,2v_3,v_4,v_5)$ является решением однородной системы линейных уравнений (5), удовлетворяющим однородным граничным условиям в (7). Тогда вектор-функция $\widetilde{v}$ удовлетворяет и системе уравнений (27), поэтому в соответствии с (28) для её компонент получаем следующие представления:

$$v_1=-c_0\alpha^2+c_1, \quad v_2=c_0\alpha^1+c_2, \quad v_3=(-c_4\alpha^1-c_5\alpha^2+c_6)/2, \quad v_4=c_4, \quad v_5=c_5,$$

где c_j – произвольные действительные постоянные.

Функции $\nu_j(t)$ и $v_k(t)$ связаны друг с другом формулами (36). Следовательно, решение $(v,\nu)^{\text{т}}$, $v=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$, $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5)$ союзной системы (31), (32) можно представить в виде $(v,\nu)^{\text{т}}=c_0\gamma_1+c_1\gamma_2+c_2\gamma_3+c_4\gamma_4+c_5\gamma_5+c_6\gamma_6$, где $\gamma_k=(\gamma_{k1},\gamma_{k2},\ldots,\gamma_{k10})$

$(k=\overline{1,6})$ – линейно независимые решения системы (31), (32). Тогда для разрешимости системы (24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\iint\limits_{\Omega}\{\mathrm{Re}\,[(f^1+g_c^1-F^1)(z)(\gamma_{k1}-i\gamma_{k2})(z)+(f^2+g_c^2-F^2)(z)(\gamma_{k4}-i\gamma_{k5})(z)]+$$

$$+(f^3+g_c^3-F^3)(z)\gamma_{k3}(z)\}\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\sum_{j=1}^{5}\int\limits_{\Gamma}(\varphi_j+g_c^{3+j}-F^{3+j})(t)\gamma_{k,5+j}(t)\,ds=0,\quad k=\overline{1,6},$$

которые после несложных преобразований принимают вид

$$\iint\limits_{\Omega}R^j d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}P^j\,ds=0,\quad j=1,2,\quad \iint\limits_{\Omega}(R^1\alpha^2-R^2\alpha^1)\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}(P^1\alpha^2-P^2\alpha^1)\,ds=0,$$

$$\iint\limits_{\Omega}(L^j-R^3\alpha^j)\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}(N^j-P^3\alpha^j)ds-\iint\limits_{\Omega}[k_\lambda T^{\lambda\lambda}(\gamma^0)\alpha^j-T^{j\mu}(\gamma^0)w_{3\alpha^\mu}]\,d\alpha^1\,d\alpha^2=0,$$

$$j=1,2,\quad \iint\limits_{\Omega}R^3\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}P^3\,ds+\iint\limits_{\Omega}k_\lambda T^{\lambda\lambda}(\gamma^0)\,d\alpha^1\,d\alpha^2=0, \tag{39}$$

где γ^0 и w_3 – произвольно фиксированные вектор деформации и функция соответственно. При выполнении условий (39) общее решение системы (24) можно представить в виде

$$\rho^j(z)=\rho_e^j(a)(z)+\rho_\chi^j(a)(z)+\rho_*^j(z)+\rho_F^j(z),\quad z\in\Omega,\quad j=\overline{1,3},$$

$$\mu_k(t)=\mu_{ke}(a)(t)+\mu_{k\chi}(a)(t)+\mu_{k*}(t)+\mu_{kF}(t),\quad t\in\Gamma,\quad k=\overline{1,5};$$

$$\rho_e^j(a)=\mathcal{R}_jf_e(a),\quad \rho_\chi^j(a)=\mathcal{R}_jf_\chi(a),\quad \rho_*^j(z)=\mathcal{R}_jg_c(z)+\widetilde{\rho}^j(z),\quad \rho_F^j(z)=-\mathcal{R}_jF(z),\quad j=\overline{1,3},$$

$$\mu_{ke}(a)=\mathcal{R}_{k+3}f_e(a),\quad \mu_{k\chi}(a)=\mathcal{R}_{k+3}f_\chi(a),\quad \mu_{k*}(t)=\mathcal{R}_{k+3}g_c(t)+\widetilde{\mu}_k(t),$$

$$\mu_{kF}(t)=-\mathcal{R}_{k+3}F(t),\quad k=\overline{1,5}, \tag{40}$$

где $f_e(a)=(f_e^1,f_e^2,f_e^3,\varphi_{1e},\ldots,\varphi_{5e})$, $f_\chi(a)=(f_\chi^1,f_\chi^2,f_\chi^3,\varphi_{1\chi},\ldots,\varphi_{5\chi})$, $g_c=(g_c^1,g_c^2,\ldots,g_c^8)$, $F==(F^1,F^2,\ldots,F^8)$; $\mathcal{R}_j$ $(j=\overline{1,3})$ и $\mathcal{R}_k$ $(k=\overline{4,8})$ – линейные ограниченные операторы из $L_p(\Omega)\times C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; функции $\widetilde{\rho}^j(z)$, $\widetilde{\mu}_k(t)$ заданы равенствами (29), (30), а f_e^j, f_χ^j, φ_{ke}, $\varphi_{k\chi}$, g_c^n, F^n – равенствами в (6), (8), (26).

Если выражения для функций $\mu_k(t)$ из (40) подставить в равенства (22), (23), то для голоморфных функций получим представления

$$\Phi_k(z)=\Phi_{ke}(a)(z)+\Phi_{k\chi}(a)(z)+\Phi_{k*}(z)+\Phi_{kF}(z),\quad k=1,2,$$

$$\Psi_j^{(n)}(z)=\Psi_{je}^{(n)}(a)(z)+\Psi_{j\chi}^{(n)}(a)(z)+\Psi_{j*}^{(n)}(z)+\Psi_{jF}^{(n)}(z),\quad n=0,1,\quad j=\overline{1,3};$$

$$\Phi_{ke}(a)=\Phi_k(\mu_{2ke}(a))(z),\quad \Phi_{k\chi}(a)=\Phi_k(\mu_{2k\chi}(a))(z),\quad \Phi_{k*}(z)=\Phi_k(\mu_{2k*})(z)+\widetilde{\Phi}_k(z),$$

$$\Phi_{kF}(z)=\Phi_k(\mu_{2kF})(z),\quad \Psi_{je}^{(n)}(a)=\Psi_j^{(n)}(\mu_{2j-1e}(a))(z),$$

$$\Psi_{j\chi}^{(n)}(a)=\Psi_j^{(n)}(\mu_{2j-1\chi}(a))(z),\quad \Psi_{jF}^{(n)}(z)=\Psi_j^{(n)}(\mu_{2j-1F})(z),$$

$$\Psi_{j*}^{(n)}(z)=\Psi_j^{(n)}(\mu_{2j-1*})(z)+\widetilde{\Psi}_j^{(n)}(z),\quad k=1,2,\quad j=\overline{1,3},\quad n=0,1, \tag{41}$$

где $\widetilde{\Phi}_1(z) = c_0\alpha_0(z)$, $\widetilde{\Phi}_2(z) \equiv 0$, $\widetilde{\Psi}_1(z) = c_0\gamma_0(z) + c_1 + ic_2$, $\widetilde{\Psi}_j(z) = c_{2j-1} + ic_{2j}$, $j = 2, 3$; $\alpha_0(z)$, $\gamma_0(z)$ – известные функции, определённые выше; c_j – произвольные действительные постоянные.

Выражения для $\rho^j(z)$ из (40) и голоморфных функций из (41) подставим в равенства (13), (14). Тогда задача (1), (2) сведётся к системе нелинейных уравнений относительно обобщённых перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$, которую представим в виде

$$\omega_j^0(z) = \omega_{je}^0(a) + \omega_{j\chi}^0(a) + \omega_{j*}^0(z) + \omega_{jF}^0(z), \quad j = 1, 2,$$

$$w_3(z) = w_{3e}(a) + w_{3\chi}(a) + w_{3*}(z) + w_{3F}(z), \quad z \in \Omega, \tag{42}$$

где $\omega_{je}^0(a) = \omega_j^0(\Psi_{je}(a); \omega_{je}(a))$, $\omega_{je}(a) = \omega_j(\Phi_{je}(a); \rho_e^j(a))$, $j = 1, 2$, $w_{3e}(a) = w_3(\Psi_{3e}(a); \rho_e^3(a))$; операторы $\omega_{j\chi}^0(a), w_{3\chi}(a)$, функции $\omega_{j*}^0(z), w_{3*}(z)$ и $\omega_{jF}^0(z), w_{3F}(z)$ определяются по тем же формулам, что и операторы $\omega_{je}^0(a), w_{3e}(a)$, с той лишь разницей, что в нижнем индексе вместо "e" нужно взять "χ", "$*$", "F" соответственно; операторы $\omega_j(\Phi_j; \rho^j)$, $\omega_j^0(\Psi_j; \omega_j)$ и $w_3(\Psi_3; \rho^3)$ определены в (10), (13), (14). Отметим, что функции $\omega_{j*}^0(z)$, $w_{3*}(z)$ и $\omega_{jF}^0(z)$, $w_{3F}(z)$ зависят соответственно от произвольных постоянных и внешних сил, действующих на оболочку. При этом, как легко заметить, функции $\omega_{1*}^0(z) = w_{2*} + iw_{1*}$, $\omega_{2*}^0(z) = \psi_{2*} + i\psi_{1*}$ удовлетворяют системе уравнений (27), следовательно, для них имеют место представления (28).

Исследуем разрешимость системы (42) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d), (e). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\omega_{je}^0(a)$ $(j = 1, 2)$ *и* $w_{3e}(a)$ *– линейные ограниченные операторы в* $W_p^{(2)}(\Omega)$;

2) $\omega_{j\chi}^0(a)$ $(j = 1, 2)$ *и* $w_{3\chi}(a)$ *– нелинейные ограниченные операторы в* $W_p^{(2)}(\Omega)$, *причём для любых* $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ $(j = 1, 2)$ *выполняются оценки*

$$\|\omega_{j\chi}^0(a^1) - \omega_{j\chi}^0(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \|w_{3\chi}(a^1) - w_{3\chi}(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant c(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} +$$

$$+ \|w_3^1\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^2\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \tag{43}$$

где c *– известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;*

3) $\omega_{j*}^0(z), \omega_{jF}^0(z) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Из представлений для $f_e^j(a)$, $f_\chi^j(a)$ в (6) и $\varphi_{je}(a)$, $\varphi_{j\chi}(a)$ в (8) следует, что $f_e^j(a)$ и $\varphi_{je}(a)$ – линейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; $f_\chi^j(a)$ и $\varphi_{j\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; для $f_\chi^3(a)$, $\varphi_{3\chi}(a)$ справедливы оценки вида (43), а для $f_\chi^j(a)$, $\varphi_{j\chi}(a)$ $(j = 1, 2)$ – оценки

$$\|f_\chi^j(a^1) - f_\chi^j(a^2)\|_{L_p(\Omega)}, \quad \|\varphi_{j\chi}(a^1) - \varphi_{j\chi}(a^2)\|_{C_\alpha(\Gamma)} \leqslant c(\|w_3^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} +$$

$$+ \|w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad j = 1, 2. \tag{44}$$

Тогда из (40) с учётом ограниченности операторов $\mathcal{R}_j$ получаем, что $\rho_e^j(a)$, $\mu_{ke}(a)$ – линейные, а $\rho_\chi^j(a)$, $\mu_{k\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно и для $\rho_\chi^j(a)$, $\mu_{k\chi}(a)$ справедливы оценки (43). Следовательно, с учётом свойств интеграла типа Коши из представлений (41) следует, что $\Phi_{ke}(a)$, $\Psi'_{je}(a)$ – линейные, $\Phi_{k\chi}(a)$, $\Psi'_{j\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и вполне непрерывные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ при любом $q > 1$ и в $C_{\alpha'}(\overline{\Omega})$ при всех $\alpha' < \alpha$, причём для нелинейных операторов $\Phi_{k\chi}(a)$, $\Psi'_{j\chi}(a)$ справедливы оценки (43).

Заметим, что функции $\rho_e^j(a)(z)$, $\mu_{ke}(a)(t)$, определённые в (40), являются решением системы (24) с правой частью $f_e^j(a)(z)$ $(j=\overline{1,3})$, $\varphi_{ke}(a)(t)$ $(k=\overline{1,5})$. Принимая этот факт во внимание, а также выражения для операторов $f_e^j(a)$, $\varphi_{ke}(a)$ в (6), свойства интеграла типа Коши и операторов T, S, а также соотношение (4.9) из [13, с. 29] и лемму 1, после несложных, но достаточно громоздких преобразований получаем, что операторы $\Phi'_{ke}(a) = \Theta'(\mu_{2ke}(a))$, $\Psi''_{je}(a) = i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta'(\mu_{2j-1e}(a))$ (оператор $\Theta'(f)$ определён в (33)) и $\rho_e^j(a)$ представимы в виде

$$\Phi'_{ke}(a) = \Phi'_{ks}(a'') + \Phi'_{kc}(a), \quad k=1,2,$$

$$\Psi''_{je}(a) = \Psi''_{js}(a'') + \Psi''_{jc}(a), \quad \rho_e^j(a) = f_s^j(a'') + \rho_c^j(a), \quad j=\overline{1,3}, \tag{45}$$

где $\Phi'_{kc}(a)$, $\Psi''_{jc}(a)$, $\rho_c^j(a)$ – линейные вполне непрерывные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, а операторы $\Phi'_{ks}(a'')$, $\Psi''_{js}(a'')$ задаются равенствами

$$\Phi'_{ks}(a'') = \overline{f_s^k(a'')} - S\overline{Sf_s^k(a'')} - (\overline{t}'_z)^2(\overline{d_{n_k}[Tf_s^k(a'')]_z} - S\overline{S_{n_k}f_s^k(a'')})/d^1_{n_k} +$$

$$+ \overline{t}'_z \mathrm{Re}\,[(-i)^{\lambda-1}t'_z]i^{-\delta}[\Theta^{n_k}_{\delta\lambda}(a'') - S\overline{\Theta^{n_k}_{\delta\lambda}(a'')}]/(2\,d^1_{n_k})^{2-\delta}, \quad n_k = 2(k-1), \quad k=1,2,$$

$$\Psi''_{js}(a'') = i(\overline{t}'_z)^2[\overline{f_s^j(a'')} - S\overline{Sf_s^j(a'')}]/(4D^{1212}_{n_j}) + (\overline{t}'_z/2)\,\mathrm{Re}\,[(-i)^{\lambda-1}t'_z]i^{\delta-1}[\Theta^{n_k}_{\delta\lambda}(a'') -$$

$$- S\overline{\Theta^{n_k}_{\delta\lambda}(a'')}]/(2\,d^1_{n_j})^{\delta-1}, \quad j=1,2,$$

$$\Psi''_{3s}(a'') = (\overline{t}'_z)^2[\overline{f_s^3(a'')}/D_0^{1313} - S\overline{S(f_s^3(a'')/D_0^{1313})}]/2 + \overline{t}'_z \mathrm{Re}\,[(-i)^{\lambda-1}t'_z][\Theta^0_{3\lambda}(a'') - S\overline{\Theta^0_{3\lambda}(a'')}], \tag{46}$$

в которых приняты обозначения

$$S_{n_j}f_s^j(a'') = S(d_{n_j}[Tf_s^j(a'')]_\zeta) - (\overline{t}'_z)^2\, d^2_{n_j}(\overline{f_s^j(a'')} - S\overline{Sf_s^j(a'')}),$$

$$\Theta^0_{nj}(a'') = \delta_{0n}\varphi^{k,\lambda\mu}_{0,nj}w_{k\alpha^\lambda\alpha^\mu}, \quad n=\overline{1,3}, \quad \Theta^2_{nj}(a'') = \delta_{2n}\varphi^{k,\lambda\mu}_{2,nj}\psi_{k\alpha^\lambda\alpha^\mu}, \quad n,j=1,2;$$

$$\delta_{n_j1} = 1/D^{1212}_{n_j}, \quad \delta_{n_j2} = 1/\beta_{n_j}, \quad j=1,2, \quad \delta_{03}=1;$$

$\varphi^{k,\lambda\mu}_{n_\delta,mj}(z) \in W_p^{(1)}(\Omega)$ – известные функции, зависящие, как и функции $f^{\lambda\mu}_{nj}(z)$ в (6), только от упругих характеристик D^{ijkn}_m оболочки (при этом отметим, что в случае изотропных оболочек имеет место тождество $\varphi^{k,\lambda\mu}_{n_\delta,mj}(z)\equiv 0$); операторы $f_s^k(a'')$, T, S, $d_{n_k}[f]_z$ определены в (6), (10), (11), (16) соответственно; $t'_z = dt_z/ds$, t_z – точка кривой Γ, ближайшая к $z\in\Omega$.

Принимая во внимание указанные выше свойства операторов T, S, $f_s^j(a'')$ и $t'_z \in C_\beta(\Gamma)$, $|t'_z| = 1$, вследствие определений (46) получаем, что $\Phi'_{ks}(a'')$ и $\Psi''_{js}(a'')$ – линейные ограниченные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. Теперь, если использовать соотношения (12), (15)–(17), (45) и оценки (44), то утверждение леммы становится очевидным. Лемма доказана.

Отметим, что в случае изотропных оболочек $\omega^0_{je}(a)$ $(j=1,2)$ и $w_{3e}(a)$ – линейные вполне непрерывные операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$.

Систему (42) сведём к системе относительно вторых производных обобщённых перемещений. С этой целью уравнения (42) дважды дифференцируем по переменным z и $\overline{z}$, при этом используем соотношения (16), (45). Подставляя полученные выражения для $\omega^0_{jz\overline{z}}$, ω^0_{jzz}, $\omega^0_{j\overline{z}\overline{z}}$ $(j=1,2)$, $w_{3z\overline{z}}$, w_{3zz} в правые части формул (17), приходим к искомой системе относительно производных второго порядка, которую запишем в виде

$$a'' - P_s(a'') = P_c(a) + P_\chi(a) + P_F(z), \tag{47}$$

где a'' – вектор, введённый в (6); $P_c(a)$ – линейный вполне непрерывный и $P_\chi(a)$ – нелинейный ограниченный матричные операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$; для $P_\chi(a)$ справедлива оценка (44);

$P_F(z) \in L_p(\Omega)$ – известная вектор-функция, зависящая от внешних сил; $P_s(a'')$ – матричный оператор с компонентами вида

$$P_{jks}^{\lambda\mu}(a'') = P_{jk}^{\lambda\mu}(\omega_{js}^0), \quad P_{13s}^{\lambda\mu}(a'') = P_{13}^{\lambda\mu}(w_{3s}), \quad j,k,\lambda,\mu = 1,2,$$

$$\omega_{jsz\overline{z}}^0 = i(d_{n_j}^1\omega_{jsz} + d_{n_j}^2\overline{\omega_{js\overline{z}}}), \quad \omega_{js\overline{zz}}^0 = i(d_{n_j}^1\omega_{js\overline{z}} + d_{n_j}^2\overline{\omega_{jsz}}),$$

$$\omega_{jszz}^0 = \Psi_{js}''(a'') + iS(d_{n_j}^1\omega_{js\zeta} + d_{n_j}^2\overline{\omega_{js\overline{\zeta}}}) - i(\overline{t}_z')^2[d_{n_j}^1\Phi_{js}'(a'') - d_{n_j}^2(S\overline{\Phi_{js}'(a'')} - \overline{f_s^j(a'')} + S\overline{Sf_s^j(a'')})],$$

$$\omega_{js\overline{z}} = f_s^j(a''), \quad \omega_{jsz} = \Phi_{js}'(a'') + Sf_s^j(a''), \quad j = 1,2; \tag{48}$$

операторы $P_{jk}^{\lambda\mu}$ определены в (17).

Из выражений (48) вытекает, что $P_s(a'')$ относительно $a'' \in L_p(\Omega)$ является линейным ограниченным оператором в $L_p(\Omega)$ и его норма вследствие (48) и неравенства $\|Sf\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \leqslant \Lambda_p\|f\|_{L_p(\Omega)}$ [13, с. 66] удовлетворяет оценке

$$\|P_s(a'')\|_{L_p(\Omega)} \leqslant q(\Lambda_p)\|a''\|_{L_p(\Omega)},$$

где

$$q(\Lambda_p) = \max_{k=\overline{1,3},\ \lambda,\mu,\delta=1,2}[q_{1k}^{\lambda\mu}(\Lambda_p), q_{2\delta}^{\lambda\mu}(\Lambda_p)], \quad q_{1k}^{\nu\beta}(\Lambda_p) = 2^{2-\delta}p_{2\delta-11}^{\lambda\mu}(\Lambda_p)1_{\lambda\mu}\|f_{2\delta-1k}^{\nu\beta}\|_{C(\overline{\Omega})} +$$

$$+ 2p_{11+\gamma}^{\lambda\mu}(\Lambda_p)1_{\lambda\mu}\|\delta_{0\gamma}\varphi_{0,\gamma\delta}^{k,\nu\beta}\|_{C(\overline{\Omega})}1^\delta + p_{32}^{\lambda\mu}(\Lambda_p)1_{\lambda\mu}\|\varphi_{0,\delta 3}^{k,\nu\beta}\|_{C(\overline{\Omega})}1^\delta, \quad k = \overline{1,3},$$

$$q_{2k}^{\nu\beta}(\Lambda_p) = 2p_{21}^{\lambda\mu}(\Lambda_p)1_{\lambda\mu}\|f_{2k}^{\nu\beta}\|_{C(\overline{\Omega})} + 2p_{21+\gamma}^{\lambda\mu}(\Lambda_p)1_{\lambda\mu}\|\delta_{2\gamma}\varphi_{2,\gamma\delta}^{k,\nu\beta}\|_{C(\overline{\Omega})}1^\delta, \quad k,\nu,\beta = 1,2;$$

$$p_{j1}^{\lambda\lambda}(\Lambda_p) = (1+\Lambda_p^2)b_j + [2 + (1+\Lambda_p)^2]a_j + (1+\Lambda_p)(3+\Lambda_p)(1+\Lambda_p^2)l_ja_j^2,$$

$$p_{j2}^{\lambda\lambda}(\Lambda_p) = (1+\Lambda_p)[(3+\Lambda_p)l_ja_j + 1]/2, \quad p_{j3}^{\lambda\lambda}(\Lambda_p) = (1+\Lambda_p)[(3+\Lambda_p)a_j + 2\|d_{n_j}^1\|_{C(\overline{\Omega})}], \quad j,\lambda = 1,2;$$

$$p_{j1}^{12}(\Lambda_p) = (1+\Lambda_p)^2a_j[1 + (1+\Lambda_p^2)l_ja_j] + (1+\Lambda_p^2)b_j, \quad p_{j2}^{12}(\Lambda_p) = (1+\Lambda_p)[1 + (1+\Lambda_p)l_ja_j]/2,$$

$$p_{j3}^{12}(\Lambda_p) = (1+\Lambda_p)[2\|d_{n_j}^1\|_{C(\overline{\Omega})} + (1+\Lambda_p)a_j], \quad j = 1,2;$$

$$p_{31}^{\lambda\mu}(\Lambda_p) = (1/2)(2+\Lambda_p+\Lambda_p^2)\|1/D_0^{1313}\|_{C(\overline{\Omega})}, \quad p_{32}^{\lambda\mu}(\Lambda_p) = 1+\Lambda_p, \quad \lambda,\mu = 1,2;$$

$$a_j = \|d_{n_j}^1\|_{C(\overline{\Omega})} + \|d_{n_j}^2\|_{C(\overline{\Omega})}, \quad b_j = \|1/D_{n_j}^{1212}\|_{C(\overline{\Omega})}/4, \quad l_j = \|1/d_{n_j}^1\|_{C(\overline{\Omega})}, \quad n_j = 2(j-1), \quad j = 1,2;$$

здесь символ $a^{\lambda\mu}1_{\lambda\mu}$ означает суммирование $\Sigma_{\lambda,\mu}a^{\lambda\mu}$, $\Lambda_p = \|S\|_{L_p(\Omega)}$.

Пусть выполнено условие

$$q(1) < 1, \tag{49}$$

где $q(1)$ – значение функции $q(\Lambda_p)$ при $\Lambda_p = 1$. Отметим, что в случае изотропных оболочек $q(\Lambda_p) = 0$.

Несложно видеть, что $q(\Lambda_p)$ представляет собой непрерывную функцию переменной Λ_p. Так как Λ_p непрерывна по p и $\Lambda_2 = 1$ [13, с. 270], то в силу (49) найдётся такое число $\varepsilon > 0$, что выполняется неравенство $q(\Lambda_p) < 1$, если $2 < p \leqslant 2+\varepsilon < 4/(2-\beta)$. Тогда линейный оператор $P_s(a'')$ в пространстве $L_p(\Omega)$, $2 < p \leqslant 2+\varepsilon$, будет сжимающим. Следовательно, существует обратный оператор $(I - P_s)^{-1}$, ограниченный в $L_p(\Omega)$, применив который к уравнению (47), для производных второго порядка обобщённых перемещений получим представление

$$a'' = a_c''(a) + a_\chi''(a) + a_F''(z), \tag{50}$$

где $a_c''(a) = (I-P_s)^{-1}P_c(a)$, $a_\chi''(a) = (I-P_s)^{-1}P_\chi(a)$, $a_F''(z) = (I-P_s)^{-1}P_F(z)$, I – тождественный оператор.

Заметим, что $a''_c(a)$ – линейный вполне непрерывный и $a''_\chi(a)$ – нелинейный ограниченный операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, причём для $a''_\chi(a)$ справедлива оценка (43); $a''_F(z) \in L_p(\Omega)$ – известная функция, зависящая от внешних сил.

С учётом представления (50) операторы $\omega^0_{je}(a)$ и $w_{3e}(a)$, входящие в систему (42), запишем в виде

$$\omega^0_{je}(a) = \omega^0_{je,c}(a) + \omega^0_{je,\chi}(a) + \omega^0_{je,F}(z), \quad j = 1,2, \quad w_{3e}(a) = w_{3e,c}(a) + w_{3e,\chi}(a) + w_{3e,F}(z),$$

где $\omega^0_{je,c}(a)$, $w_{3e,c}(a)$ – линейные вполне непрерывные и $\omega^0_{je,\chi}(a)$, $w_{3e,\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$; $\omega^0_{je,F}(z), w_{3e,F}(z) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ – известные функции, зависящие от внешних сил. Тогда система (42) преобразуется к эквивалентному виду

$$a - K(a) - G(a) = a_* + \widetilde{a}_F, \tag{51}$$

где

$$K = (K_1, \ldots, K_5), \quad G = (G_1, \ldots, G_5), \quad a_* = (w_{1*}, w_{2*}, w_{3*}, \psi_{1*}, \psi_{2*}),$$
$$\widetilde{a}_F = (\widetilde{w}_{1F}, \widetilde{w}_{2F}, \widetilde{w}_{3F}, \widetilde{\psi}_{1F}, \widetilde{\psi}_{2F}), \quad \omega^0_{1*} = w_{2*} + iw_{1*}, \quad \omega^0_{2*} = \psi_{2*} + i\psi_{1*},$$
$$K_{3(n-1)+j}(a) = -\mathrm{Re}\,[i^j\omega^0_{ne,c}(a)], \quad G_{3(n-1)+j}(a) = -\mathrm{Re}\,[i^j\omega^0_{ne,\chi}(a) + \omega^0_{n\chi}(a)], \quad n, j = 1,2;$$
$$K_3(a) = w_{3e,c}(a), \quad G_3(a) = w_{3e,\chi}(a) + w_{3\chi}(a), \quad \widetilde{w}_{jF} = -\mathrm{Re}\,[i^j(\omega^0_{1e,F} + \omega^0_{1F})],$$
$$\widetilde{\psi}_{jF} = -\mathrm{Re}\,[i^j(\omega^0_{2e,F} + \omega^0_{2F})], \quad j = 1,2, \quad \widetilde{w}_{3F} = w_{3e,F} + w_{3F}.$$

Отметим, что $K(a)$ – линейный вполне непрерывный и $G(a)$ – нелинейный ограниченный операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для $G(a)$ имеет место оценка (44); $\widetilde{a}_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$ – известная функция, зависящая от внешних сил, компоненты вектора a_* задаются формулами (28).

Покажем, что уравнение $a - K(a) = 0$ имеет лишь нулевое решение в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p \leqslant 2 + \varepsilon$. Если $a \in W_p^{(2)}(\Omega)$ – ненулевое его решение, то ему по формулам $\rho^j(z) = \rho^j_e(a)(z)$, $\mu_k(t) = \mu_{ke}(a)(t)$ (операторы $\rho^j_e(a)$, $\mu_{ke}(a)$ определены в (40)) соответствуют функции $\rho^j(z)$, $\mu_k(t)$, которые в свою очередь по формулам $\Phi_k(z) = \Phi_{ke}(a)(z)$, $\Psi_j(z) = \Psi_{je}(a)(z)$ (операторы $\Phi_{ke}(a)$, $\Psi_{je}(a)$ определены в (41)) определяют голоморфные функции $\Phi_k(z)$ $(k = 1,2)$, $\Psi_j(z)$ $(j = \overline{1,3})$, причём выполнены условия $\Psi_j(0) = 0$, $j = \overline{1,3}$. Тогда вектор a удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\omega^0_j - \omega^0_{je}(a) = 0, \quad j = 1,2, \quad w_3 - w_{3e}(a) = 0,$$

следовательно, является решением системы линейных однородных уравнений равновесия, удовлетворяющим линейным однородным граничным условиям. Рассуждая так же, как и в случае системы (24), приходим к заключению, что вектор a удовлетворяет системе $e^0_{jk} = 0$, $\gamma^1_{jk} = 0$, $\gamma^0_{j3} = 0$, $j, k = 1,2$. Решая её, для компонент вектора a получаем представления

$$w_1 = c_4[\widetilde{k}_2(\alpha^2) - k^1_1(\alpha^1)] - c_5\alpha^2 k^0_1(\alpha^1) + c_6 k^0_1(\alpha^1) - c_0\alpha^2 + c_1,$$
$$w_2 = c_5[\widetilde{k}_1(\alpha^1) - k^1_2(\alpha^2)] - c_4\alpha^1 k^0_2(\alpha^2) + c_6 k^0_2(\alpha^2) + c_0\alpha^1 + c_2,$$
$$w_3 = -c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6, \quad \psi_1 = c_4, \quad \psi_2 = c_5,$$
$$k^m_j(\alpha^j) = \int_0^{\alpha^j} x^m k_j(x)\,dx, \quad m = 0,1, \quad \widetilde{k}_j(\alpha^j) = \int_0^{\alpha^j} k^0_j(x)dx, \quad j = 1,2, \tag{52}$$

где c_j – произвольные действительные постоянные, откуда с учётом условий $\Psi_j(0) = 0$, $j = 2,3$, $w_3(0) = 0$ будем иметь $w_1 = -c_0\alpha^2 + c_1$, $w_2 = c_0\alpha^1 + c_2$, $w_3 = \psi_1 = \psi_2 \equiv 0$. Подставляя эти значения обобщённых перемещений в соотношения для операторов $f_e^j(a)$, $\varphi_{ke}(a)$ из (6), (8), получаем, что $f_e(a) \equiv 0$, следовательно, $\rho^j(z) \equiv 0$, $j = \overline{1,3}$. С другой стороны, для $\rho^1(z)$ справедливо представление (29), откуда следует, что $c_0 = 0$. Тогда с учётом условия $\Psi_1(0) = 0$ будем иметь $c_1 = c_2 = 0$. Итак, существует обратный оператор $(I-K)^{-1}$, ограниченный в $W_p^{(2)}(\Omega)$, с помощью которого уравнение (51) сводится к эквивалентному уравнению

$$a - G_*(a) = a_c + a_F, \tag{53}$$

где $G_*(a) = (I-K)^{-1}G(a)$, $a_c = (I-K)^{-1}a_*$, $a_F = (I-K)^{-1}\widetilde{a}_F$.

Заметим, что вектор a_c, зависящий от шести произвольных постоянных, является решением однородной системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям. Поэтому для его компонент справедливы представления (52).

Также отметим, что вектор a_F в (53) зависит только от внешних сил и $a_F = 0$, если внешние силы отсутствуют.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d), (e). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $G_*(a)$ – нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для любых вектор-функций $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j)$ $(j = 1,2)$ выполняется оценка

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant c_*(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^1\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} + $$
$$+ \|w_3^2\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \tag{54}$$

где c_* – известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

2) $a_c, a_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$.

Справедливость леммы 3 вытекает из леммы 2 вследствие указанных выше свойств операторов $(I-K)^{-1}$ и G.

Исследуем разрешимость уравнения (53) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p \leqslant 2+\varepsilon$. Используя оценку (54), для любых $a^j \in W_p^{(2)}(\Omega)$ $(j = 1,2)$, принадлежащих шару $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$, получаем

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant q_*\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad q_* = 2c_*r(1+r).$$

Предположим, что радиус r шара, внешние силы и вектор a_c таковы, что выполняются неравенства

$$q_* < 1, \quad \|a_c + a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1-q_*)r. \tag{55}$$

Тогда к уравнению (53) можно применить принцип сжатых отображений [17, с. 146], согласно которому уравнение (53) в шаре $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$ имеет единственное решение вида $a = \mathfrak{R}(a_c + a_F) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, которое можно представить в виде

$$a = a_0 + a^*, \quad a_0 = \mathfrak{R}(a_c + a_F) - \mathfrak{R}(a_c), \quad a^* = \mathfrak{R}(a_c), \tag{56}$$

где $\mathfrak{R}$ – резольвента оператора G_*, $a_0 = (w_1^0, w_2^0, w_3^0, \psi_1^0, \psi_2^0)$, $a^* = (w_1^*, w_2^*, w_3^*, \psi_1^*, \psi_2^*)$.

Заметим, что если внешняя нагрузка отсутствует, т.е. $a_F = 0$, то вектор a_0 нулевой. Тогда вектор $a = a^*$ – это вектор "жёстких смещений" оболочки, т.е. обращает в нуль компоненты деформации γ_{jk}^l, $j,k = \overline{1,3}$, $l = 0,1$. Необходимо отметить, что эти "жёсткие смещения" отличаются от реальных жёстких перемещений оболочки как абсолютно твердого тела. Решая систему $\gamma_{jk}^l = 0$, $j,k = \overline{1,3}$, $l = 0,1$, для "жёстких смещений" получаем явные выражения

$$w_1^* = c_4[\widetilde{k}_2(\alpha^2) - k_1^1(\alpha^1)] - c_5\alpha^2k_1^0(\alpha^1) + c_6k_1^0(\alpha^1) - c_0\alpha^2 + c_1 - c_4^2\alpha^1/2 - c_4c_5\alpha^2/2,$$

$$w_2^* = c_5[\widetilde{k}_1(\alpha^1) - k_2^1(\alpha^2)] - c_4\alpha^1k_2^0(\alpha^2) + c_6k_2^0(\alpha^2) + c_0\alpha^1 + c_2 - c_5^2\alpha^2/2 - c_4c_5\alpha^1/2,$$

$$w_3^* = -c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6, \quad \psi_1^* = c_4, \quad \psi_2^* = c_5,$$

где c_j – произвольные действительные постоянные.

Вектор a_0 определяется внешними силами, действующими на оболочку, вектором a_c и удовлетворяет неравенствам [17, с. 149]

$$\|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}/(1+q_*) \leqslant \|a_0\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant \|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}/(1-q_*).$$

Вернёмся к условиям разрешимости (39), в которых под $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ будем понимать решение задачи (1), (2). Тогда при помощи системы (1) условия разрешимости преобразуем к виду

$$\iint\limits_{\Omega} R^j d\alpha^1\, d\alpha^2 + \int\limits_{\Gamma} P^j\, ds = 0, \quad j=1,2, \quad \iint\limits_{\Omega}(R^1\alpha^2 - R^2\alpha^1)\, d\alpha^1\, d\alpha^2 + \int\limits_{\Gamma}(P^1\alpha^2 - P^2\alpha^1)\, ds = 0,$$

$$\iint\limits_{\Omega}[R^1k_1^0(\alpha^1) + R^2k_2^0(\alpha^2) + R^3]\, d\alpha^1\, d\alpha^2 + \int\limits_{\Gamma}[P^1k_1^0(\alpha^1) + P^2k_2^0(\alpha^2) + P^3]\, ds = 0,$$

$$\iint\limits_{\Omega}\{R^1[\widetilde{k}_2(\alpha^2) - k_1^1(\alpha^1)] - R^2\alpha^1k_2^0(\alpha^2) - R^3\alpha^1 + L^1 + R^1w_3\}\, d\alpha^1\, d\alpha^2 +$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\{P^1[\widetilde{k}_2(\alpha^2) - k_1^1(\alpha^1)] - P^2\alpha^1k_2^0(\alpha^2) - P^3\alpha^1 + N^1 + P^1w_3\}\, ds = 0,$$

$$\iint\limits_{\Omega}\{R^1\alpha^2k_1^0(\alpha^1) - R^2[\widetilde{k}_1(\alpha^1) - k_2^1(\alpha^2)] + R^3\alpha^2 - L^2 - R^2w_3\}\, d\alpha^1\, d\alpha^2 +$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\{P^1\alpha^2k_1^0(\alpha^1) - P^2[\widetilde{k}_1(\alpha^1) - k_2^1(\alpha^2)] + P^3\alpha^2 - N^2 - P^2w_3\}]\, ds = 0, \tag{57}$$

Нетрудно видеть, что условия (57), в которых под перемещением w_3 понимается величина $w_3 = w_3^0 + w_3^*$, являются не только достаточными, но и необходимыми условиями разрешимости задачи (1), (2). Отметим, что в случае линейных задач слагаемые в (57), содержащие w_3, отсутствуют.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d), (e), (26), (35) и неравенства (55). Тогда для разрешимости задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (57). В случае их выполнения задача (1), (2) имеет в пространстве* $W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p \leqslant 2 + \varepsilon < 4/(2-\beta)$, *обобщённое решение* $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ *вида (56).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань, 1975.
2. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М., 1989.
3. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л., 1978.
4. *Карчевский М.М.* Исследование разрешимости нелинейной задачи о равновесии пологой незакреплённой оболочки // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2013. Т. 155. № 3. С. 105–110.
5. *Тимергалиев С.Н.* Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек. Казань, 2011.
6. *Тимергалиев С.Н.* Доказательство существования решения системы дифференциальных уравнений с частными производными нелинейной теории пологих оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 450–454.

7. *Тимергалиев С.Н.* О существовании решений геометрически нелинейных задач для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2014. № 3. С. 40–56.
8. *Тимергалиев С.Н.* К вопросу о существовании решений нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными теории пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 373–386.
9. *Тимергалиев С.Н., Харасова Л.С.* Исследование разрешимости одной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 651–664.
10. *Тимергалиев С.Н.* Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2017. № 4. С. 59–75.
11. *Тимергалиев С.Н.* К проблеме разрешимости нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82. № 1. С. 98–113.
12. *Тимергалиев С.Н.* Метод интегральных уравнений исследования разрешимости краевых задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих неоднородных оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 238–254.
13. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М., 1988.
14. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.
15. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М., 1979.
16. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1963.
17. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.

Казанский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 27.11.2020 г.
После доработки 27.11.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.