ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 536–551

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

О ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЯДРАМИ, ПРЕДСТАВИМЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ СТИЛТЬЕСА

© 2021 г. В. В. Власов, Н. А. Раутиан

Рассматриваются заданные на положительной полуоси абстрактные линейные неоднородные интегро-дифференциальные уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве, имеющие неограниченные коэффициенты и интегральные слагаемые типа вольтерровой свёртки с ядрами, представимыми интегралом Стилтьеса от убывающей экспоненты. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактную форму интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории вязкоупругости и имеющих ряд других важных приложений. Найдены достаточные условия, при выполнении которых начальная задача для рассматриваемых уравнений корректно разрешима в весовых пространствах Соболева, а также установлена локализация и структура спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений. Предложенный подход может быть применён для исследования других интегро-дифференциальных уравнений такого вида.

DOI: 10.31857/S0374064121040087

1. Введение. Постановка задачи. Работа посвящена исследованию интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Рассматриваемые уравнения представляют собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущённое слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Эти уравнения могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости (см. [1–4]), а также как интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина (см. [5–7]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью, кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси) (см. [8]).

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряжённый положительный оператор, $A^* = A \geqslant \kappa_0$ $(\kappa_0 = \mathrm{const} > 0)$, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Пусть B – симметрический неотрицательный оператор, т.е. $(Bx, y) = (x, By)$ и $(Bx, x) \geqslant 0$ для любых $x, y \in \mathrm{Dom}\,(A)$, удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa\|Ax\|$, $0 < \kappa = \mathrm{const} < 1$, для любого $x \in \mathrm{Dom}\,(A)$, Через I обозначаем тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим для заданного на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ интегро-дифференцильного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + Bu(t) - \int\limits_0^t K(t-s)Au(s)\,ds - \int\limits_0^t Q(t-s)Bu(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \qquad (1)$$

начальную задачу

$$u(+0) = \varphi_0, \qquad (2)$$

$$u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \qquad (3)$$

Предположим, что в уравнении (1) ядра $K(t)$ и $Q(t)$ интегральных операторов имеют следующее представление:

$$K(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu(\tau), \quad Q(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\eta(\tau), \qquad (4)$$

где $d\mu$ и $d\eta$ – положительные меры, порождаемые возрастающими непрерывными справа функциями распределения μ и η соответственно. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1, \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\eta(\tau)}{\tau} < 1. \tag{5}$$

Условия (5) означают, что имеют место включения $K(t), Q(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и оценки $\|K\|_{L_1} < 1$, $\|Q\|_{L_1} < 1$. Если к условиям (5) добавить также условия

$$K(0) = \int_0^{+\infty} d\mu(\tau) \equiv \operatorname{Var}\mu|_0^{\infty} < +\infty, \quad Q(0) = \int_0^{+\infty} d\eta(\tau) \equiv \operatorname{Var}\eta|_0^{+\infty} < +\infty \tag{6}$$

в предположении, что носители функций μ и η принадлежат полуоси $(d_0, +\infty)$, $d_0 > 0$, то ядра $K(t)$ и $Q(t)$ будут принадлежать пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Введём обозначение

$$A_0 := A + B.$$

Согласно известному результату (см. теорему в [9, с. 361]) оператор A_0 является самосопряжённым и положительным. Превратим область определения $\operatorname{Dom}(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $\operatorname{Dom}(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A_0^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Замечание 1. Из свойств операторов A и B следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы AA_0^{-1}, BA_0^{-1} – ограниченные, а оператор A_0^{-1} – компактный.

Интегро-дифференциальное уравнение (1) представляет собой абстрактную форму динамического уравнения вязкоупругости, операторы A и B в котором порождаются следующими дифференциальными выражениями:

$$A = -\rho^{-1}\mu\left(\Delta u + \frac{1}{3}\operatorname{grad}(\operatorname{div} u)\right), \quad B = -\frac{1}{3}\rho^{-1}\lambda \operatorname{grad}(\operatorname{div} u),$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ – вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, среда заполняет ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, ρ – постоянная плотность, $\rho > 0$, λ – коэффициенты Ламе, μ – положительные постоянные, $K(t)$, $Q(t)$ – функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды. На границе области $\partial\Omega$ выполняется краевое условие Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7}$$

В качестве пространства H рассматривается пространство трёхмерных вектор-функций $L_2(\Omega)$. Область определения $\operatorname{Dom}(A)$ принадлежит векторному пространству Соболева $W_2^2(\Omega)$ и естественно выделяется краевым условием (7). Условия (5) имеют конкретный физический смысл (подробнее см. [1, 2]).

В случае, когда оператор B является нулевым, а самосопряжённый положительный оператор A может быть реализован либо как $Ay = -y''(x)$, где $x \in (0, \pi)$, $y(0) = y(\pi) = 0$, либо как $Ay = -\Delta y$ с условиями Дирихле в ограниченной области с достаточно гладкой границей, уравнение (1) представляет собой абстрактную форму уравнения Гуртина–Пипкина, описывающего процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью (см. подробнее [5–8]).

В наших предшествующих работах [10–14] проводилось подробное исследование задачи (1)–(3) в случае, когда ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ представимы в виде рядов убывающих экспонент с положительными коэффициентами, а также в случае, когда оператор

B нулевой. Наш подход к исследованию основан на спектральном анализе оператор-функции (8) (см. ниже), который также даёт возможность установить корректную разрешимость и получить представление решения указанной задачи в виде ряда по экспонентам, соответствующим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Указанные результаты подытожены в монографии [10, гл. 3]. Эти же вопросы рассматриваются в настоящей работе для более общего, чем в [10–14], уравнения (1).

2. Формулировка результатов. Через $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+$ со значениями в H, снабжённое нормой

$$\|u\|_{W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A_0)} \equiv \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}(\|u^{(n)}(t)\|^2_H + \|A_0^{n/2}u(t)\|^2_H)\,dt\right)^{1/2}, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Подробнее о пространствах $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ см. монографию [15, гл. 1]. При $n = 0$ полагаем $W^0_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, при $\gamma = 0$ будем писать $W^n_{2,0} = W^n_2$.

Определение 1. Будем называть вектор-функцию $u(\cdot)$ *сильным* решением задачи (1)–(3), если она принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальным условиям (2), (3).

Преобразование Лапласа сильного решения задачи (1)–(3) с нулевыми начальными условиями $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ имеет следующее представление:

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda).$$

Здесь $\hat{f}(\lambda)$ – преобразование Лапласа вектор-функции $f(t)$, $t \geqslant 0$, оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (1) и имеет следующий вид:

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}(\lambda)A - \hat{Q}(\lambda)B, \tag{8}$$

где, как сказано выше, $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ – преобразования Лапласа ядер $K(t)$ и $Q(t)$ соответственно, т.е., как несложно убедиться,

$$\hat{K}(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\lambda+\tau}, \quad \hat{Q}(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\eta(\tau)}{\lambda+\tau}.$$

Определение 2. Вектор-функцию $u(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ назовём *обобщённым* (*слабым*) решением задачи (1)–(3), если $u(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\langle u^{(1)}(t), v^{(1)}(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} + \langle (A+B)^{1/2}u(t), (A+B)^{1/2}v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} + 2\gamma\langle u^{(1)}(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$

$$-\left\langle \int\limits_0^t K(t-s)(A+B)^{-1/2}Au(s)\,ds, (A+B)^{1/2}v(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$

$$-\left\langle \int\limits_0^t Q(t-s)(A+B)^{-1/2}Bu(s)\,ds, (A+B)^{1/2}v(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} - \langle f(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} - \langle \varphi_1, v(0)\rangle = 0 \tag{9}$$

для любой вектор-функции $v(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, а также условиям (2), (3).

Отметим, что, согласно определению пространства $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, вектор-функции $u^{(1)}(t)$ и $A_0^{1/2}u(t)$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$, поскольку норма в этом пространстве задаётся формулой

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A_0^{1/2})} \equiv \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}(\|u^{(1)}(t)\|^2_H + \|A_0^{1/2}u(t)\|^2_H)\,dt\right)^{1/2}, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Корректная разрешимость. Следующие теоремы дают достаточное условие корректной разрешимости задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4)–(6),* $f'(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geqslant 0$ *и* $f(0) = 0$, *кроме того,* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача (1)–(3) имеет единственное решение в пространстве* $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A_0)} \leqslant d(\|f'(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A_0\varphi_0\|_H + \|A_0^{1/2}\varphi_1\|_H),$$

где константа d *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (4)–(6),* $f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geqslant 0$ *и, кроме того,* $\varphi_0 \in H_{1/2}$, $\varphi_1 \in H$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача (1)–(3) имеет обобщённое решение в пространстве* $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, *для которого справедлива следующая оценка:*

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A_0^{1/2})} \leqslant d(\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H + \|\varphi_1\|_H),$$

где константа d *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Спектральный анализ. Отметим, что в работах [13, 14] изучались интегро-дифференциальные уравнения с сингулярными ядрами.

Перейдём к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнены условия (4)–(6). Имеет место

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (4)–(6). Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *лежит в открытой левой полуплоскости* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ *и справедливо неравенство*

$$\|A^{1/2}L^{-1}(\lambda)A^{1/2}\| \leqslant \mathrm{const}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \gamma > 0. \tag{10}$$

Условия (5) являются существенными для устойчивости решения задачи (1)–(3).

Замечание 2. При нарушении условия (5), т.е. при выполнении неравенства

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} > 1, \tag{11}$$

в правой полуплоскости может оказаться бесконечное число вещественных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$.

Поясним это замечание, рассмотрев следующий частный случай: функция $\eta(\tau)$ и оператор B нулевые, $\eta(\tau) = 0$ и $B = 0$, а функция $\mu(\tau)$ является ступенчатой функцией, имеющей представление

$$\mu(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi[\gamma_j, \gamma_{j+1}),$$

где $\chi[\gamma_j, \gamma_{j+1})$ – характеристические функции полуинтервалов $[\gamma_j, \gamma_{j+1})$, $0 < \gamma_j < \gamma_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, и $\gamma_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. В этом случае условие (11) примет вид

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} > 1.$$

При этом оператор-функция $L(\lambda)$ представляется в виде $L(\lambda) = \lambda^2 I + A - \widehat{K}(\lambda)$, где

$$\widehat{K}(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda + \gamma_j}.$$

В силу сделанных предположений относительно оператора A его собственные векторы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис пространства H. Пусть вектору e_j отвечает собственное значение a_j $(Ae_j = a_j e_j)$. Тогда $a_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Рассмотрим скалярные функции

$$l_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n - a_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda + \gamma_j},$$

являющиеся сужениями оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерные подпространства, натянутые на собственные векторы e_n. Тогда уравнение $l_n(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, может быть записано в виде $\varphi_n(x) = \psi(x)$, где

$$\varphi_n(x) = \frac{x^2}{a_n} + 1, \quad \psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{x + \gamma_j}.$$

Заметим, что на полуоси $[0, +\infty)$ функция $\psi(x)$ является монотонно убывающей и достигает на ней своего максимума при $x = 0$ и что этот максимум равен $\sum_{j=1}^{\infty}(c_j/\gamma_j) > 1$. Поэтому график функции $\psi(x)$ пересекается с графиками парабол $\varphi_n(x)$ при положительных значениях x_n, являющихся собственными значениями оператор-функции $L(\lambda)$. При этом с ростом n нули x_n будут стремиться к точке x^*, являющейся решением уравнения $\psi(x) = 1$ при положительных x, поскольку $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

В случае $\sum_{j=1}^{\infty}(c_j/\gamma_j) = 1$ точка $\lambda = 0$ является собственным значением оператор-функции $L(\lambda)$ бесконечной кратности.

Следующие теоремы 4 и 5 доказаны в нашей работе [12].

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (4)–(6) и носители мер $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$ принадлежат отрезку $[d_1, d_2]$, где $(0 < d_1 < d_2 < +\infty)$. Тогда для любого сколь угодно малого $\theta_0 > 0$ существует такое число $R_0 > 0$, что спектр оператор-функции $L(\lambda)$ принадлежит множеству*

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0, \quad |\lambda| < R_0\} \bigcup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2\},$$

где $\alpha_1 = \alpha_0 - \theta_0$, $R_0 \geqslant \max(d_2, -\alpha_0 + \theta_0)$,

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{((A+B)f, f)}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \inf_{\|f\|=1} \frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{((A + B + d_2^2 I)f, f)}, \quad f \in D(A).$$

При этом существует такое $\gamma_0 > 0$, что для оператор-функции $L^{-1}(\lambda)$ на множестве $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -R_0\} \bigcup \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma_0\}$ справедлива оценка

$$\|L^{-1}(\lambda)\| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\lambda||\operatorname{Re}\lambda|}.$$

Утверждение. *Для величины α_0 справедлива следующая оценка:*

$$\alpha_0 \geqslant -\frac{1}{2} \|A_0^{-1/2}(K(0)A + Q(0)B)A_0^{-1/2}\|.$$

Замечание 3. Согласно лемме 2.1 из работы [16] оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Отсюда следует, что оператор $A^{-1/2}A_0A^{-1/2} = I + A^{-1/2}BA^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в H. В свою очередь, в силу упомянутой леммы 2.1 из работы [16] и в силу самосопряжённости оператора $A_0 = A + B$ оператор $A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}$ также допускает ограниченное замыкание в пространстве H.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда невещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$ симметрична относительно вещественной оси и состоит из собственных значений конечной алгебраической кратности, причём для любого $\varepsilon > 0$ в области $\Omega_\varepsilon := \Omega \backslash \{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| < \varepsilon\}$ собственные значения являются изолированными, т.е. не имеют точек накопления.*

Отметим, что оператор-функция вида (8) в случае, когда ядра интегральных операторов являются рядами убывающих экспонент с положительными коэффициентами, изучалась в работе [11]. Теоремы 4, 5 представляют собой естественное развитие результатов, изложенных в монографии [10]. Отметим также, что оператор-функция вида (8) в случае, когда ядра интегральных операторов являются суммами дробно-экспоненциальных функций (функций Работнова) с положительными коэффициентами, изучалась в работах [13, 14].

Обозначим через $N(\mu; L(\lambda))$ кратность характеристического числа $\lambda = \mu$ оператор-функции $L(\lambda)$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область. Введём функцию $\nu(r; \Omega; L(\lambda))$ переменной $r \in \mathbb{R}$, представляющую собой функцию распределения в области Ω. Предполагая $L(\lambda)$ аналитической оператор-функцией в области Ω, положим

$$\nu(r; \Omega; L(\lambda)) := \sum_{\substack{\mu \in \Omega \\ |\mu| < r}} N(\mu; L(\lambda)).$$

Причём, если в области $\Omega \bigcap \{\lambda : |\lambda| < r\}$ лежит бесконечное число характеристических чисел функции $L(\lambda)$ или $N(\mu; L(\lambda)) = +\infty$ хотя бы в одной точке $\mu \in \Omega$ с $|\mu| < r$, то полагаем, что $\nu(r; \Omega; L(\lambda)) = +\infty$. Обозначим область

$$\Psi_{\theta,\eta} := \{\lambda : |\lambda| > \eta, \quad |\arg \lambda| < \theta\},$$

где $\pi/2 < \theta < \pi$, причём здесь $-\pi < \arg \lambda \leqslant \pi$. В дальнейшем запись $\nu_1(t) \sim \nu_2(t)$ означает, что $\nu_1(t)/\nu_2(t) \to 1$ при $t \to +\infty$.

Следуя [17], через $\Re$ обозначим множество таких неубывающих функций $\nu(r)$, определённых при достаточно больших вещественных r, что для каждой функции $\nu(r) \in \Re$ существует постоянная $a > 1$, для которой $\nu(ar) \geqslant 2\nu(r)$ при достаточно больших r. Пусть $\Im$ – множество неубывающих функций $\nu(r)$, обладающих свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $\nu(r + \delta r) \leqslant (1 + \varepsilon)\nu(r)$ для всех r из области определения.

Обозначим через $P(\lambda)$ следующую оператор-функцию:

$$P(\lambda) := \lambda^2 I + A + B.$$

Используя теорему 2.1 [17] и теорему 4, получаем, что справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и* $\nu(r; \Psi_{\theta,\eta}; P(\lambda)) \in \Re \bigcap \Im$. *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *в области* $\Psi_{\theta,\eta}$ *состоит из дискретных точек спектра и справедливо соотношение*

$$\nu(r; \Psi_{\theta,\eta}; P(\lambda)) \sim \nu(r; \Psi_{\theta,\eta}; L(\lambda)). \tag{12}$$

Обозначим через $N(r, A_0^{1/2})$ число собственных чисел оператора $A_0^{1/2}$ (подсчитанных с учётом кратности) меньших чем r.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда* $\nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, L(\lambda)) \sim 2N(r, A_0^{1/2})$.

Утверждение следствия немедленно вытекает из теоремы 6 и соотношения

$$P(\lambda) = \lambda^2 I + A_0 = (\lambda I - iA_0^{1/2})(\lambda I + iA_0^{1/2}).$$

Отметим, что в работах [18, 19] получены результаты о корректной разрешимости и получены оценки классических решений задачи вида (1)–(3), основанные на применении теории полугрупп к исследованию интегро-дифференциальных уравнений.

3. Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы 1 приведено в статье [11].

Доказательство теоремы 2. Вначале докажем теорему в случае однородных (нулевых) начальных условий ($\varphi_0 = \varphi_1 = 0$). Для доказательства корректной разрешимости задачи (1)–(3) используем преобразование Лапласа. Напомним основные определения и утверждения, которые будут использоваться далее.

Определение 3. Назовём *пространством Харди* $H_2(\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma, H)$ класс вектор-функций $\hat{f}(\lambda)$ со значениями в H, голоморфных (аналитических) в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > \gamma \geqslant 0\}$, для которых справедливо соотношение

$$\sup_{x>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(x+iy)\|_H^2\,dy < +\infty \quad (\lambda = x+iy).$$

Сформулируем известную теорему Пэли–Винера для вектор-функций в пространстве Харди $H_2(\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma, H)$.

Теорема (Пэли–Винер). *1. Пространство $H_2(\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma, H)$ совпадает с множеством вектор-функций (преобразований Лапласа), представимых в виде*

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,dt, \tag{13}$$

где $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma \geqslant 0$.

2. Для любой вектор-функции $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma, H)$ существует и единственно представление (13), где вектор-функция $f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, и справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\gamma+iy) e^{(\gamma+iy)t}\,dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \gamma \geqslant 0.$$

3. Для вектор-функций $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma, H)$ и $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, связанных соотношением (13), справедливо равенство

$$\|\hat{f}\|^2_{H_2(\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma,H)} \equiv \sup_{x>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(x+iy)\|_H^2\,dy = \int\limits_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|f(t)\|_H^2\,dt \equiv \|f\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}.$$

Сформулированная теорема Пэли–Винера хорошо известна для скалярных функций и имеет естественное обобщение для вектор-функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве.

При доказательстве теоремы 2 будут использоваться следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда существует такое $\gamma > 0$, что оператор-функция $(I - V(\lambda))^{-1}$, где*

$$V(\lambda) = \hat{K}(\lambda) A (\lambda^2 I + A_0)^{-1} + \hat{Q}(\lambda) B (\lambda^2 I + A_0)^{-1}, \tag{14}$$

является аналитической в правой полуплоскости $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda > \gamma\}$ и имеет место неравенство

$$\sup_{\lambda:\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma} \|(I - V(\lambda))^{-1}\| \leqslant \mathrm{const}.$$

Лемма 2. *Справедлива следующая оценка:*

$$\|\lambda(\lambda^2 I + A_0)^{-1}\| \leqslant 1/|\mathrm{Re}\,\lambda|, \quad |\mathrm{Re}\,\lambda| > \gamma.$$

Доказательства лемм 1 и 2 содержатся в статье [12].

Лемма 3. *Множество функций $h(t)$ таких, что $h(0) = 0$, $h(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, является всюду плотным в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$.*

Для удобства читателей, чтобы не загромождать изложение, доказательство леммы 3 перенесём в п. 4.

Вначале изучим задачу с нулевыми начальными данными $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Рассмотрим фундаментальную в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ функций таких, что $f_n^{(1)}(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ и $f_n^{(1)}(0) = 0$.

Для функции $f_n(t)$, согласно теореме 2.1, найдётся единственное сильное решение $u_n(t) \in \in W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ задачи (1)–(3). Отметим, что сильное решение $u_n(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (9), что проверяется непосредственно интегрированием по частям. Заметим далее, что последовательность решений $\{u_n(t)\}$ является фундаментальной в пространстве $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$. Указанное свойство вытекает из теоремы Пэли–Винера, а также следующего утверждения.

Лемма 4. *При сделанных предположениях относительно операторов* A *и* B *справедливы неравенства*

$$\|A_0^{1/2} L^{-1}(\lambda)\| \leqslant \mathrm{const}/\operatorname{Re}\lambda, \tag{15}$$

$$\|\lambda L^{-1}(\lambda)\| \leqslant \mathrm{const}/\operatorname{Re}\lambda, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant \gamma > 0. \tag{16}$$

Также, чтобы не загромождать изложение, перенесём доказательство леммы 4 в п. 4.

На основании оценок (15), (16), согласно теореме Пэли–Винера, получаем

$$\|u_n(t)\|^2_{W^1_{2,\gamma}} = \|u_n^{(1)}(t)\|^2_{L_{2,\gamma}} + \|A_0^{1/2} u(t)\|^2_{L_{2,\gamma}} \leqslant \Big(\sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma} |\lambda| \|L^{-1}(\lambda)\|\Big)^2 \|f_n(\lambda)\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma)} +$$

$$+ \Big(\sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma} \|A_0^{1/2} L^{-1}(\lambda)\|\Big)^2 \|\hat{f}_n(\lambda)\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|f_n(t)\|^2_{L_{2,\gamma}}. \tag{17}$$

Таким образом, по фундаментальной в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)$ последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ мы получаем фундаментальную в пространстве $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ последовательность сильных решений $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$. В силу полноты пространства $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ существует функция $u(t) = = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(t)$, принадлежащая пространству $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ и удовлетворяющая интегральному тождеству (9). Последнее свойство вытекает из непрерывности скалярного произведения. В самом деле, рассмотрим интегральное тождество для сильных решений $u_n(t)$, соответствующих вектор-функциям $f_n(t)$:

$$-\langle u_n^{(1)}(t), v^{(1)}(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} + \langle A_0^{1/2} u_n(t), A_0^{1/2} v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} + 2\gamma\langle u_n(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$

$$- \left\langle \int_0^t K(t-s) A_0^{-1/2} A u_n(s)\, ds, A_0^{1/2} v(t) \right\rangle_{L_{2,\gamma}} - \left\langle \int_0^t Q(t-s) A_0^{-1/2} B u_n(s)\, ds, A v(t) \right\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$

$$- \langle f_n(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} = 0. \tag{18}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в соотношении (18), в силу непрерывности скалярного произведения, получаем, что предельная функция $u(t) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (9) при $\varphi_1 = 0$. Здесь мы использовали то, что операторы $A_0^{-1/2} A A_0^{-1/2}$ и $A_0^{-1/2} B A_0^{-1/2}$, как отмечалось выше, допускают ограниченные замыкания в пространстве H.

Рассмотрим теперь общий случай, а именно задачу (1)–(3) с ненулевыми начальными условиями φ_0 и φ_1. Будем искать решение задачи (1)–(3) в виде

$$u(t) = \cos(A_0^{1/2} t)\varphi_0 + A_0^{-1/2} \sin(A_0^{1/2})\varphi_1 + w(t),$$

где $w(t)$ – неизвестная функция. Очевидно, что функция $w(t)$ является решением следующей задачи с однородными начальными условиями:

$$\frac{d^2w}{dt^2}+A_0w(t)-\int\limits_0^t K(t-s)Aw(s)\,ds-\int\limits_0^t Q(t-s)Bw(s)\,ds=f_1(t),\quad t>0,$$

$$w(+0)=0,$$

$$w^{(1)}(+0)=0,$$

здесь $f_1(t)=f(t)+h(t)$, а вектор-функция $h(t)$ имеет вид $h(t)=h_1(t)+h_2(t)$, где

$$h_1(t)=\int\limits_0^t K(t-s)A(\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0+A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1)\,ds,$$

$$h_2(t)=\int\limits_0^t Q(t-s)B(\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0+A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1)\,ds.$$

Для доказательства утверждения о разрешимости достаточно показать, что для некоторого $\gamma_0\geqslant 0$ справедливо включение $h(t)\in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+,H)$. Интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_0^t e^{-\tau(t-s)}\cos(A_0^{1/2}s)\,ds=(A_0+\tau^2I)^{-1}(\tau(\cos(A_0^{1/2}t)-e^{-\tau t})+A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}t)),\qquad(19)$$

$$\int\limits_0^t e^{-\tau(t-s)}\sin(A_0^{1/2}s)\,ds=(A_0+\tau^2I)^{-1}(A_0^{1/2}(e^{-\tau t}I-\cos(A_0^{1/2}t))+\tau\sin(A_0^{1/2}t)).\qquad(20)$$

В дальнейшем нам потребуются следующие легко проверяемые предложения 1 и 2.

Предложение 1. *При сделанных предположениях справедливо неравенство*

$$\|(A_0+\tau^2I)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{2}\tau^{-2}\|A_0^{-1/2}\|,\quad \tau>0.$$

Доказательство предложения 1 приведено в [12].

Предложение 2. *При сделанных предположениях справедливо неравенство*

$$\|A_0(A_0+\tau^2I)^{-1}\|\leqslant 1,\quad \tau>0.$$

Доказательство предложения 2 очевидно вытекает из спектральной теоремы для оператора A_0.

Далее будем также использовать известные оценки $\|\cos(A_0^{1/2}t)\|_H\leqslant 1$ и $\|\sin(A_0^{1/2}t)\|_H\leqslant 1$, также вытекающие из спектральной теоремы для оператора A_0.

Замечание 4. Из определения оператора A_0 следуют очевидные неравенства

$$\|Ax\|\leqslant\|A_0x\|,\quad \|Bx\|\leqslant\|A_0x\|,\quad x\in\mathrm{Dom}\,(A),$$

из которых, в свою очередь, вытекают неравенства

$$\|AA_0^{-1}\|\leqslant 1,\quad \|BA_0^{-1}\|\leqslant 1.$$

В силу равенств (19), (20) получаем следующее представление для функции $h_1(t)$:

$$h_1(t)=\int_0^t\left(\int_0^{+\infty}e^{-\tau(t-s)}\,d\mu(\tau)\right)A(\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0+A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1)\,ds=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t e^{-\tau(t-s)}A\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0\,ds\right)d\mu(\tau)+\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t e^{-\tau(t-s)}AA_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1\,ds\right)d\mu(\tau)=$$

$$=\int_0^{+\infty}A(A_0+\tau^2I)^{-1}(\tau(\cos(A_0^{1/2}t)-e^{-\tau t}I)+A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}t))\varphi_0\,d\mu(\tau)+$$

$$+\int_0^{+\infty}A(A_0+\tau^2I)^{-1}(A_0^{1/2}(e^{-\tau t}I-\cos(A_0^{1/2}t))+\tau\sin(A_0^{1/2}t))\varphi_1\,d\mu(\tau).\tag{21}$$

Аналогично получаем представление для функции $h_2(t)$:

$$h_2(t)=\int_0^t Q(t-s)B(\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0+A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1)\,ds=$$

$$=\int_0^{+\infty}B(A_0+\tau^2I)^{-1}(\tau(\cos(A_0^{1/2}t)-e^{-\tau t}I)+A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}t))\varphi_0\,d\mu(t)+$$

$$+\int_0^{+\infty}B(A_0+\tau^2I)^{-1}(A_0^{1/2}(e^{-\tau t}I-\cos(A_0^{1/2}t))+\tau\sin(A_0^{1/2}t))\varphi_1\,d\mu(t).$$

Из представления (21) вытекает следующая оценка:

$$\Big\|h_1(t)\|\leqslant\|\int_0^{+\infty}(AA_0^{-1})A_0(A_0+\tau^2I)^{-1}\tau(\cos A_0^{1/2}t)\varphi_0\,d\mu(\tau)\Big\|+$$

$$+\left\|\int_0^{+\infty}(AA_0^{-1})A_0(A_0+\tau^2I)^{-1}e^{-\tau t}\varphi_0\,d\mu(\tau)\right\|+$$

$$+\left\|\int_0^{+\infty}(AA_0^{-1})A_0(A_0+\tau^2I)^{-1}\sin(A_0^{1/2}t)A_0^{1/2}\varphi_0\,d\mu(\tau)\right\|+$$

$$+\left\|\int_0^{+\infty}(AA_0^{-1})A_0^{-1/2}A_0(A_0+\tau^2I)^{-1}A_0^{1/2}e^{-\tau t}\varphi_1\,d\mu(\tau)\right\|+$$

$$+\left\|\int_0^{+\infty}(AA_0^{-1})A_0^{-1/2}A_0(A_0+\tau^2I)^{-1}A_0^{1/2}(\cos(A_0^{1/2}t))\varphi_1\,d\mu(\tau)\right\|+$$

$$+\left\|\int_0^{+\infty}(AA_0^{-1})A_0A_0^{-1/2}(A_0+\tau^2I)^{-1}\tau\sin(A_0^{1/2}t)\varphi_1\,d\mu(\tau)\right\|,$$

в силу которой на основании предложений 1, 2 и замечания 4 получаем

$$\|h_1(t)\| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \|AA_0^{-1}\| \|A_0^{1/2}\tau(A_0+\tau^2 I)^{-1}\| \|\cos(A_0^{1/2}t)\| \|A_0^{1/2}\varphi_0\|\, d\mu(\tau) +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \|AA_0^{-1}\| \|A_0(A_0+\tau^2 I)^{-1}\| e^{-t\tau} \|\varphi_0\|\, d\mu(\tau) +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \|AA_0^{-1}\| \|A_0(A_0+\tau^2 I)^{-1}\| \|\sin(A_0^{1/2}t)\| \|\varphi_0\|\, d\mu(\tau) +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \|AA_0^{-1}\| \|A_0(A_0+\tau^2 I)^{-1}\| \|A_0^{1/2}A_0^{-1/2}\| e^{-t\tau} \|\varphi_1\|\, d\mu(\tau) +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \|AA_0^{-1}\| \|A_0(A_0+\tau^2 I)^{-1}\| \|A_0^{1/2}A_0^{-1/2}\| \|\cos(A_0^{1/2}t)\| \|\varphi_1\|\, d\mu(\tau) +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \|AA_0^{-1}\| \|A_0^{1/2}\tau(A_0+\tau^2 I)^{-1}\| \|\sin(A_0^{1/2}t)\| \|\varphi_1\|\, d\mu(\tau) \leqslant K_1(\|A_0^{1/2}\varphi_0\| + \|\varphi_1\|).$$

Таким образом, справедлива следующая оценка:

$$\|h_1(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \theta_1(\gamma)K_1(\|A_0^{1/2}\varphi_0\| + \|\varphi_1\|), \tag{22}$$

где

$$\theta_1(\gamma) = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}\, dt\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}},$$

с постоянной K_1, не зависящей от векторов φ_0 и φ_1.

Дословно повторяя приведённые неравенства с заменой оператора A на оператор B, получаем оценку

$$\|h_2(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \theta_1(\gamma)K_2(\|A_0^{1/2}\varphi_0\| + \|\varphi_1\|), \tag{23}$$

с постоянной K_2, не зависящей от векторов φ_0 и φ_1.

Объединяя оценки (22), (23), приходим к следующей оценке для вектор-функции $h(t)$:

$$\|h(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \theta_1(\gamma)K(\|A_0^{1/2}\varphi_0\| + \|\varphi_1\|), \quad K = K_1 + K_2,$$

на основании которой заключаем, что вектор-функция $f_1(t) = f(t) + h(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ и для неё справедливо неравенство

$$\|f_1(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + d(\gamma)(\|A_0^{1/2}\varphi_0\| + \|\varphi_1\|), \tag{24}$$

где $d(\gamma) = \theta_1(\gamma)K$. Отсюда получаем обобщённую разрешимость задачи (1)–(3) с ненулевыми начальными данными.

Перейдём к оценкам обобщённых решений. Начнём со случая нулевых начальных данных $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Для фундаментальной в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ и соответствующей ей фундаментальной последовательности решений $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$

установлено неравенство (17). Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (17), в пределе получаем неравенство

$$\|u(t)\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})} \leqslant D\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}$$

с постоянной D, не зависящей от функции $f(t)$. Законность соответствующего предельного перехода установлена в начале доказательства теоремы 2.

Перейдём к случаю ненулевых начальных данных. Принимая во внимание то, что задача с ненулевыми начальными данными сводится к задаче с нулевыми начальными данными и новой правой частью $f_1(t) = f(t) + h(t)$ и учитывая оценку (24), получаем для решения исходной задачи оценку

$$\|u(t)\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})} \leqslant d(\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A_0^{1/2}\varphi_0\| + \|\varphi_1\|)$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции $f(t)$ и векторов φ_0 и φ_1. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Преобразуем оператор-функцию $L(\lambda)$ к виду

$$L(\lambda) = A^{1/2}M(\lambda)A^{1/2},$$

где $M(\lambda) = \lambda^2 A^{-1} + (1 - \hat{K}(\lambda))I + (1 - \hat{Q}(\lambda))\mathcal{K}$, а через $\mathcal{K}$ обозначен оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$. Согласно лемме 2.1 из работы [16] оператор $\mathcal{K}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Кроме того, оператор $\mathcal{K}$ является неотрицательным, т.е. $(\mathcal{K}x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in H$, и симметричным в силу неотрицательности и симметричности оператора B.

Покажем, что оператор-функция $L(\lambda)$ обратима в правой полуплоскости. Рассмотрим форму $(M(\lambda)f, f)$ для $\lambda = x + iy$ таких, что $x > |y|$. Справедлива цепочка неравенств

$$\mathrm{Re}\,(M(\lambda)f,f) = (x^2 - y^2)(A^{-1}f,f) + \left(1 - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{(x+\tau)\,d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2 + y^2}\right)(f,f) +$$

$$+\left(1 - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{(x+\tau)\,d\nu(\tau)}{((x+\tau)^2 + y^2)}\right)(\mathcal{K}f,f) \geqslant (x^2 - y^2)(A^{-1}f,f) + \left(1 - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{x+\tau}\right)(f,f) +$$

$$+\left(1 - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{x+\tau}\right)(\mathcal{K}f,f) \geqslant \left(1 - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right)(f,f) = \delta\|f\|^2, \tag{25}$$

где $\delta = 1 - \int_{d_0}^{+\infty} \tau^{-1}\,d\mu(\tau) > 0$.

Для $\lambda = x + iy$ таких, что $y \geqslant x \geqslant \gamma > 0$ справедливы неравенства

$$\mathrm{Im}\,(M(\lambda)f,f) = 2xy(A^{-1}f,f) + y\int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2 + y^2}(f,f) + y\int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{(x+\tau)^2 + y^2}(\mathcal{K}f,f) \geqslant$$

$$\geqslant 2x^2(A^{-1}f,f) + y\int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2 + y^2}(f,f) + y\int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{(x+\tau)^2 + y^2}(\mathcal{K}f,f) \geqslant \gamma\|f\|^2. \tag{26}$$

Для $\lambda = x + iy$ таких, что $y < -x < -\gamma > 0$, $\gamma > 0$ справедливы неравенства

$$-\mathrm{Im}\,(M(\lambda)f,f) \geqslant 2x^2(f,f) + |y|\int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2 + y^2}(f,f) +$$

$$+|y|\int_{d_0}^{+\infty}\frac{d\nu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(\mathcal{K}f,f)\geqslant\gamma\|f\|^2. \tag{27}$$

Объединяя неравенства (26) и (27), получаем, что в области $\{\lambda=x+iy:|y|>x\geqslant\gamma>0\}$ справедлива оценка

$$|\mathrm{Im}\,(M(\lambda)f,f)|\geqslant\gamma\|f\|^2.$$

В силу произвольности $\gamma>0$ из неравенств (25) и (27) вытекает обратимость оператор-функции $M(\lambda)$, а следовательно, и оператор-функции $L(\lambda)$ в правой полуплоскости. Оценка (10) следует из неравенств (25), (27).

Рассмотрим оператор-функцию $L(\lambda)$ на мнимой оси. Из представлений

$$\mathrm{Re}\,(M(iy)f,f)=-y^2(A^{-1}f,f)+\bigg(1-\int_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\mu(\tau)}{\tau^2+y^2}\bigg)(f,f)+\bigg(1-\int_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\nu(\tau)}{\tau^2+y^2}\bigg)(\mathcal{K}f,f),$$

$$\mathrm{Im}\,(M(iy)f,f)=y\int_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\mu(\tau)}{\tau^2+y^2}(f,f)+y\int_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\nu(\tau)}{\tau^2+y^2}(\mathcal{K}f,f),$$

из условия (5) вытекает, что существует $\delta>0$, при котором для всех таких y, что $|y|<\delta$, справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}\,(M(iy)f,f)\geqslant k(f,f) \tag{28}$$

с некоторой постоянной $k>0$. С другой стороны, справедливо неравенство

$$|\mathrm{Im}\,(M(iy)f,f)|\geqslant|y|\bigg[\int_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\mu(\tau)}{\tau^2+y^2}(f,f)+\int_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\nu(\tau)}{\tau^2+y^2}(\mathcal{K}f,f)\bigg]. \tag{29}$$

Из неравенств (28) и (29) вытекает обратимость оператор-функции $L(\lambda)$ на мнимой оси. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 6. Отметим, что в области $\Psi_{\theta,\eta}$ выполнено неравенство $|\cos\varphi|>|\cos\theta|$, где $\varphi=\arg\lambda$, $r=|\lambda|$, и, следовательно,

$$r^2+2r\tau\cos\varphi+\tau^2\geqslant r^2-2r\tau\cos\theta+\tau^2\geqslant r^2+\tau^2-\cos\theta(r^2+\tau^2)=(1-\cos\theta)(r^2+\tau^2). \tag{30}$$

Из соотношения

$$\int_{d_0}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau+\lambda}=\int_{d_0}^{+\infty}\frac{r\cos\varphi+\tau}{r^2+2r\tau\cos\varphi+\tau^2}\,d\mu(\tau)-i\int_{d_0}^{+\infty}\frac{r\sin\varphi}{r^2+2r\tau\cos\varphi+\tau^2}\,d\mu(\tau)$$

и неравенства (30) следует оценка

$$\bigg|\int_{d_0}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau+\lambda}\bigg|\leqslant d_1\int_{d_0}^{+\infty}\frac{r\,d\mu(\tau)}{r^2+\tau^2}+d_2\int_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\mu(\tau)}{r^2+\tau^2}, \tag{31}$$

где d_1 и d_2 – положительные постоянные.

Несложно видеть, что справедливы неравенства

$$r\int_{d_0}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{r^2(1+\tau^2/r^2)}\leqslant\frac{1}{r}\int_{d_0}^{+\infty}d\mu(\tau)\quad\text{и}\quad\int_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\mu(\tau)}{\tau^2+r^2}\leqslant\frac{1}{2}\int_{d_0}^{+\infty}\frac{\tau\,d\mu(\tau)}{\tau r}=\frac{1}{2r}\int_{d_0}^{+\infty}d\mu(\tau). \tag{32}$$

Аналогичные оценки справедливы для интеграла

$$\left|\int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{\tau+\lambda}\right| \leqslant \frac{k}{r}. \tag{33}$$

Вследствие оценок (31), (32) получаем, что выполнены неравенства

$$|\hat{K}(\lambda)| \leqslant k_1/|\lambda|, \quad |\hat{Q}(\lambda)| \leqslant k_2/|\lambda|, \quad \lambda \in \Psi_{\theta,\eta}, \tag{34}$$

где k_1, k_2 – положительные постоянные.

В свою очередь из неравенств (34) и ограниченности операторов AA_0^{-1} и BA_0^{-1} вытекает, что оператор-функция $S(\lambda) = \hat{K}(\lambda)AA_0^{-1} + \hat{Q}(\lambda)BA_0^{-1}$ в области $\Psi_{\theta,\eta}$ допускает оценку

$$\|S(\lambda)\| \leqslant k_3/|\lambda| \tag{35}$$

с положительной постоянной k_3.

Обозначим через $\mathscr{M}(\lambda)$ оператор-функцию вида

$$\mathscr{M}(\lambda) = L(\lambda)A_0^{-1} = I + \lambda^2 A_0^{-1} - S(\lambda).$$

После переобозначения $\mathscr{H} = A_0^{-1/2}$ получим, согласно оценке (35), что оператор-функция

$$\mathscr{M}(\lambda) = I + \lambda^2\mathscr{H}^2 - S(\lambda)$$

удовлетворяет условию теоремы 2.1 в [17]. Следовательно, справедливо соотношение

$$\nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, \mathscr{M}_0(\lambda)) \sim \nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, \mathscr{M}(\lambda)), \tag{36}$$

где $\mathscr{M}_0(\lambda) = I + \lambda^2\mathscr{H}^2$. В силу очевидных равенств

$$\nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, \mathscr{M}_0(\lambda)) = \nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, P(\lambda)) \ \text{ и } \ \nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, \mathscr{M}(\lambda)) = \nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, L(\lambda))$$

из (36) вытекает доказываемое соотношение (12). Теорема 6 доказана.

4. Дополнение.

Доказательство леммы 3. Пусть $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$. Будем искать функцию $h(t)$, удовлетворяющую условиям: $h(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, $h(0) = 0$ и $\|f(t) - h(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \varepsilon$. Обозначим через $g(t) := e^{-\gamma t}f(t)$ такую вектор-функцию, что $g(t) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ и $\theta(t) := e^{-\gamma t}h(t) \in \in W^1_2(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\|f(t) - h(t)\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} = \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}\|f(t) - h(t)\|^2\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \|e^{-\gamma t}f(t) - e^{-\gamma t}h(t)\|^2\, dt = \int_0^{+\infty} \|g(t) - \theta(t)\|^2\, dt.$$

Таким образом, вопрос о плотности в пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ семейства $\{h(t)\}$ функций таких, что $h(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ и $h(+0) = 0$ сводится к вопросу о плотности в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ семейства $\{\theta(t)\}$ функций таких, что $\theta(t) \in W^1_2(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ и $\theta(+0) = 0$. В свою очередь плотность семейства функций $\{\theta(t)\}$ вытекает из известного результата из монографии [15]. В самом деле, согласно [15, теорема 2.1] семейство бесконечно дифференцируемых финитных вектор-функций всюду плотно в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, H)$. Следовательно, подмножество бесконечно дифференцируемых функций с носителем в $\mathbb{R}_+$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R}_+, H)$. Но указанное семейство, очевидно, принадлежит семейству функций $\{\theta(t)\}$ таких, что $\theta(t) \in$ $\in W_2^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ и $\theta(+0) = 0$, что и доказывает лемму 3.

Доказательство леммы 4. Установим неравенства (15), (16). Оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ представима в виде

$$L^{-1}(\lambda) = (\lambda^2 I + A_0)^{-1}(I - V(\lambda))^{-1}, \tag{37}$$

где оператор-функция $V(\lambda)$ задаётся равенством (14). Непосредственной проверкой несложно убедиться в том, что справедливы неравенства

$$\|A_0^{1/2}(\lambda^2 I + A_0)^{-1}\| \leqslant \mathrm{const}/|\mathrm{Re}\,\lambda|, \quad \|\lambda(\lambda^2 I + A_0)^{-1}\| \leqslant \mathrm{const}/|\mathrm{Re}\,\lambda|. \tag{38}$$

Отметим, что второе неравенство в (38) доказано в лемме 2. Для доказательства первого неравенства, согласно спектральной теореме (см. [9, с. 452–453]), достаточно установить оценку

$$\sup_{\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma} \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda^2 + \alpha} \leqslant \mathrm{const}/|\mathrm{Re}\,\lambda|, \quad \alpha \in \sigma(A_0) \subset [\kappa_0, +\infty).$$

Переходя к вещественной и мнимой части числа $\lambda = \tau + i\nu$, получаем искомое неравенство

$$\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\tau^2 + (\nu - \sqrt{\alpha})^2}\sqrt{\tau^2 + (\nu + \sqrt{\alpha})^2}\right)^{-1} \leqslant \mathrm{const}/|\tau|.$$

Отсюда на основании представления (37), неравенств (38) и теоремы 3 получаем утверждение леммы 4.

Исследование выполнено в рамках Программы развития Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем” при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00288 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
2. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York; London, 1971.
3. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.
4. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator approach to linear // Problems of Hydrodynamics. V. 2. Nonself adjoint Problems for Viscous Fluids. Berlin; Basel; Boston, 2003.
5. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
6. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // J. of Math. Anal. and Appl. 2009. V. 355. P. 1–11.
7. *Лыков А.В.* Проблема тепло- и массообмена. Минск, 1976.
8. *Vlasov V.V., Gavrikov A.A., Ivanov S.A., Knyaz'kov D.Yu., Samarin V.A., Shamaev A. S.* Spectral properties of combined media // J. of Math. Sci. 2010. V. 164. № 6. P. 948–963.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
10. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
11. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Совр. математика. Фунд. направления. 2015. Т. 58. С. 22–42.
12. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Spectral analysis of linear models of viscoelasticity // J. of Math. Sci. 2018. V. 230. № 5. P. 668–672.

13. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и представление решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 574–587.
14. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* A study of operator models arising in problems of hereditary mechanics // J. of Math. Sci. 2020. V. 244. № 2. P. 170–182.
15. *Лионс Ж.П., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
16. *Шкаликов А.А.* Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1988. Т. 177. № 1. С. 96–118.
17. *Радзиевский Г.В.* Асимптотика распределения характеристических чисел оператор-функций, аналитических в угле // Мат. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 396–420.
18. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1122–1126.
19. *Раутиан Н.А.* Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1226–1244.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 27.01.2021 г.
После доработки 27.01.2021 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.