ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 526–535

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956+519.216

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ОТНОСИТЕЛЬНО p-РАДИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

© 2021 г. Д. Е. Шафранов, О. Г. Китаева, Г. А. Свиридюк

Рассматривается задача Шоуолтера–Сидорова для стохастического варианта линейного уравнения Гинзбурга–Ландау в гильбертовых пространствах гладких дифференциальных форм, заданных на компактном ориентированном римановом многообразии без края, со стохастическими процессами в качестве коэффициентов. Это уравнение приводится к абстрактному стохастическому уравнению соболевского типа с относительно радиальным оператором в правой части, для которого устанавливается разрешимость задачи Шоуолтера–Сидорова, а устойчивость решений исследуются с помощью дихотомий. Дифференцирование стохастических процессов, являющихся коэффициентами дифференциальных форм, понимается в смысле производной Нельсона–Гликлиха.

DOI: 10.31857/S0374064121040075

Введение. Линейное обобщённое уравнение Гинзбурга–Ландау

$$(\lambda + \Delta)\alpha_t = \nu\Delta\alpha - ib\Delta^2\alpha \tag{1}$$

изучалось в различных аспектах [1, гл. 2; 2; 3]. Здесь коэффициенты $\lambda, \nu, b \in \mathbb{R}$ описывают параметры системы, i – мнимая единица. Мы будем рассматривать уравнение (1) на d-мерном компактном ориентированном римановом гладком многообразии M без края. Здесь Δ – оператор Лапласа–Бельтрами, а α – k-форма (подробности см. [4, гл. 5, § 2; 5 гл. 6]), коэффициенты которой зависят от t.

Уравнение (1) представляет собой частный случай общего стохастического уравнения соболевского типа вида

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta, \tag{2}$$

где оператор M сильно (L,p)-радиален, $p \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$ [6, гл. 2], а $\eta = \eta(t)$ – стохастический процесс и $\overset{\circ}{\eta} = \overset{\circ}{\eta}(t)$ – его производная Нельсона–Гликлиха [7, гл. 8].

Авторами ранее рассматривалась задача Коши

$$\lim_{t\to 0+}(\eta(t) - \eta_0) = 0 \tag{3}$$

для уравнения (1) и задача Шоуолтера–Сидорова

$$\lim_{t\to 0+} P(\eta(t) - \eta_0) = 0 \tag{4}$$

для уравнения

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta + \omega. \tag{5}$$

(Здесь оператор P – проектор, построенный по операторам L и M.) Были изучены случаи (L,p)-ограниченного оператора M [8, 9] и сильно (L,p)-секториального оператора M [10]. Кроме того были проведены вычислительные эксперименты [11, 12], иллюстрирующие теоретические положения и выводы [10]. Данная статья инициирована работой [13], однако главное её отличие от [13] – рассмотрение задач (3), (4) для уравнений (2), (5) в пространствах стохастических k-форм.

Статья кроме введения и списка литературы содержит три пункта. В п. 1, основываясь на производной Нельсона–Гликлиха, вводятся пространства дифференциальных стохастических **K**-"шумов". В п. 2 описываются расщепления линейных пространств и действия операторов в случае уравнений соболевского типа и их связь с C_0-полугруппами. В п. 3 определяются гильбертовы пространства дифференциальных форм, заданных на гладком компактном римановом многообразии без края, с коэффициентами, являющимися стохастическими процессами. Доказана разрешимость и существование дихотомий, и как следствие устойчивого и неустойчивого инвариантного подпространств для стохастического варианта линейного уравнения Гинзбурга–Ландау.

1. Пространства стохастических K-шумов. Пусть $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, P)$ – вероятностное пространство, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, наделённое борелевой σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией образует гильбертово пространство $\mathbf{L}_2$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$.

Пусть $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ – интервал. Измеримое отображение $\eta : \mathfrak{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$ назовём *стохастическим процессом*, для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ функцию $\eta(\cdot, \omega) : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ – его *траекторией*, а для каждого фиксированного $t \in \mathfrak{I}$ случайную величину $\eta(t, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ – его *сечением*. Стохастический процесс $\eta = \eta(t, \omega)$ назовём *непрерывным*, если п.н. (почти наверное) все его траектории непрерывны. Множество непрерывных на $\mathfrak{I}$ стохастических процессов, чьи сечения лежат в пространстве $\mathbf{L_2}$, образует банахово пространство $\mathbf{CL_2}(\mathfrak{I})$ с нормой

$$\|\eta\|_0^2 = \max_{t \in \mathfrak{I}} D\eta(t, \cdot).$$

Хорошим примером непрерывного стохастического процесса служит винеровский процесс

$$\beta(t, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)t\right), \tag{6}$$

описывающий броуновское движение в модели Энштейна–Смолуховского (подробности смотри в [2]). Здесь случайные величины $\xi_k \in \mathbf{L}_2$ *равномерно ограничены*, т.е. $\mathbf{D}\xi_k \leqslant K$, $k \in \mathbb{N}$, K – некоторая положительная константа, и *попарно независимы*, т.е. $(\xi_k, \xi_l) = 0$, $k \neq l$, $k, l \in \mathbb{N}$. В дальнейшем стохастический процесс $\beta = \beta(t, \omega)$, определяемый равенством (6), будем называть *броуновским движением*.

Пусть $\mathcal{A}_0$ – σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$. Построим подпространство $\mathbf{L}_2^0 \subset \mathbf{L}_2$ случайных величин, измеримых относительно σ-подалгебры $\mathcal{A}_0$. *Условным математическим ожиданием* $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{A}_0)$ случайной величины ξ называется значение $\Pi\xi$, где $\Pi : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2^0$ – ортопроектор. Зафиксируем $\eta \in \mathbf{CL}_2(\mathfrak{I})$ и $t \in \mathfrak{I}$, обозначим $\mathbf{E}_t^\eta = \mathbf{E}(\cdot|\mathcal{N}_t^\eta)$, где $\mathcal{N}_t^\eta$ – σ-алгебра, порождённая случайной величиной $\eta(t)$. *Производной Нельсона–Гликлиха* $\overset{\circ}{\eta}$ *стохастического процесса* η *в точке* $t \in \mathfrak{I}$ называется случайная величина

$$\overset{\circ}{\eta} = \frac{1}{2}\left(\lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^\eta\left(\frac{\eta(t+\Delta t, \cdot) - \eta(t, \cdot)}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^\eta\left(\frac{\eta(t, \cdot) - \eta(t-\Delta t, \cdot)}{\Delta t}\right)\right),$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на $\mathbb{R}$. Производные Нельсона–Гликлиха стохастического процесса $\eta = \eta(t, \omega)$ определяются по индукции и обозначаются через $\overset{\circ}{\eta}{}^{(l)} = \overset{\circ}{\eta}{}^{(l)}(t, \omega)$, $l \in \mathbb{N}$. Пространство тех стохастических процессов, производные Нельсона–Гликлиха которых непрерывны на $\mathfrak{I}$ до порядка l включительно, обозначается через $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2(\mathfrak{I})$. При любом $l \in \mathbb{N}$ пространство $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2(\mathfrak{I})$ является банаховым с нормой

$$\|\eta\|_l^2 = \sum_{k=0}^{l} \max_{t \in \mathfrak{I}} \mathbf{D}\overset{\circ}{\eta}{}^{(k)}(t, \cdot),$$

где $\overset{\circ}{\eta}{}^{(0)} = \eta$. В [14] показано, что $\overset{\circ}{\beta}{}^{(l)} \in \mathbf{C}^l\mathbf{L}_2(\mathbb{R}_+)$ при всех $l \in \mathbb{N}$, причём $\overset{\circ}{\beta}{}^{(l)} = (2t)^{-l}\beta$. Заметим, что обычную производную по t броуновского движения $\beta = \beta(t, \omega)$ (которой, кстати, не существует ни в одной точке $t \in \mathbb{R}_+$) принято называть белым шумом. Поэтому производную Нельсона–Гликлиха $\overset{\circ}{\beta} = (2t)^{-1}\beta$ называют “белым шумом” [8, 13–16], а пространства $\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2(\mathfrak{I})$ – пространствами “шумов”. Отметим ещё, что “белый шум” отвечает модели Энштейна–Смолуховского точнее, чем традиционный белый шум (детали см. в [2]). Для полноты картины укажем ещё один подход [17], при котором белый шум понимается как обобщённая производная броуновского движения. К сожалению, в рассматриваемой ситуации подход [17] очень трудно реализуем технически.

Пусть $\mathcal{H}$ – действительное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Зафиксируем ортонормированный базис $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{H}$. Возьмём любую монотонную последовательность $\mathbf{K} = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющую лишь требованию $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 < \infty$, и произвольную последовательность равномерно ограниченных случайных величин $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L}_2$. Построим *случайную* $\mathbf{K}$*-величину*

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k.$$

Пополнение линейной оболочки случайных $\mathbf{K}$-величин по норме

$$\|\xi\|^2_{\mathbf{H_K L}_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D}\xi_k$$

является гильбертовым пространством. Обозначим его через $\mathbf{H_K L}_2$ и назовём *пространством случайных* $\mathbf{K}$*-величин.*

2. Относительно радиальные операторы и C_0-полугруппы в пространствах K-шумов. Пусть $\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{F})$ – сепарабельное вещественное гильбертово пространство, через $\{\varphi_k\}$ $(\{\psi_k\})$ обозначим базис в этом пространстве. Выберем последовательность случайных величин. Аналогично тому, как это сделано выше, построим пространство $\mathbf{U_K L}_2$ $(\mathbf{F_K L}_2)$ $\mathfrak{U}$-значных ($\mathfrak{F}$-значных) случайных $\mathbf{K}$-величин, элементами которого являются векторы

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k \quad \Big(\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \zeta_k \psi_k\Big),$$

где последовательность $\mathbf{K} = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 < +\infty$, а $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L}_2$ $(\{\zeta_k\} \subset \mathbf{L}_2)$, причём $\|\xi_k\|_{\mathbf{L}_2} \leqslant \mathrm{const}$ $(\|\zeta_k\|_{\mathbf{L}_2} \leqslant \mathrm{const})$.

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ пространство линейных ограниченных операторов, а через $\mathrm{Cl}\,(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ – пространство линейных замкнутых операторов с всюду плотной областью определения действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$. Пространства $\mathbf{U_K L}_2$ и $\mathbf{F_K L}_2$ всюду плотны в $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Справедлива следующая

Лемма 1 [10]. *(i) Включение $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо включение $A \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2;\mathbf{F_K L}_2)$;*

(ii) включение $A \in \mathrm{Cl}\,(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо включение $A \in \mathrm{Cl}\,(\mathbf{U_K L}_2;\mathbf{F_K L}_2)$.

В силу леммы 1 все результаты [7, гл. 2] можно перенести на пространства случайных $\mathbf{K}$-величин $\mathbf{U_K L}_2$ и $\mathbf{F_K L}_2$.

Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathrm{Cl}\,(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Через $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ обозначим *L-резольвентное множество*, а через $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ – *L-спектр оператора M*.

Оператор-функции $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ называются *правой L-резольвентой* и *левой L-резольвентой* оператора M соответственно, а функции $(p+1)$-го переменного $\mu_q \in \rho^L(M)$, $q = \overline{0,p}$, определяемые равенствами $R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p}(\mu_q L - M)^{-1}L$ и $L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} L(\mu_q L - M)^{-1}$, – *правой (L,p)-резольвентой* и *левой (L,p)-резольвентой* оператора M соответственно.

Определение 1. Оператор M называется *p-радиальным относительно оператора* L, или (L,p)*-радиальным*, если он удовлетворяет двум условиям:

(i) существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что $\mu \in \rho^L(M)$ для любого $\mu > a$;

(ii) существует постоянная $K > 0$ такая, что при любых $\mu_k > a$, $k = \overline{0,p}$, и каждом $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{U_K L_2})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{F_K L_2})}\} \leqslant K\left(\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)^n\right)^{-1}.$$

Оператор M называется *сильно* (L,p)*-радиальным слева*, если он (L,p)-радиален и существует линеал $\mathbf{F}$, плотный в $\mathbf{F_K L_2}$, такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\| \leqslant \mathrm{const} \times (\lambda - a)^{-1}\left(\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)\right)^{-1}$$

для всех $f \in \mathbf{F}$ при любых λ, μ_0, μ_1, $\mu_p > a$.

Оператор M называется *сильно* (L,p)*-радиальным*, если он сильно (L,p)-радиален слева и

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\| \leqslant \mathrm{const} \times (\lambda - a)^{-1}\left(\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)\right)^{-1}$$

при любых λ, μ_0, μ_1, $\ldots$, $\mu_p > a$.

Лемма 2 [7]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) длины всех цепочек M-присоединённых векторов оператора L ограничены числом p;

(ii) ядро $\ker R^L_{(\mu,p)}$ совпадает с M-корневым пространством оператора L;

(iii) $\ker R^L_{(\mu,p)} \bigcap \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)} = \{0\}$ $(\ker L^L_{(\mu,p)} \bigcap \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)} = \{0\})$.

Определение 2. Отображение $V^\bullet \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathbf{H_K L_2}))$ называется *полугруппой* в гильбертовом пространстве $\mathbf{H_K L_2}$, если $V^\tau V^t = V^{\tau+t}$ для всех $\tau, t \in \mathbb{R}_+$.

Отождествим полугруппу с её графиком $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$. Полугруппу $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ назовём C_0*-полугруппой (сильно непрерывной полугруппой)*, если она сильно непрерывна при $t > 0$ и существует $\lim\limits_{t\to 0+} V^t v = v$ п.н. (т.е. при почти всех $\omega \in \Omega$). Множество $\ker V^\bullet = \{v \in \mathbf{H_K L_2}:$ п.н. $V^t v = 0$ для некоторого $t = t_\nu \in \mathbb{R}_+\}$ назовём *ядром*, а множество $\operatorname{im} V^\bullet = \{v \in \mathbf{H_K L_2}:$ п.н. $v = V^0 v\}$ – *образом* полугруппы $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$.

Теорема 1 [15]. *Пусть M – (L,p)-радиальный оператор. Тогда существует C_0-полугруппа операторов на пространстве* $\mathbf{U_K L_2}$ $(\mathbf{F_K L_2})$.

Полугруппу на пространстве $\mathbf{U_K L_2}$ $(\mathbf{F_K L_2})$ можно представить в виде

$$U^t = s - \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k(p+1)}{t} R^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\right)^{k(p+1)} \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L_2}) \tag{7}$$

$$\left(F^t = s - \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k(p+1)}{t} L^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\right)^{k(p+1)} \in \mathcal{L}(\mathbf{F_K L_2})\right).$$

Лемма 3 [7]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным. Тогда*

$$\operatorname{im} U^\bullet = \overline{\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}} \quad (\operatorname{im} F^\bullet = \overline{\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}}).$$

Пусть M – (L,p)-радиальный оператор. Обозначим $\ker U^\bullet = \mathbf{U^0_K L_2}$, $\ker F^\bullet = \mathbf{F^0_K L_2}$, $\operatorname{im} U^\bullet = \mathbf{U^1_K L_2}$, $\operatorname{im} F^\bullet = \mathbf{U^1_K L_2}$, а через L^k (M^k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathbf{U^k_K L_2}$ $(\operatorname{dom} M \bigcap \mathbf{U^k_K L_2})$ при $k = 0, 1$.

Лемма 4 [10]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) имеют место включения $L_0 \in \mathcal{L}(\mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2; \mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ *и* $M_0 \in \mathrm{Cl}\,(\mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2; \mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$;

(ii) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2; \mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$;

(iii) оператор $H = M_0^{-1}L$ $(G = LM_0^{-1})$ *нильпотентен, причём степень его нильпотентности не превосходит числа* p.

Пусть существует оператор

$$L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2; \mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2) \tag{8}$$

и пространства $\mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{F}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ расщепляются следующим образом:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 = \mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 \bigoplus \mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 \ \text{ и } \ \mathbf{F}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 = \mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 \bigoplus \mathbf{F}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2. \tag{9}$$

Замечание 1. Условия (8) и (9) выполнены, когда гильбертовы пространства $\mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{F}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ рефлексивны или когда оператор M сильно (L,p)-радиален.

Лемма 5 [15]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным и выполнены условия (8), (9). Тогда справедливы включения* $L_1 \in \mathcal{L}(\mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2; \mathbf{F}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$, $M_0 \in \mathrm{Cl}\,(\mathbf{U}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2; \mathbf{F}^0_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$.

Любое из расщеплений (9) пространства эквивалентно существованию соответствующего проектора. Этот проектор имеет вид $s - \lim\limits_{t\to 0+} U^t$.

Теорема 2 [15]. *Пусть M – (L,p)-радиальный оператор. Тогда оператор* $S = L_1^{-1}M_1$ $(T = M_1L_1^{-1})$ *– генератор C_0-полугруппы $U_1^{\bullet}$ $(F_1^{\bullet})$, представляющий собой сужение полугруппы $U^{\bullet}$ $(F^{\bullet})$ на пространство* $\mathbf{U}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ $(\mathbf{F}^1_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$.

Непрерывным стохастическим $\mathbf{K}$*-процессом* назовём отображение $\eta : \mathfrak{I} \to \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$, задаваемое формулой

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \eta_k(t)\varphi_k,$$

если ряд равномерно сходится на любом компакте в $\mathfrak{I}$, где $\{\eta_k\} \subset \mathbf{CL}_2$. Если ряд

$$\overset{\circ}{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overset{\circ}{\eta}_k(t)\varphi_k$$

равномерно сходится на любом компакте в $\mathfrak{I}$ и $\{\eta_k\} \subset \mathbf{C}^1\mathbf{L}_2$, то стохастический $\mathbf{K}$-процесс назовём *непрерывно дифференцируемым по Нельсону–Гликлиху*. Через $\mathbf{C}(\mathfrak{I}; \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ обозначим множество непрерывных процессов, а через $\mathbf{C}^1(\mathfrak{I}; \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ – множество процессов, непрерывно дифференцируемых по Нельсону–Гликлиху.

Рассмотрим линейное стохастическое уравнение соболевского типа

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta. \tag{10}$$

Стохастический $\mathbf{K}$-процесс $\eta \in \mathbf{C}^1(\mathfrak{I}; \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ назовём *решением уравнения (10)*, если при подстановке его в это уравнение п.н. получаем тождество.

Определение 3. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ назовём *фазовым пространством* уравнения (10), если для него выполняются следующие условия:

(i) п.н. каждая траектория решения $\eta = \eta(t)$ уравнения (10) лежит в $\mathfrak{P}$;

(ii) для п.в. $\eta_0 \in \mathfrak{P}$ существует решение уравнения (10), удовлетворяющее условию $\eta(0) = \eta_0$.

Теорема 3 [7]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным и выполнены условия (8), (9). Тогда фазовое пространство уравнения (10) совпадает с образом разрешающей полугруппы вида (7).*

Определение 4. Подпространство $\mathbf{I}_{\mathbf{K}} \subset \mathbf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ называется *инвариантным пространством уравнения (10)*, если при любом $\eta_0 \in \mathbf{I}_{\mathbf{K}}$ решение задачи $\eta(0) = \eta_0$ для уравнения (10) удовлетворяет включению $\eta \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}; \mathbf{I}_{\mathbf{K}})$.

Определение 5. (i) Линейное пространство $\mathbf{I}^+_{\mathbf{K}} \subset \mathfrak{P}$ называется *устойчивым* инвариантным пространством уравнения (10), если существуют такие константы $N_1 \in \mathbb{R}_+$ и $\nu_1 \in \in \mathbb{R}_+$, что

$$\|\eta^1(t)\|_{\mathbf{U_K L_2}} \leqslant N_1 e^{-\nu_1(s-t)} \|\eta^1(s)\|_{\mathbf{U_K L_2}} \text{ при любых } s \geqslant t,$$

где $\eta^1 = \eta^1(t) \in \mathbf{I}^+_{\mathbf{K}}$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Линейное пространство $\mathbf{I}^-_{\mathbf{K}} \subset \mathfrak{P}$ называется *неустойчивым* инвариантным пространством уравнения (10), если существуют такие константы $N_2 \in \mathbb{R}_+$ и $\nu_2 \in \mathbb{R}_+$, что

$$\|\eta^2(t)\|_{\mathbf{U_K L_2}} \leqslant N_2 e^{-\nu_2(t-s)} \|\eta^2(s)\|_{\mathbf{U_K L_2}} \text{ при любых } t \geqslant s,$$

где $\eta^2 = \eta^2(t) \in \mathbf{I}^-_{\mathbf{K}}$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Если фазовое пространство расщепляется на прямую сумму $\mathfrak{P} = \mathbf{I}^+ \bigoplus \mathbf{I}^-$, то говорят, что решения уравнения (10) имеют *экспоненциальную дихотомию.*

Обозначим $\sigma^L_+(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re}\mu < 0\}$ и $\sigma^L_-(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re}\mu > 0\}$.

Теорема 4 [15]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным, выполнены условия (8), (9) и $\sigma^L(M) = \sigma^L_+(M) \bigcup \sigma^L_-(M)$, причём $\sigma^L_+(M)$ – непустое ограниченное множество. Тогда решения уравнения (10) имеют экспоненциальную дихотомию.*

Следствие 1. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным и выполнены условия (8), (9). Если $\sigma^L(M) = \sigma^L_+(M)$, то фазовое пространство совпадает с устойчивым инвариантным пространством, а если $\sigma^L(M) = \sigma^L_-(M)$, то – с неустойчивым инвариантным пространством.*

Далее, рассмотрим неоднородное уравнение

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta + \omega, \tag{11}$$

где вектор-функция ω принадлежит пространству $C^\infty(\mathfrak{I}; \mathbf{F_K L_2})$, $\mathfrak{I} = [0, t)$. Пусть M – (L,p)-радиальный оператор и выполнены условия (8), (9), тогда уравнение (11) можно рассматривать в виде системы двух уравнений

$$H\dot{\eta}^0 = \eta^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)\omega^0,$$

$$\dot{\eta}^1 = S\eta^1 + L_1^{-1}Q\omega^1. \tag{12}$$

В силу леммы 4 оператор H нильпотентен, поэтому задача Коши $\eta^0(0) = \eta^0_0$ для уравнения (12) неразрешима при

$$\eta^0_0 \neq -\sum_{q=0}^{p} H^p M_0^{-1} \frac{d^q\omega^0}{dt^q}(0).$$

Следовательно, для однозначной разрешимости задачи Коши $\eta(0) = \eta_0$ для уравнения (11) необходимо на вектор η_0 накладывать дополнительные условия, зависящие от правой части уравнения.

В силу сказанного выше в качестве начальных условий будем рассматривать условия Шоуолтера–Сидорова

$$\lim_{t\to 0+} (R^L_\alpha(M))^{p+1}(\eta(L) - \eta_0) = 0. \tag{13}$$

Пусть M – (L,p)-радиальный оператор и выполнены условия (8), (9), тогда соотношение (13) эквивалентно условию

$$P(\eta(0) - \eta_0) = 0.$$

Решение $\eta = \eta(t)$ уравнения (11) называется *решением задачи* (11), (13), если

$$\lim_{t\to 0_+} (R^L_\alpha(M))^{p+1}\eta(t) = (R^L_\alpha(M))^{p+1}\eta_0.$$

Теорема 5 [15]. *Пусть оператор M является (L,p)-радиальным, выполнены условия (8), (9) и включение $\omega \in C^\infty(\mathfrak{I};\mathbf{F_K L}_2)$, $\mathfrak{I}=[0,t)$. Тогда при любом $\eta_0 \in \mathbf{U_K L}_2$ существует решение $\eta \in C^1(\mathfrak{I};\mathbf{U_K L}_2)$ задачи Шоуолтера–Сидорова (13) для уравнения (11), имеющее вид*

$$\eta(t)=U^t\eta_0-\sum_{q=0}^{p}H^pM_0^{-1}\frac{d^q\omega^0}{dt^q}(t)+\int\limits_0^t U^{t-s}\omega\,ds.$$

3. Относительно радиальные операторы в гильбертовых пространствах дифференциальных k-форм со стохастическими коэффициентами. Пусть $\mathcal{M}$ – гладкое компактное ориентированное риманово многообразие без края с локальными координатами $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n.$ Обозначим через $H_k=H_k(\mathcal{M},\Omega)$ пространство гладких дифференциальных k-форм, $k=\overline{0,n},$ со стохастическими коэффициентами. В наших рассмотрениях коэффициенты k-форм могут содержать время $t\in[0,+\infty),$ но дифференциалы от времени в наборе из k-форм невозможны, т.е. дифференциальные формы имеют вид

$$\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,\omega)=\sum_{|i_1,i_2,\ldots,i_k|=k}a_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(t,x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_k},\omega)\,dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k},$$

где $a_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(t,x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_k},\omega)$ – коэффициенты, зависящие, в том числе, от времени, а $|i_1,i_2,\ldots,i_k|$ – мультииндекс.

В пространствах H_k имеется стандартное скалярное произведение

$$(\xi,\varepsilon)_0=\int\limits_{\mathcal{M}}\xi\wedge *\varepsilon,\quad \xi,\varepsilon\in H_k. \tag{14}$$

Здесь $*$ – оператор Ходжа и $\wedge$ – оператор внутреннего умножения k-форм.

Пополняя по непрерывности пространство H_k по норме $\|\cdot\|_0,$ соответствующей скалярному произведению (14), получаем пространство $\mathfrak{H}_k^0.$ Вводя скалярные произведения в пространствах дифференцируемых или дважды дифференцируемых (в смысле Нельсона–Гликлиха) k-форм и пополняя пространства по нормам, соответствующим этим скалярным произведениям, построим пространства $\mathfrak{H}_k^1$ и $\mathfrak{H}_k^2$ соответственно. Для этих гильбертовых пространств имеют место непрерывные вложения $\mathfrak{H}_k^2\subseteq\mathfrak{H}_k^1\subseteq\mathfrak{H}_k^0.$

В построенных пространствах мы можем использовать обобщение лапласиана – оператор Лапласа–Бельтрами $\Delta=d\delta+\delta\,d,$ где d – оператор внешнего умножения дифференциальных форм, а оператор $\delta=*d*$ сопряжён к оператору $d.$

Замечание 2. Оператор Лапласа–Бельтрами на 0-формах, заданных в декартовой системе координат, с точностью до знака совпадает с обычным оператором Лапласа.

Для полученных пространств имеет место обобщение теоремы Ходжа–Кодаиры.

Теорема 6 [10]. *Для пространства $\mathfrak{H}_k^l,$ $l=0,1,2,$ имеет место следующее разложение в прямую сумму подпространств:*

$$\mathfrak{H}_k^l=\mathfrak{H}_{kd}^l\bigoplus\mathfrak{H}_{k\delta}^l\bigoplus\mathfrak{H}_{k\Delta}^l,\quad l=0,1,2,$$

где $\mathfrak{H}_{kd}$ – потенциальные, $\mathfrak{H}_{k\delta}$ – соленоидальные, $\mathfrak{H}_{kd}$ – гармонические формы.

Следствие 2. *В условиях теоремы имеет место разложение*

$$\mathfrak{H}_k^l=(\mathfrak{H}_{k\Delta}^l)^\perp\bigoplus\mathfrak{H}_{k\Delta}^l,\quad l=0,1,2.$$

Аналогично рассуждениям п. 1 введём в рассмотрение *пространства случайных* $\mathbf{K}$-*величин* и *пространства* $\mathbf{K}$-*"шумов"*, определённых на многообразии $\mathcal{M}.$ Пусть $\mathbf{K}=\{\lambda_k\}$ – последовательность такая, что $\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^2<+\infty.$ Через $\{\varphi_k\}\subset\mathfrak{H}_k^0$ и $\{\psi_k\}\subset\mathfrak{H}_k^2$ обозначим системы собственных векторов оператора Лапласа–Бельтрами, ортонормированные относительно скалярного произведения в этих пространствах. Эти системы образуют базисы в пространствах $\mathfrak{H}_k^0$ и $\mathfrak{H}_k^2.$ Элементами пространств $\mathbf{H}_{k\mathbf{K}}^0\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{H}_{k\mathbf{K}}^2\mathbf{L}_2$ являются векторы $\chi=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k\xi_k\varphi_k$

и $\kappa = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \zeta_k \psi_k$, в которых последовательности случайных величин $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L}_2$ и $\{\zeta_k\} \subset \subset \mathbf{L}_2$ таковы, что для дисперсий выполняются неравенства $\mathbf{D}\xi_k \leqslant \mathrm{const}$ и $\mathbf{D}\zeta_k \leqslant \mathrm{const}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. По аналогии с п. 2 построим множество непрерывных процессов $\mathbf{C}(\mathfrak{I}; \mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ и множество непрерывно дифференцируемых по Нельсон–Гликлиху процессов $\mathbf{C}^1(\mathfrak{I}; \mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$.

Далее, перейдём к вопросу о существовании и устойчивости решений уравнения (1) в пространствах $\mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$. Для этого операторы $L, M : \mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 \to \mathbf{H}^2_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$ определим формулами

$$L = \lambda + \Delta, \quad M = \nu\Delta - ib\Delta^2 \tag{15}$$

и уравнение (1) сведём к уравнению

$$L\overset{\circ}{\chi} = M\chi. \tag{16}$$

Лемма 6. *При любых $\nu, \lambda, d \in \mathbb{R}$ оператор M сильно $(L, 0)$-радиален.*

Доказательство. Спектр оператора Лапласа–Бельтрами $\{\sigma_k\} \subset \mathbb{R}$ дискретен, конечнократен и сгущается к $+\infty$ [5, гл. 6]. Рассмотрим L-спектр $\mu_k = (\nu\sigma_k - ib\sigma_k^2)/(\lambda + \sigma_k)$ оператора M, перейдём к пределу при $k \to +\infty$, получим в пределе $\nu - i\infty$, что и означает $(L, 0)$-радиальность.

Теорема 7. *(i) Если $\lambda \notin \{\sigma_k\}$, то фазовое пространство уравнения (16) совпадает с пространством $\mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$.*

(ii) Если $\lambda \in \{\sigma_k\}$, то фазовым пространством уравнения (16) является пространство $\mathcal{P} = \{\varepsilon \in \mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 : \langle \varepsilon, \varphi_l \rangle = 0, \;\; \sigma_l = \lambda\}$.

Доказательство вытекает из теоремы 3 при выборе в качестве пространства $\mathbf{U_K L}_2$ пространства $\mathbf{H}^0_{k\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$.

Относительный спектр оператора M представим в виде двух не пересекающихся компонент $\sigma^L(M) = \sigma^L_+(M) \bigcup \sigma^L_-(M)$, где

$$\sigma^L_+(M) = \left\{\mu_k = \frac{\nu\sigma_k - ib\sigma_k^2}{\lambda + \sigma_k}, \;\; \sigma_k < -\lambda\right\} \;\text{ и }\; \sigma^L_-(M) = \left\{\mu_k = \frac{\nu\sigma_k - ib\sigma_k^2}{\lambda + \sigma_k}, \;\; \sigma_k > -\lambda\right\}.$$

Теорема 8. *(i) При любых $\nu, \lambda \in \mathbb{R}_-$ и $b \in \mathbb{R}$ существуют конечномерное неустойчивое и бесконечномерное устойчивое инвариантные пространства уравнения (16) и решения уравнения (1) имеют экспоненциальную дихотомию.*

(ii) При любых $\nu \in \mathbb{R}_-$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $b \in \mathbb{R}$ фазовое пространство уравнения (16) совпадает с устойчивым инвариантным пространством.

Доказательство следует из теоремы 4.

Наконец, рассмотрим неоднородное стохастическое уравнение Гинзбурга–Ландау

$$(\lambda + \Delta)\chi_t = \nu\Delta\chi - ib\Delta^2\chi + \theta \tag{17}$$

в пространстве дифференциальных форм со стохастическими коэффициентами $\mathbf{H}^q_{0\mathbf{K}}\mathbf{L}_2$, заданных на гладких компактных ориентированных римановых многообразиях без края. Заменив по формуле (15) и обозначив неоднородность $\omega = \Theta$, получим уравнение вида (11) и можем для задачи с условием Шоуолтера–Сидорова

$$P(\chi(0) - \chi_0) = 0 \tag{18}$$

применить теорему 5. Тогда справедлива

Теорема 9. *При любых $\nu, \lambda, b \in \mathbb{R}$, вектор-функции $\omega \in C^\infty(\mathfrak{I}; \mathbf{F_K L}_2)$, $\mathfrak{I} = [0, t)$, и произвольном $\chi_0 \in \mathbf{U_K L}_2$ существует решение $\chi \in C^1(\mathfrak{I}; \mathbf{U_K L}_2)$ задачи Шоуолтера–Сидорова (18) для уравнения (17), имеющее вид*

$$\chi(t) = U^t\chi_0 - \sum_{q=0}^{p} (L_1^{-1}M_1)^p M_0^{-1} \frac{d^q\omega^0}{dt^q}(t) + \int\limits_0^t U^{t-s}\omega\, ds,$$

где

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} \langle \cdot\,, \varphi_k \rangle \varphi_k, \\ \sum\limits_{k: \sigma_k \neq \lambda} e^{\mu_k t} \langle \cdot\,, \varphi_k \rangle \varphi_k, \end{cases}$$

а операторы определяются равенствами

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda + \sigma_k)^{-1} \langle \cdot\,, \varphi_k \rangle \varphi_k, \\ \sum\limits_{k: \sigma_k \neq \lambda} (\lambda + \sigma_k)^{-1} \langle \cdot\,, \varphi_k \rangle \varphi_k, \end{cases}$$

$$M_1 = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\nu\sigma_k - ib\sigma_k^2) \langle \cdot\,, \varphi_k \rangle \varphi_k, \\ \sum\limits_{k: \sigma_k \neq \lambda} (\nu\sigma_k - ib\sigma_k^2) \langle \cdot\,, \varphi_k \rangle \varphi_k, \end{cases} \qquad M_0^{-1} = \begin{cases} \mathbb{O}, \quad \sigma_k \neq \lambda, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \sum\limits_{k: \sigma_k \neq \lambda} (\nu\sigma_k - ib\sigma_k^2)^{-1} \langle \cdot\,, \varphi_k \rangle \varphi_k. \end{cases}$$

Доказательство следует из теоремы 5 с учётом того, что операторы имеют вид (15), а также исходя из стандартного [10] представления полугруппы U^t. Запись операторов L_1^{-1}, M_1, M_0^{-1} соответствует разложению операторов из формулы (15) по собственным функциям используемого в нашем случае оператора Лапласа–Бельтрами.

В заключении отметим, что один из способов обобщить результаты работы состоит в изучении вопросов разрешимости и устойчивости решений нелинейного стохастического уравнения Гинзбурга–Ландау $(\lambda + \Delta)\chi_t = \nu\Delta\chi - ib\Delta^2\chi + \beta\chi^3$, где $\beta \in \mathbb{C}$.

Исследование Г.А. Свиридюка выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Челябинской области (проект 20-41-000001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Загребина С.А., Сагадеева М.А.* Устойчивые и неустойчивые многообразия решений полулинейных уравнений соболевского типа. Челябинск, 2016.
2. *Sagadeeva M.A., Zagrebina S.A., Manakova N.A.* Optimal control of solutions of a multipoint initial-final problem for non-autonomous evolutionary Sobolev type equation // Evolut. Equat. and Contr. Th. 2019. V. 8. № 3. P. 473–488.
3. *Сагадеева М.А., Шулепов А.Н.* Об одной нелинейной модели на основе относительно радиального уравнения соболевского типа // Вестн. Одесского нац. ун-та. Сер. Математика и механика. 2013. Т. 18. № 2. С. 35–43.
4. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М., 2005.
5. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М., 1987.
6. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Koln; Tokyo, 2003.
7. *Gliklikh Yu.E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. London; Dordrecht; Heidelberg; New York, 2011.
8. *Shafranov D.E., Kitaeva O.G.* The Barenblatt–Zheltov–Kochina model with the Showalter–Sidorov condition and additive "white noise" in spaces of differential forms on Riemannian manifolds without boundary // Global and Stoch. Anal. 2018. V. 5. № 2. P. 145–159.
9. *Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridyuk G.A.* Exponential dichotomies in Barenblatt–Zheltov–Kochina model in spaces of differential forms with "noise" // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2019. Т. 12. Вып. 2. С. 47–57.
10. *Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridyuk G.A.* Degenerate holomorphic semigroups of operators in spaces of k-"noises" on Riemannian manifolds // Semigroups of Operators-II Theory and Applications SOTA 2018. Springer Proc. in Math. and Statistics. Cham, 2020. V. 325. P. 279–292.

11. *Kitaeva O.G.* Stable and unstable invariant spaces of one stochastic non-classical equations with a relatively radial operator on a 3-torus // J. of Comp. and Eng. Math. 2020. V. 2. P. 40–49.
12. *Shafranov D.E.* Numerical solutions of the Dzektser equation with "white noise" in the space of smooth differential forms on a torus // J. of Comp. and Eng. Math. 2020. V. 2. P. 58–65.
13. *Favini A., Sviridyuk G.A., Sagadeeva M.A.* Linear Sobolev type equations with relatively p-radial operators in space of "noises" // Mediterranean J. of Math. 2016. V. 6. № 13. P. 4607–4621.
14. *Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A.* Linear Sobolev type equations with relatively p-sectorial operators in space of "noises" // Abstr. and Appl. Anal. 2015. V. 15. 8 p.
15. *Свиридюк Г.А., Манакова Н.А.* Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера–Сидорова с аддитивными "шумами" // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2014. Т. 7. Вып. 1. С. 90–103.
16. *Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A.* One class of Sobolev type equations of higher order with additive "white noise" // Commun. on Pure and Appl. Anal. 2016. V. 1. № 15. P. 185–196.
17. *Melnikova I.V.* Abstract stochastic equations ii solutions spaces of abstract stochastic distributions // J. of Math. Sci. 2003. V. 5. № 116. P. 3620–3656.

Южно-Уральский государственный университет,
г. Челябинск

Поступила в редакцию 23.11.2020 г.
После доработки 23.11.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.