ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 552–571

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© 2021 г. Ю. С. Осипов, В. И. Максимов

На конечном промежутке времени рассматривается управляемая система, описываемая векторным дифференциальным уравнением с правой частью, изменяющей структуру в некоторые моменты времени, расстояние между которыми не может быть меньше некоторой заданной величины. Между двумя соседними моментами изменения структуры правая часть является функцией, липшицевой по фазовым переменным, непрерывной по времени и линейной по управлению и возмущению, которые принимают значения в некоторых выпуклых замкнутых множествах. Предполагается, что в моменты изменения структуры решение системы может испытывать скачок на некоторый вектор, относительно которого известно лишь его направление. На промежутке функционирования системы задана равномерная сетка, в узлах которой измеряются (с ошибкой) значения фазового вектора. Решается задача построения такого алгоритма формирования управления этой системой, который обеспечивает перевод в конечный момент времени траектории системы в минимально возможную окрестность целевого множества. Указывается основанный на конструкциях теории позиционного управления алгоритм решения, устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений.

DOI: 10.31857/S0374064121040099

1. Введение. Постановка задачи. Рассматривается задача управления системой дифференциальных уравнений
$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), v(t), V(t)), \quad t \in T = [0, \vartheta], \tag{1}$$
с начальным состоянием
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0. \tag{2}$$
Здесь $\vartheta = \mathrm{const} \in (0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$ – управление, $v(t) \in \mathbb{R}^p$ и $V(t) \in \mathbb{N}$ – возмущения, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Пользуясь терминологией теории позиционных дифференциальных игр [1], будем говорить, что формированием управления $u(\cdot)$ распоряжается первый игрок. В свою очередь возмущения $v(\cdot)$ и $V(\cdot)$ формирует второй игрок. Функция $V(t)$ кусочно-постоянная и имеет вид
$$V(t) = k \quad \text{при} \quad t \in [a_k^*, a_{k+1}^*), \quad k \in [0 : r], \quad a_k^* < a_{k+1}^*, \quad a_0^* = 0, \quad a_{r+1}^* = \vartheta,$$
где число $r \in \mathbb{N}$ и моменты времени a_k^* находятся в распоряжении второго игрока. Правая часть системы (1) имеет следующую структуру:
$$f(t, x, y, u, v, k) = f_k(t, x, u, u, v), \quad k \in [0 : r].$$
Таким образом,
$$f(t, x, y, u, v, V(t)) = f_k(t, x, y, u, v) \quad \text{при} \quad t \in [a_k^*, a_{k+1}^*), \quad k \in [0 : r].$$
Систему (1) будем записывать также в виде
$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f(t, x(t), y(t), u(t), v(t), V(t)). \tag{3}$$
Начальное состояние последней:
$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{4}$$

Суть рассматриваемой задачи такова. Полагаем, что $u(t) \in P(t) \subset \mathbb{R}^q$, $v(t) \in Q(t) \subset \mathbb{R}^p$, где $P(t)$ и $Q(t)$ являются выпуклыми ограниченными замкнутыми множествами – "ресурсами" первого и второго игроков соответственно. На промежутке T выбрана равномерная сетка $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_m = \vartheta$. В узлах сетки τ_i измеряется (с ошибкой) фазовое состояние системы (1), (2) (системы (3), (4)), т.е. находятся векторы ψ_i^h и ξ_i^h такие, что

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_n \leqslant h, \quad |\psi_i^h - \dot{x}(\tau_i)|_n \leqslant h. \tag{5}$$

Здесь и ниже $h \in (0,1)$ – величина *информационной погрешности*, через $|x|_n$ обозначается евклидова норма вектора x. Кроме того, в моменты a_k^*, $k \in [1:r]$, происходит изменение структуры системы (происходит переключение), также меняются и множества P и Q: $P(t) = P_k$, $Q(t) = Q_k$ при $t \in [a_k^*, a_{k+1}^*)$. Считаем, что функции f_k, а также множества P_k и Q_k известны первому игроку, в то время как моменты переключения a_k^* ему неизвестны. Выбором этих моментов (т.е. управлением $V(t)$) распоряжается второй игрок. Будем также считать, что в моменты a_k^*, $k \in [1:r]$, происходят "скачки" фазовых состояний. Именно, если в момент a_k^* должно реализоваться состояние $\{x(a_k^*), y(a_k^*-)\}$, где $x(a_k^*) = \lim\limits_{t\to a_k^*-} x(t)$, $y(a_k^*-) = \lim\limits_{t\to a_k^*-} y(t)$, то полагаем

$$x(a_k^*) = x(a_k^*+), \quad y(a_k^*) = y(a_k^*+) = y(a_k^*-) + b_k^* e_k,$$

где векторы $e_k \in \mathbb{R}^n$, $|e_k|_n = 1$, и величины $b_k^* \in \mathbb{R}$ выбирает второй игрок. При этом считаем структуру "скачка" частично известной первому игроку. Именно, ему известны векторы e_k, но не известны величины b_k^*. В дальнейшем будем называть моменты a_k^* *моментами скачка.* Функции f_k будем предполагать липшицевыми по x, y и непрерывными по t, u, v.

Обсуждаемая в настоящей работе задача, стоящая перед первым игроком, состоит в построении управления $u(t) = u(\tau_i, \xi_i^h, \psi_i^h)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, обеспечивающего перевод фазовой траектории системы (1), (2) на замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ (в момент ϑ) или "минимально допустимую" его окрестность. Смысл последнего термина будет пояснён ниже.

В случае, когда структура системы неизменна ($f = f_0$ при всех $t \in T$, "скачки" отсутствуют), обсуждаемая задача может быть решена в рамках предложенного в монографии [1] подхода. Согласно этому подходу необходимо поступить следующим образом. В начальный момент времени, зная начальное состояние, можно определить наименьшую окрестность (ε-окрестность, т.е. M^ε) целевого множества, в которую первый игрок гарантированно может перевести фазовый вектор системы в момент ϑ. (Говоря о той или иной окрестности множества M, мы в дальнейшем понимаем замкнутую окрестность.) Затем можно построить некоторое семейство u-стабильных множеств $W^\varepsilon(t)$, $t \in T$, обрывающееся в момент ϑ на множестве M^ε $(W^\varepsilon(\vartheta) \subset M^\varepsilon)$ и такое, что начальное состояние системы находится во множестве $W^\varepsilon(0)$. В качестве таких множеств можно взять максимально широкое семейство множеств (семейство множеств позиционного поглощения) или более узкое семейство, например, стабильные дорожки. После этого организуется процедура позиционного управления заданной системой, обеспечивающая отслеживание фазовой траекторией этой системы фазовой траектории так называемого поводыря, который движется по выбранному семейству u-стабильных множеств. Стратегия (правило выбора) управления, обеспечивающая указанное выше свойство слежения, называется *экстремальной стратегией.* Если $\{x_0, y_0\} \in W(0)$, то, как установлено в [1, § 57], экстремальная стратегия решает задачу гарантированного наведения на множество M в момент ϑ при любой допустимой реализации управления второго игрока.

Будем говорить, что стратегия формирования управления обеспечивает решение задачи наведения в "минимально допустимую" окрестность множества M, если она определяется следующим образом. (В дальнейшем такую стратегию назовём *стратегией гарантированного наведения* – СГН.) В начальный момент строится семейство u-стабильных множеств $W_0(t)$, $t \in T$, обеспечивающих решение задачи гарантированного наведения системы (3) с правой частью $f = f_0$ из начального состояния $\{x_0, y_0\}$ в наименьшую окрестность множества M. После этого в качестве СГН на полуинтервале $[0, a_1^*)$ выбираем стратегию экстремального прицеливания на множества $W_0(t)$. В момент a_1^* в результате применения этой стратегии и действия некоторого допустимого управления $v(\cdot)$ второго игрока реализуется состояние

$\{x(a_1^*), y(a_1^*-)\}$. Вследствие скачка и изменения структуры системы, начиная с момента a_1^* (вплоть до момента a_2^*), система (3) описывает соотношениями

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_1(t, x(t), y(t), u(t), v(t)) \tag{6}$$

с начальным состоянием

$$x(a_1^*), \quad y(a_1^*) = y(a_1^*+) = y(a_1^*-) + b_1^* e_1. \tag{7}$$

Для системы (6) с начальным в момент $t = a_1^*$ состоянием (7) строится система u-стабильных множеств $W_1(t)$, $t \in [a_1^*, \vartheta]$, обеспечивающих решение задачи гарантированного наведения в наименьшую окрестность множества M в момент ϑ. В качестве СГН на полуинтервале $[a_1^*, a_2^*)$ берём стратегию экстремального прицеливания на множества $W_1(t)$. Аналогичным образом СГН определяется на полуинтервалах $[a_k^*, a_{k+1}^*)$, $k \in [2 : r]$. Пусть СГН определена на полуинтервале $[0, a_k^*)$. В момент $t = a_k^*$ в результате применения этой стратегии и действия некоторого допустимого управления $v(\cdot)$ второго игрока реализуется состояние $\{x(a_k^*), y(a_k^*-)\}$. Вследствие изменения структуры системы и скачка, начиная с момента a_k^* (вплоть до момента a_{k+1}^*), система (3) описывается соотношениями

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_k(t, x(t), y(t), u(t), v(t)) \tag{8}$$

с начальным состоянием

$$x(a_k^*), \quad y(a_k^*) = y(a_k^*+) = y(a_k^*-) + b_k^* e_k. \tag{9}$$

Для системы (8) с начальным в момент $t = a_k^*$ состоянием (9) строится система u-стабильных множеств $W_k(t)$, $t \in [a_k^*, \vartheta]$, обеспечивающих решение задачи гарантированного наведения из состояния $\{x(a_k^*), y(a_k^*)\}$ в наименьшую окрестность множества M. В качестве СГН на полуинтервале $[a_k^*, a_{k+1}^*)$ выбираем стратегию экстремального прицеливания на множество $W_k(t)$.

Мы ввели понятие СГН в предположении, что моменты скачков a_k^* первому игроку известны и что ему известны также состояния $\{x(a_k^*), y(a_k^*)\}$. В действительности же это не так. Именно, как моменты a_k^*, так и состояния $\{x(a_k^*), y(a_k^*)\}$ вида (9) первому игроку неизвестны и подлежат определению. Предположим, что при построении СГН вместо моментов скачков a_k^*, а также состояний $\{x(a_k^*), y(a_k^*)\}$ берутся их приближённые значения, которые определяются с помощью некоторого алгоритма. Для их вычисления требуется определённое время. Поэтому при построении СГН вместо неизвестных моментов a_k^* скачка естественно использовать другие моменты, немного превосходящие a_k^*. Подобная модификация СГН приводит нас к новой стратегии выбора управления первым игроком, которую мы назовём *ε-стратегией гарантированного наведения* (ε-СГН). Цель настоящей работы состоит в построении ε-СГН.

Заметим, что основы теории гарантированного управления в формализации, восходящей к работам Н.Н. Красовского, заложены в работах [1–7]. Однако в этих работах обсуждались задачи гарантированного управления для систем с фиксированной правой частью (заданной структурой). Кроме того, рассматривался случай измерения всех фазовых координат. Случай измерения части координат исследовался в работах [8–11]. В данной работе изучается задача наведения для систем с переменной структурой при наличии скачков фазовых состояний. Заметим, что такого типа скачки появляются, например, в задачах с импульсным управлением.

В настоящей работе для упрощения мы ограничимся случаем линейных по управлениям функций f_k, т.е. положим

$$f_k = f_{1k}(t, x, \dot{x}) + B_k u - C_k v,$$

где B_k и C_k – постоянные матрицы соответствующих размеров, а в качестве стабильных множеств возьмём стабильные дорожки. При этом естественно в качестве стратегии экстремального прицеливания выбрать стратегию прицеливания на соответствующие дорожки.

Замечание 1. Если в качестве стабильных множеств берутся максимальные стабильные мосты, т.е. множества позиционного поглощения, то в качестве стратегии экстремального прицеливания удобно выбирать стратегию прицеливания на поводыря, движущегося по соответствующему мосту.

Системы с разрывной правой частью являются частным случаем гибридных систем. К последним относятся системы с переменной структурой [12], а также импульсные системы [13, 14]. Теория управления гибридными системами получила в последние годы бурное развитие [15–18]. Важным подклассом гибридных систем являются переключаемые системы [19, 20]. К последним можно отнести и системы, рассматриваемые в настоящей работе.

В дальнейшем предполагаем выполненными следующие два условия.

Условие 1. Существуют выпуклые и замкнутые множества $E_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in [0:r]$, такие, что $B_kP_k = C_kQ_k + E_k$.

Здесь $B_kP_k = \{B_ku : u \in P_k\}$, $C_kQ_k = \{C_kv : v \in Q_k\}$, $C_kQ_k + E_k = \{u_1 + u_2 : u_1 \in C_kQ_k, u_2 \in E_k\}$.

Условие 2. Заданы числа $b^* > 0$, $d_0^* > 0$ и $d^* > 0$ такие, что

$$b^* \leqslant b_k^* \quad \text{при всех} \quad k \in [1:r],$$

$$d_0^* \leqslant a_{k+1}^* - a_k^* \quad \text{при всех} \quad k \in [1:r-1], \quad a_1^* > d^*, \quad a_r^* < \vartheta.$$

2. Вспомогательные результаты. Рассмотрим задачу построения алгоритма нахождения точек, а также величин разрывов производной n-мерной функции $x(\cdot)$, заданной с ошибкой. Суть задачи состоит в следующем. Имеется некоторая n-мерная функция $x(\cdot)$, заданная на конечном промежутке времени $T = [0, \vartheta]$. Промежуток T разбит на конечное число полуинтервалов

$$[\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0:m-1], \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_m = \vartheta.$$

В моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ измеряются (приближённо) значения $x(\tau_i)$ функции $x(\cdot)$, т.е. находятся векторы $\Xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ со свойствами

$$|x(\tau_i) - \Xi_i^h|_n \leqslant h. \tag{10}$$

Сама функция $x(\cdot)$ неизвестна. Необходимо указать динамический алгоритм вычисления точек, а также величин разрывов производной функции $\dot{x}(\cdot)$ на основе неточного измерения величины $x(\tau_i)$. Такой алгоритм характеризуется двумя свойствами:

а) вычисление точек разрывов (а также соответствующих величин разрывов) производной функции $x(\cdot)$, меньших текущего значения t, производится по результатам измерения состояния $x(\tau)$ в моменты τ, предшествующие t;

б) только после вычисления точек и величин разрывов функции $\dot{x}(\cdot)$ на промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant t$ возможно использование новой информации для их вычислений в следующие моменты времени (при $\tau > t$).

Для решений указанной задачи воспользуемся методом позиционного управления с моделью, развитым в работах [1–4, 6–12]. В соответствии с этим методом рассматриваемая задача заменяется другой задачей, а именно, задачей управления по принципу обратной связи некоторой системой. Эту систему в дальнейшем называем *моделью*.

Рассмотрим случай, когда $\dot{x}(\cdot)$ – кусочно-непрерывная функция. Именно, пусть $\{a_k\}_{k=1}^r$ – точки (неизвестные) разрывов функции $\dot{x}(\cdot)$, упорядоченные по возрастанию, т.е. $a_{k+1} > a_k$. Для определённости считаем, что в этих точках функция $\dot{x}(\cdot)$ непрерывна справа:

$$\dot{x}(a_k) = \dot{x}(a_k+) = \lim_{\substack{t \to a_k \\ t > a_k}} \dot{x}(t).$$

Через b_k обозначим (неизвестные) величины разрывов, т.е.

$$b_k = |\dot{x}(a_k+) - \dot{x}(a_k-)|_n, \quad \dot{x}(a_k-) = \lim_{\substack{t \to a_k \\ t < a_k}} \dot{x}(t).$$

Пусть заданы три числа $b > 0$, $d_0 > 0$ и $d > 0$ и известно, что

$$b \leqslant b_k \quad \text{при всех} \quad k \in [1:r],$$

$$d_0 \leqslant a_{k+1} - a_k \quad \text{при всех} \quad k \in [1 : r-1], \quad a_1 > d_0 \quad a_r < \vartheta,$$
$$|\dot{x}(t)|_n \leqslant d \quad \text{при п.в.} \quad t \in T.$$

(Значение r может быть неизвестно.) Предположим также, что функция $\dot{x}(\cdot)$ непрерывно-дифференцируема всюду, за исключением точек $\{a_k\}_{k=1}^r$, причём известно число $F > 0$ такое, что

$$|\ddot{x}(t)|_n \leqslant F$$

во всех точках дифференцируемости функции $\dot{x}(\cdot)$.

Фиксируем семейство разбиений отрезка T:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h^3}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h^3} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h),$$

где $\delta(h) = \vartheta m_h^{-3}$, $m_h \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем некоторую функцию $\alpha = \alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$. Введём управляемую систему (модель), описываемую векторным дифференциальным уравнением $(w \in \mathbb{R}^n,\ u^h \in \mathbb{R}^n)$ следующего вида:

$$\dot{w}(t) = u^h(t) \tag{11}$$

(система M) с управлением $u^h(t)$. Пусть

$$u^h(t) = -\frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i) - \Xi_i^h] \quad \text{при} \quad t \in \delta_i \equiv [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad i \in [0 : m_h^3 - 1], \tag{12}$$

где $\alpha = \alpha(h)$. В уравнении (11) управление $u^h(t)$ зададим согласно (12). Таким образом, управление $u^h(\cdot)$ в системе (11) будет находиться по принципу обратной связи

$$u^h(t) = u^h(\tau_i; w^h(\tau_i), \Xi_i^h), \quad t \in \delta_i.$$

В этом случае система (11) примет вид

$$\dot{w}^h(t) = -\frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i) - \Xi_i^h] \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i, \quad i \in [0 : m_h^3 - 1]. \tag{13}$$

Её начальное состояние

$$w^h(0) = \Xi_0^h.$$

Введём обозначение

$$\mu(t) = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} |w^h(\tau) - x(\tau)|_n. \tag{14}$$

Через $\Xi(x(\cdot), h)$ обозначим множество допустимых результатов измерений, т.е. множество всех кусочно-постоянных функций $\Xi^h(\cdot) : T \to \mathbb{R}^n$ следующей структуры:

$$\Xi^h(t) = \Xi_i^h \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad i \in [0 : m_h^3 - 1],$$

удовлетворяющих неравенствам (10).

Введём

Условие 3. Имеют место соотношения

$$\delta(h) \to 0, \quad \alpha(h) \to 0, \quad \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Учитывая это условие, можно утверждать, что найдётся $h_* \in (0,1)$, для которого при любом $h \in (0, h_*)$ справедливы включения

$$\alpha(h) \in (0,1), \quad \delta(h) \in (0,1), \quad h/\alpha(h) \in (0,1), \quad \delta(h)/\alpha(h) \in (0, 1/2). \tag{15}$$

Лемма 1. *Пусть* $\dot{x}(\cdot) \in L_\infty(T;\mathbb{R}^n)$, $|\dot{x}(t)|_n \leqslant d$ *при п.в.* $t \in T$, $\mu(a) \leqslant q$ *для некоторого* $a \in T$ *и выполнено условие 3. Тогда при всех* $h \in (0, h_*)$, $\Xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$, $\tau_{i+1} > a$ *справедливы неравенства*

$$\mu(t) \leqslant 2q + (2+3d)(\alpha+\delta), \quad t \in [a, \vartheta], \tag{16}$$

$$\biggl(\int\limits_{\tilde{\tau}_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_n^2\, ds\biggr)^{1/2} \leqslant \sqrt{2}(4+4.5d)\delta^{1/2} + 2\sqrt{2}\delta^{1/2}\alpha^{-1}q, \tag{17}$$

где $\tilde{\tau}_i = \tau_i$, *если* $\tau_i \geqslant a$, *и* $\tilde{\tau}_i = a$, *если* $\tau_i < a$.

Доказательство. Воспользовавшись равенством (13), заключаем, что справедливы соотношения

$$\frac{d}{dt}[w^h(t) - x(t)] = -\frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i) - \Xi_i^h] - \dot{x}(t) =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}[w^h(t) - x(t)] + \Psi_h^{(1)}(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m_h^3 - 1], \tag{18}$$

где

$$\Psi_h^{(1)}(t) = \Psi_h(t) + \frac{1}{\alpha}[w^h(t) - w^h(\tau_i)],$$

$$\Psi_h(t) = -\frac{1}{\alpha}[x(t) - \Xi_i^h] - \dot{x}(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i.$$

В силу включений (15) верны неравенства $h\alpha^{-1} \leqslant 1$ и $\delta\alpha^{-1} \leqslant 1/2$ при $h \in (0, h_*)$. В таком случае семейство функций $\Psi_h(\cdot)$ (равномерно по всем $h \in (0, h_*)$) ограничено:

$$|\Psi_h(t)|_n \leqslant \frac{1}{\alpha}(h + |x(t) - x(\tau_i)|_n) + |\dot{x}(t)|_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}(\tau)|_n\, d\tau + |\dot{x}(t)|_n \leqslant 1 + 1,5d \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i. \tag{19}$$

Из представления (18) следует равенство

$$w^h(t) - x(t) = w^h(a) - x(a) + \int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}\Psi_h^{(1)}(s)\, ds, \quad t \in [a, \vartheta]. \tag{20}$$

Далее, верны оценки (см. (13), (14))

$$\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_n\, ds \leqslant \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left|\frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i) - \Xi_i^h]\right|_n ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{\alpha^2}(\mu(\tau_i) + h), \quad \mu(\tau_i) \leqslant \mu(\tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m_h^3 - 1]. \tag{21}$$

Заметим, что имеет место неравенство

$$|\Psi_h^{(1)}(t)|_n \leqslant |\Psi_h(t)|_n + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_n\, ds \quad \text{при} \quad t \in \delta_i. \tag{22}$$

Учитывая соотношения (20)–(22), получаем

$$\mu(t) \leqslant q + \left(\frac{\delta}{\alpha^2}\mu(\tau_i) + \frac{\delta h}{\alpha^2}\right)\int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}\,ds + \int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}|\Psi_h(s)|_n\,ds, \tag{23}$$

$$t \in [\tilde{\tau}_i, \tau_{i+1}], \quad \tau_{i+1} > a.$$

Нетрудно видеть, что верно неравенство

$$\int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}\,ds \leqslant \alpha(1 - e^{-(t-a)/\alpha}) \leqslant \alpha. \tag{24}$$

Воспользовавшись неравенствами (19) и (24), будем иметь

$$\int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}|\Psi_h(s)|_n\,ds \leqslant (1+1.5d)\left(\int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}\,ds\right) \leqslant \alpha K_1, \tag{25}$$

где $K_1 = 1 + 1,5d$. В свою очередь, из (23) и (25), считая в (23) $t = \tilde{\tau}_i$ и учитывая неравенство (24), а также неравенство $\mu(\tau) \leqslant \mu(\tilde{\tau}_i)$ при $\tau \in [0, \tilde{\tau}_i]$, выводим оценку

$$\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\mu(\tilde{\tau}_i) \leqslant q + \frac{\delta h}{\alpha} + \alpha K_1 \leqslant q + K_1\left(\alpha + \frac{\delta h}{\alpha}\right),$$

из которой в силу неравенств $1 - \delta/\alpha \geqslant 1/2$ и $h\alpha^{-1}(h) \leqslant 1$ (см. (15)) следует, что

$$\mu(\tilde{\tau}_i) \leqslant 2q + 2K_1\left(\alpha + \frac{\delta h}{\alpha}\right) \leqslant 2q + 2K_1(\alpha + \delta). \tag{26}$$

Далее, имеем

$$\mu(\tilde{\tau}_i) \geqslant \mu(\tau_i). \tag{27}$$

Учитывая (23) и (25), получаем

$$\mu(t) \leqslant q + \frac{\delta h}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha}\mu(\tau_i) + \alpha K_1.$$

Значит, вследствие (26) и (24) справедливо неравенство

$$\mu(t) \leqslant q + \frac{\delta h}{\alpha} + 2\frac{\delta}{\alpha}q + 2\frac{\delta}{\alpha}K_1(\alpha + \delta) + \alpha K_1,$$

из которого вытекает неравенство (16).

Проверим справедливость неравенства (17). Имеем

$$|u^h(t)|_n \leqslant \frac{1}{\alpha}|w^h(\tau_i) - \Xi_i^h|_n \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i.$$

Поэтому, учитывая (15), (26), (27), получаем

$$|u^h(t)|_n \leqslant \frac{1}{\alpha}(\mu(\tau_i) + h) \leqslant \frac{h}{\alpha} + 2\frac{q}{\alpha} + 2K_1\left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right) \leqslant 2\frac{q}{\alpha} + (4 + 4.5d) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i. \tag{28}$$

Из (28) выводим неравенство

$$\int_{\tilde{\tau}_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_n^2 ds \leqslant \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_n^2\, ds = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v^h(s)|_n^2\, ds \leqslant 8\frac{q^2}{\alpha^2}\delta + 2(4+4.5d)^2\delta,$$

из которого следует неравенство (17). Лемма доказана.

Символом $W^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство дифференцируемых n-мерных функций, производные которых являются элементами пространства $L_\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Если* $\dot{x}(\cdot) \in W^{1,\infty}([a,\vartheta];\mathbb{R}^n)$, $a \in [0,\vartheta)$, *то при* $t \in [a,\vartheta]$ *имеет место следующее неравенство:*

$$|u^h(t) - \dot{x}(t)|_n \leqslant \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{t-a}, \frac{\delta q}{\alpha^2}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\alpha}{t-a}d + \tilde{c}_1\alpha(h) + \tilde{c}_2(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h) + \tilde{c}_3\delta(h)q\alpha^{-2}(h),$$

где $\tilde{c}_1 = F$, $\tilde{c}_2 = 2\sqrt{2}(4+4.5d) + 2\max\{1,d\}$, $\tilde{c}_3 = 4\sqrt{2}$, $\operatorname{vrai}\max\limits_{t\in[a,\vartheta]} |\ddot{x}(t)|_n \leqslant F$, $|\dot{x}(t)|_n \leqslant d$ *при п.в.* $t \in [a,\vartheta]$.

Доказательство. Учитывая представление (20), приходим к равенству

$$\alpha^{-1}[w^h(t) - x(t)] - \alpha^{-1}[w^h(a) - x(a)] = \int_a^t \frac{d}{ds}(\varrho_\alpha(t-s))\Psi_h^{(1)}(s)\, ds =$$

$$= -\int_a^t \frac{d}{ds}(\varrho_\alpha(t-s))\dot{x}(s)\, ds + \sum_{j=1}^{2}\int_a^t \frac{d}{ds}(\varrho_\alpha(t-s))\gamma_\delta^{(j)}(s)\, ds, \quad t\in[a,\vartheta], \tag{29}$$

где

$$\varrho_\alpha(t) = \exp(-\alpha^{-1}t), \quad \gamma_\delta^{(1)}(s) = \alpha^{-1}[w^h(s) - w^h(\tau_i)],$$

$$\gamma_\delta^{(2)}(s) = -\alpha^{-1}[x(s) - \Xi_i^h] \quad \text{при п.в.} \quad s\in[\tau_i,\tau_{i+1}].$$

В силу леммы 1 (см. (17)) верны соотношения

$$|\gamma_\delta^{(1)}(s)|_n \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{\tilde{\tau}_i}^{s} |\dot{w}^h(s)|_n\, ds \leqslant \frac{\delta^{1/2}}{\alpha}\left(\int_{\tilde{\tau}_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_n^2\, ds\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta^{1/2}}{\alpha}\left\{\sqrt{2}(4+4.5d)\delta^{1/2} + 2\sqrt{2}\frac{\delta^{1/2}}{\alpha}q\right\} = \sqrt{2}(4+4.5d)\frac{\delta}{\alpha} + 2\sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha^2}q, \quad s\in[\tilde{\tau}_i,\tau_{i+1}]. \tag{30}$$

Воспользовавшись условием (10), а также неравенством $|\dot{x}(t)|_n \leqslant d$, будем иметь

$$|\gamma_\delta^{(2)}(s)|_n \leqslant c_0(\delta+h)\alpha^{-1}, \quad s\in[a,\vartheta], \tag{31}$$

где $c_0 = \max\{1,d\}$. В таком случае из (30) и (31), учитывая неравенство (24), выводим оценку

$$\left|\sum_{j=1}^{2}\int_a^t \frac{d}{ds}\varrho_\alpha(t-s)\gamma_\delta^{(j)}(s)\, ds\right|_n \leqslant \varrho(h,\alpha,\delta) + 2\sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha^2}q, \tag{32}$$

где $\varrho(h,\alpha,\delta)=c_1(\delta+h)/\alpha$, $c_1=\sqrt{2}(4+4.5d)+c_0$. Интегрируя по частям первое слагаемое в правой части равенства (29), получаем

$$-\int\limits_a^t\biggl(\frac{d}{ds}\varrho_\alpha(t-s)\biggr)\dot x(s)\,ds=\varrho_\alpha(t-a)\dot x(a)-\dot x(t)+\int\limits_a^t\varrho_\alpha(t-s)\ddot x(s)\,ds,\quad t\in[a,\vartheta]. \tag{33}$$

В свою очередь с учётом соотношений (32), (33) из равенства (29) следует, что

$$\biggl|-\frac{1}{\alpha}[w^h(t)-x(t)]+\frac{1}{\alpha}[w^h(a)-x(a)]-\dot x(t)\biggr|_n\leqslant 2\sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha^2}q+$$

$$+\varrho(h,\alpha,\delta)+|\varrho_\alpha(t-a)\dot x(a)|_n+\int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}|\ddot x(s)|_n\,ds. \tag{34}$$

Поскольку имеют место неравенства

$$|\varrho_\alpha(t-a)\dot x(a)|_n=e^{-(t-a)/\alpha}|\dot x(a)|_n\leqslant\frac{\alpha}{t-a}|\dot x(a)|_n,\quad t\in[a,\vartheta],$$

$$\int\limits_a^t e^{-(t-s)/\alpha}|\ddot x(s)|_n\,ds\leqslant\alpha F, \tag{35}$$

то из них и неравенства (34) вытекает, что

$$\biggl|-\frac{1}{\alpha}[w^h(t)-x(t)]+\frac{1}{\alpha}[w^h(a)-x(a)]-\dot x(t)\biggr|_n\leqslant 2\sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha^2}q+\varrho(h,\alpha,\delta)+\alpha F+\frac{\alpha}{t-a}|\dot x(a)|_n.$$

Кроме того, в силу (10), (30) имеем при $t\in[\tilde\tau_i,\tau_{i+1}]$ оценку

$$|\alpha^{-1}\{[w^h(t)-x(t)]-[w^h(\tau_i)-\Xi_i^h]\}|_n\leqslant\frac{1}{\alpha}\biggl\{\int\limits_{\tau_i}^t|\dot w^h(s)|_n\,ds+h+\int\limits_{\tau_i}^t|\dot x(s)|_n\,ds\biggr\}\leqslant$$

$$\leqslant(h+d\delta)\alpha^{-1}+\delta\alpha^{-1}\biggl(\sqrt{2}(4+4.5d)+2\sqrt{2}\frac{q}{\alpha}\biggr). \tag{36}$$

Ввиду ограниченности второй производной $\ddot x(\cdot)$ $(|\ddot x(t)|_n\leqslant F$ при п.в. $t\in[a,\vartheta])$ из (34)–(36) вытекает (при $t\in\delta_i$) неравенство

$$\biggl|\frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i)-\Xi_i^h]+\frac{1}{\alpha}[w^h(a)-x(a)]-\dot x(t)\biggr|_n\leqslant 4\sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha^2}q+$$

$$+\frac{h}{\alpha}+\varrho(h,\delta,\alpha)+(d+\sqrt{2}(4+4.5d))\frac{\delta}{\alpha}+F\alpha+\frac{\alpha}{t-a}|\dot x(a)|_n,$$

из которого и следует справедливость леммы. Лемма доказана.

Введём функции $\alpha=\alpha(h)$, $\gamma=\gamma(h)$ и $N=N(h)$ следующим образом:

$$\alpha(h)=\delta^{2/3}(h),\quad\gamma(h)=\delta(h)m_h^2=\frac{\vartheta}{m_h}<\frac{d_0}{2},\quad N(h)=\frac{\gamma(h)}{\delta(h)}=m_h^2.$$

Здесь $\delta(h)$ – шаг разбиения Δ_h, т.е $\delta(h) = \vartheta m_h^{-3}$, $m_h = [(\vartheta/h)^{1/3}]$, через $[a]$ обозначается целая часть числа a. Заметим, что при таком выборе величин α, δ и γ выполняются соотношенния

$$h \leqslant \delta(h), \quad \frac{h}{\alpha(h)} \leqslant \frac{\delta(h)}{\alpha(h)} = \frac{\vartheta^{2/3}\alpha(h)}{\gamma(h)} = \frac{\vartheta^{1/3}}{m_h} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{37}$$

Пусть $\delta(1+N) < \vartheta - a_r$,

$$\chi_1(\alpha,\delta,h) = F(\delta+\gamma) + \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{d_0}, \frac{\delta h}{\alpha^2}\right) + \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\delta(2h+(2+3d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\right),$$

$$\chi(\alpha,\delta,h) = F(\delta+\gamma) + \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{3\alpha}{d_0}, \frac{\delta(2h+(2+3d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\right) +$$

$$+ \Psi\left(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\delta(4h+(6+9d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\right). \tag{38}$$

В силу соотношений (37) можно указать число $h_1 \in (0, h_*)$ такое, что при всех $h \in (0, h_*)$ верны неравенства

$$\delta(h) = \vartheta m_h^{-3} \leqslant d_0/4, \quad \chi_1(\alpha(h),\delta(h),h) \leqslant b/2, \quad \chi(\alpha(h),\delta(h),h) \leqslant b/2. \tag{39}$$

Число h_* определено выше. (Мы считаем выполненным условие 3.)

Опишем алгоритм решения рассматриваемой в настоящем пункте задачи. В качестве модели рассмотрим систему вида (11) с начальным состоянием $w^h(0) = \Xi_0^h$. Управление $u^h(\cdot)$ в модели будем вычислять по правилу (12). До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0, h_1)$ и разбиение Δ_h с диаметром $\delta = \delta(h) = \vartheta m_h^{-3}$. Сначала определим полуинтервал, на котором находится первая точка разрыва. Для этого в каждый момент $\tau_i \geqslant d_0$ вычисляем величину

$$\nu_i = |u^h(\tau_{i-N-1}) - u^h(\tau_i)|_n.$$

Лемма 3. *Пусть при некотором $i \in [1 : m_h^3 - 1]$ таком, что $\tau_i > d_0$, первый раз выполняется неравенство*

$$\nu_i > b/2, \tag{40}$$

т.е. при всех $j \leqslant i-1$, $d_0 \leqslant \tau_j$ справедливы неравенства $\nu_j \leqslant b/2$. Тогда первая точка разрыва a_1 находится на полуинтервале $\gamma_i = (\tau_{i-N-1}, \tau_{i-N}]$. Причём величина разрыва b_1 такова, что

$$|b_1 - \nu_i| \leqslant \chi_1(\alpha,\delta,h). \tag{41}$$

Пусть вычислены k $(1 \leqslant k)$ полуинтервалов, которым принадлежат первые k точек разрыва, т.е. $a_j \in (\tau_{i_j-1}, \tau_{i_j}]$, $j \in [1:k]$, $\tau_{i_j+1} < \tau_{i_{j+1}-1}$. Последнее неравенство следует из оценки $\delta(h) \leqslant d_0/4$. В каждый момент $\tau_i \geqslant \tau_{i_k} + d_0$ вычисляем величину ν_i.

Лемма 4. *Пусть при некотором i таком, что $\tau_i > \tau_{i_k} + d_0$, первый раз выполняется неравенство (40), т.е. при всех $j \leqslant i-1$, $\tau_{i_k-1} + d_0 \leqslant \tau_j$ имеют место неравенства $\nu_j \leqslant b/2$. Тогда $(k+1)$-я точка разрыва функции $x(\cdot)$ лежит на полуинтервале γ_i. Причём для величины b_{k+1} разрыва справедливо неравенство*

$$|b_{k+1} - \nu_i| \leqslant \chi(\alpha,\delta,h).$$

Если известно число (r) точек разрыва, то после вычисления величины a_r, т.е. нахождения полуинтервала γ_i такого, что $a_r \in \gamma_i$, работа алгоритма заканчивается. Если число r неизвестно, то работа алгоритма осуществляется до момента ϑ. При этом в силу условия $\delta(1+N) < \vartheta - a_r$ последняя точка разрыва (a_r) будет определена.

Доказательство леммы 3. Пусть $\tau_{i_1} = \tau_{i_1(h)} \in \Delta_h$, $a_1 \in (\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}]$. На отрезке $[0, \tau_{i_1-1}]$ функция $\dot{x}(\cdot)$ непрерывна. Значит $\dot{x}(\cdot) \in W^{1,\infty}([0, \tau_{i_1-1}]; \mathbb{R}^n))$. Поэтому в силу леммы 2 верно неравенство

$$|u^h(\tau_{i_1-1}) - \dot{x}(\tau_{i_1-1})|_n \leqslant \Psi\biggl(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{d_0}, \frac{\delta h}{\alpha^2}\biggr). \tag{42}$$

Кроме того, учитывая, что $|\ddot{x}(t)|_n \leqslant F$ при п.в. $t \in T$, имеем

$$|\dot{x}(a_1-) - \dot{x}(\tau_{i_1-1})|_n \leqslant F(a_1 - \tau_{i_1-1}) \quad \text{и} \quad |\dot{x}(a_1+) - \dot{x}(\tau_{i_1})|_n \leqslant F(\tau_{i_1} - a_1). \tag{43}$$

В свою очередь из неравенств (43) следует, что

$$||\dot{x}(\tau_{i_1}) - \dot{x}(\tau_{i_1-1})|_n - b_1| \leqslant F\delta, \tag{44}$$

где $b_1 = |\dot{x}(a_1+) - \dot{x}(a_1-)|_n$. Воспользовавшись леммой 1, а также неравенством $|x(0) - - w^h(0)|_n \leqslant h$, устанавливаем оценку

$$\mu(\tau_{i_1}) \leqslant 2h + (2 + 3d)(\alpha + \delta). \tag{45}$$

Так как $\gamma = m_h^2\delta \leqslant 0.5d_0$, то $\dot{x}(\cdot) \in W^{1,\infty}([\tau_{i_1}, \tau_{i_1+N}]; \mathbb{R}^n)$. Поэтому в силу леммы 2, учитывая оценку (45), имеем неравенство

$$|u^h(\tau_{i_1+N}) - \dot{x}(\tau_{i_1+N})|_n \leqslant \Psi\biggl(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\delta(2h + (2 + 3d)(\alpha + \delta))}{\alpha^2}\biggr). \tag{46}$$

Кроме того, в силу равенства $N(h)\delta(h) = \gamma(h)$ справедлива оценка

$$|\dot{x}(\tau_{i_1+N}) - \dot{x}(\tau_{i_1})|_n \leqslant F\gamma, \tag{47}$$

при выводе которой мы воспользовались непрерывностью функции $\dot{x}(\cdot)$ на отрезке $[\tau_{i_1}, \tau_{i_1+N}]$, вытекающей из неравенства $2\gamma \leqslant d_0$. Из (46), (47) выводим неравенство

$$|u^h(\tau_{i_1+N}) - \dot{x}(\tau_{i_1})|_n \leqslant F\gamma + \Psi\biggl(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\delta(2h + (2 + 3d)(\alpha + \delta))}{\alpha^2}\biggr). \tag{48}$$

В свою очередь из неравенств (42) и (44) следует, что

$$||u^h(\tau_{i_1-1}) - \dot{x}(\tau_{i_1})|_n - b_1| \leqslant F\delta + \Psi\biggl(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{d_0}, \frac{\delta h}{\alpha^2}\biggr). \tag{49}$$

Объединяя неравенства (48) и (49), получаем $||u^h(\tau_{i_1+N}) - u^h(\tau_{i_1-1})|_n - b_1| \leqslant \chi_1(\alpha, \delta, h)$. Таким образом, считая $i = i_1 + N$, будем иметь $|b_1 - |u^h(\tau_i) - u^h(\tau_{i-N-1})|_n| \leqslant \chi_1(\alpha, \delta, h)$, т.е. $0.5b \leqslant b_1 - \chi_1(\alpha, \delta, h) \leqslant \nu_i \leqslant b_1 + \chi_1(\alpha, \delta, h)$. Неравенство (41) установлено.

Заметим, что если бы функция $\dot{x}(\cdot)$ была непрерывной на полуинтервале $(\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}]$, то в силу (42), (46), (47) и непрерывности справа функции $\dot{x}(\cdot)$ в точках разрыва выполнялось бы следующее неравенство:

$$\nu_{i_1+N} \equiv |u^h(\tau_{i_1+N}) - u^h(\tau_{i_1-1})|_n \leqslant |u^h(\tau_{i_1+N}) - \dot{x}(\tau_{i_1+N})|_n +$$

$$+ |\dot{x}(\tau_{i_1+N}) - \dot{x}(\tau_{i_1})|_n + |\dot{x}(\tau_{i-1}) - \dot{x}(\tau_i)|_n + |u^h(\tau_{i_1-1}) - \dot{x}(\tau_{i_1-1})|_n \leqslant \chi_1(\alpha, \delta, h) \leqslant 0.5b, \tag{50}$$

так как $\tau_{i_1+N} - \tau_{i_1-1} = \gamma + \delta < d_0$.

Неравенства (50) будут также справедливы, если мы заменим $i_1 + N$ на любое значение $i \in [i_1^* : i_1 + N - 1]$, где $i_1^* = [d_0/\delta(h)] + 1$. Значит, при всех таких i имеют место неравенства $\nu_i \leqslant 0.5b$. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4 проводится по схеме доказательства леммы 3.

Пусть вычислены k полуинтервалов, которым принадлежат первые k точек разрыва, т.е. $a_j \in (\tau_{i_j-1}, \tau_{i_j}]$, $j \in [1:k]$, $\tau_{i_j+1} < \tau_{i_{j+1}}$. Тогда $a_{k+1} \in (\tau_{i_{k+1}-1}, \tau_{i_{k+1}}]$. На отрезке $[\tau_{i_k+1}, \tau_{i_{k+1}-1}]$ функция $\dot{x}(\cdot)$ непрерывна. Кроме того, $\tau_{i_{k+1}-1} - \tau_{i_k+1} \geqslant 0.5d_0$, поскольку $2\delta(h) \leqslant 0.5d_0$ и $a_{k+1} - a_k \geqslant d_0$.

Поэтому в силу лемм 1 и 2 верно неравенство

$$|u^h(\tau_{i_{k+1}-1}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}-1})|_n \leqslant \Psi\biggl(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{3\alpha}{d_0}, \frac{\delta(2h + (2+3d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\biggr), \tag{51}$$

так как $\tau_{i_{k+1}-1} > a_k + d_0/3$, а на отрезке $[a_k, a_k - \delta]$ функция $\dot{x}(\cdot)$ непрерывна. Кроме того, верны неравенства

$$|\dot{x}(a_{k+1}-) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}-1})|_n \leqslant F(a_{k+1} - \tau_{i_{k+1}-1}) \quad \text{и} \quad |\dot{x}(a_{k+1}+) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}})|_n \leqslant F(\tau_{i_{k+1}} - a_{k+1}),$$

учитывая которые, получаем

$$||\dot{x}(\tau_{i_{k+1}}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}-1})|_n - b_{k+1}| \leqslant F\delta, \tag{52}$$

где $b_{k+1} = |\dot{x}(a_{k+1}+) - \dot{x}(a_{k+1}-)|_n$.

Заметим, что (см. лемму 1) $\mu(\tau_{i_k}) \leqslant 2h + (2+3d)(\alpha+\delta)$. Поэтому

$$\mu(\tau_{i_{k+1}}) \leqslant 2\mu(\tau_{i_k}) + (2+3d)(\alpha+\delta) \leqslant 4h + (6+9d)(\alpha+\delta). \tag{53}$$

В силу леммы 2 (считаем $a = \tau_{i_k+1}$, $q = 4h + (6+9d)(\alpha+\delta)$) и неравенства (53) имеем

$$|u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}+N})|_n \leqslant \Psi\biggl(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\delta(4h + (6+9d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\biggr). \tag{54}$$

Кроме того, справедлива оценка

$$|\dot{x}(\tau_{i_{k+1}+N}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}})|_n \leqslant F\gamma, \tag{55}$$

так как $\tau_{i_{k+1}+N} < a_{k+2}$. Из (54), (55) выводим неравенство

$$|u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}})|_n \leqslant F\gamma + \Psi\biggl(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\delta(4h + (6+9d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\biggr). \tag{56}$$

В свою очередь из (51), (52) следует, что

$$||u^h(\tau_{i_{k+1}-1}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}})|_n - b_{k+1}| \leqslant F\delta + \Psi\biggl(\frac{h}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}, \alpha, \frac{\alpha}{d_0}, \frac{\delta(2h + (2+3d)(\alpha+\delta))}{\alpha^2}\biggr). \tag{57}$$

Объединив неравенства (56), (57), получаем

$$||u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - u^h(\tau_{i_{k+1}-1})|_n - b_{k+1}| \leqslant \chi(\alpha, \delta, h).$$

Таким образом, считая $i = i_{k+1} + N$, будем иметь

$$|b_{k+1} - |u^h(\tau_i) - u^h(\tau_{i-N-1})|_n| \leqslant \chi(\alpha, \delta, h),$$

т.е.

$$0.5b \leqslant b_{k+1} - \chi(\alpha, \delta, h) \leqslant \nu_i \leqslant b_{k+1} + \chi(\alpha, \delta, h).$$

Заметим, что если бы функция $\dot{x}(\cdot)$ была непрерывной на полуинтервале $(\tau_{i_k+1-1}, \tau_{i_k}]$, то в силу (51), (54), (55) выполнялось бы неравенство

$$\nu_{i_{k+1}+N} \equiv |u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - u^h(\tau_{i_{k+1}-1})|_n \leqslant |u^h(\tau_{i_{k+1}+N}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}+N})|_n + |\dot{x}(\tau_{i_{k+1}+N}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}})|_n +$$
$$+ |\dot{x}(\tau_{i_{k+1}}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}-1})|_n + |u^h(\tau_{i_{k+1}-1}) - \dot{x}(\tau_{i_{k+1}-1})|_n \leqslant \chi(\alpha, \delta, h) \leqslant 0.5b. \tag{58}$$

Неравенства (58) будут также справедливы, если мы заменим $i_{k+1}+N$ на любое значение $i \in [i_k^* : i_{k+1}+N-1]$, где $i_k^* = i_k + [d_0/\delta(h)]$. Следовательно, при всех таких i будут верны неравенства $\nu_i \leqslant 0.5b$. Лемма 4 доказана.

3. Алгоритм решения. Пусть при всех возможных действиях первого и второго игроков система (1), (2) остаётся в области

$$|f(t,x,y,u,v,V)|_n \leqslant F, \quad |y|_n \leqslant d. \tag{59}$$

Перейдём к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи. Фиксируем семейство разбиений отрезка T:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h^3}, \quad \tau_{h,0}=0, \quad \tau_{h,m_h^3}=\vartheta, \quad \tau_{h,i+1}=\tau_{h,i}+\delta(h),$$

где $\delta(h) = \vartheta m_h^{-3}$, $m_h \in \mathbb{N}$, $m_h = [(\vartheta/h)^{1/3}]$ (величина $h \in (0,1)$ определена в неравенствах (5)), а также функции $\chi_1(\alpha,\delta,h)$, $\chi(\alpha,\delta,h)$ (см. определения (38), в которых вместо d_0 следует взять d_0^*) и

$$\Psi\left(\frac{h}{\alpha},\frac{\delta}{\alpha},\alpha,e^{(1)},e^{(2)}\right) \equiv e^{(1)}d + \tilde{c}_1\alpha(h) + \tilde{c}_2(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h) + \tilde{c}_3 e^{(2)}.$$

Здесь $\tilde{c}_1 = F$, $\tilde{c}_2 = 2\sqrt{2}(4+4.5d) + 2\max\{1,d\}$, $\tilde{c}_3 = 4\sqrt{2}$.

Введём функции $\alpha = \alpha(h)$, $\gamma = \gamma(h)$ и $N = N(h)$ следующим образом:

$$\alpha(h) = \delta^{2/3}(h), \quad \gamma(h) = \delta(h)m_h^2 = \frac{\vartheta}{m_h} \leqslant \frac{d_0^*}{2}, \quad N(h) = \frac{\gamma(h)}{\delta(h)} = m_h^2.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{w}^h(t) = v^h(t), \quad t \in T \quad (w^h, v^h \in \mathbb{R}^n), \tag{60}$$

с начальным состоянием $w^h(0) = \xi_0^h$.

Фиксируем величину погрешности измерения $h \in (0,h_1)$. Здесь $h_1 \in (0,h_*)$ таково, что при $h \in (0,h_1)$ имеют место неравенства $\delta(h) \leqslant d_0^*/4$, а также неравенства (39). Вместе с величиной h мы фиксируем разбиение $\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{i=0}^{m_h^3}$ отрезка T. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_0(t,x(t),y(t)) + \tilde{u}(t), \quad t \in T, \tag{61}$$

с начальным состоянием

$$x(0) = \xi_0^h, \quad y(0) = \psi_0^h \tag{62}$$

и управлением $\tilde{u}(\cdot) \in \{u(\cdot) \in L_2(T;\mathbb{R}^n) : u(t) \in E_0$ при п.в. $t \in T\}$. Решаем задачу оптимального программного управления, состоящую в переводе фазовой траектории системы (61), (62) в момент ϑ в минимальную окрестность множества M. Пусть $u_0(\cdot)$ – оптимальное управление, решающее эту задачу, M^{ε_0} – соответствующая замкнутая ε_0-окрестность множества M. В частности, если разрешима задача о переводе траектории в момент ϑ на множество M, то полагаем $\varepsilon_0 = 0$. В качестве семейства стабильных множеств $W_0(t)$, $t \in T$, берём решение системы (61), (62) при $\tilde{u}(t) = u_0(t)$, $t \in T$. Обозначим его $\{x_0(t), y_0(t)\}$. Таким образом, $W_0(t) = \{x_0(t), y_0(t)\}$. На полуинтервале $\delta_0 = [0,\tau_1)$ на систему (1) подаём постоянное управление

$$u(t) = u_0,$$

где u_0 – произвольный элемент множества P_0. Под действием этого управления и неизвестного возмущения $v(t) \in Q_0$, $t \in \delta_0$, $(V(t) = 0)$ реализуется траектория $\{x_p(t), y_p(t)\}$, $t \in [0,\tau_1]$, системы (1). На промежутках $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i > 0$, поступаем следующим образом. В моменты $t = \tau_i$ зададим векторы u_i и v_i^h согласно правилам

$$(\psi_i^h - y_0(\tau_i), B_0 u_i) = \min\{(\psi_i^h - y_0(\tau_i), B_0 u) : u \in P_0\}, \quad |\psi_i^h - y_p(\tau_i)|_n \leqslant h, \tag{63}$$

$$v_i^h = -\alpha^{-1}[w^h(\tau_i) - \xi_i^h], \quad |\xi_i^h - x_p(\tau_i)|_n \leqslant h. \tag{64}$$

После этого в (1) и (60) полагаем

$$u(t) = u_i, \quad v^h(t) = v_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \tag{65}$$

Затем вычисляем траектории $\{x_p(\cdot), y_p(\cdot)\}$ (системы (1), (2)) и $w^h(\cdot)$ (системы (61), (62)) на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Теперь определим полуинтервал, на котором находится первая точка разрыва. Для этого в каждый момент $\tau_i \geqslant d_0^*$ вычисляем величину $\tilde{\nu}_i = |v^h(\tau_{i-N-1}) - v^h(\tau_i)|_n$. Пусть при некотором $i \in [1 : m_h^3 - 1]$ таком, что $\tau_i > d_0^*$, первый раз выполняется неравенство

$$\tilde{\nu}_i > b^*/2, \tag{66}$$

т.е. при всех $j \leqslant i-1$, $d_0^* \leqslant \tau_j$ имеют место неравенства $\tilde{\nu}_j \leqslant b^*/2$. Обозначим момент, соответствующий этому i символом τ_{i_1+N}. Тогда первая точка скачка a_1^* находится на полуинтервале $(\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}]$. Причём величина разрыва b_1^* такова, что

$$|b_1^* - \tilde{\nu}_{i_1+N}| \leqslant \chi_1(\alpha, \delta, h).$$

Теперь определим полуинтервал, на котором находится вторая точка скачка. В момент τ_{i_1+N} рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_{1k}(t, x(t), y(t)) + \tilde{u}(t), \quad t \in [\tau_{i_1+N}, \vartheta], \tag{67}$$

с начальным состоянием

$$x(\tau_{i_1+N}) = x_0(\tau_{i_1-1}), \quad y(\tau_{i_1+N}+) = y_0(\tau_{i_1-1}) + \tilde{\nu}_{i_1+N} e_1 \tag{68}$$

и управлением $\tilde{u}(\cdot) \in \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n) : u(t) \in E_1$ при п.в. $t \in [\tau_{i_1+N}, \vartheta]\}$. Решаем задачу оптимального управления, состоящую в переводе фазовой траектории системы (67) с начальным состоянием (68) в момент ϑ в минимальную окрестность множества M. Пусть $u_1(\cdot)$ – оптимальное управление, решающее эту задачу, M^{ε_1} – соответствующая замкнутая ε_1-окрестность множества M. В частности, если разрешима задача о переводе траектории на множество M, то полагаем $\varepsilon_1 = 0$. В качестве семейства стабильных множеств $W_1(t)$, $t \in [\tau_{i_1+N}, \vartheta]$, берём решение системы (67) при $\tilde{u}(t) = u_1(t)$, $t \in T$. Обозначим его, как и выше, через $\{x_0(t), y_0(t)\}$. Таким образом, $W_1(t) = \{x_0(t), y_0(t)\}$. На промежутках $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \geqslant i_1 + N$, поступаем следующим образом. В моменты $t = \tau_i$ зададим векторы u_i и v_i^h согласно формулам (63), (64), в которых B_0 и P_0 заменены на B_1 и P_1 соответственно. Затем управления $u(t)$ в системе (1) и $v^h(t)$ в системе (60) задаём по формуле (65). После формирования указанных выше управлений вычисляем траектории $\{x_p(\cdot), y_p(\cdot)\}$ (системы (1)) и $w^h(\cdot)$ (системы (60)) на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Пусть при некотором $i \in [i_1 + N + 1 : m_h^3 - 1]$ первый раз выполняется неравенство (66), т.е. при всех $j \leqslant i-1$, $\tau_{i_1-1} + d_0^* \leqslant \tau_j$ имеют место неравенства $\tilde{\nu}_j \leqslant b^*/2$. Обозначим момент, соответствующий этому i, символом τ_{i_2+N}. Тогда вторая точка скачка a_2^* лежит на полуинтервале $(\tau_{i_2-1}, \tau_{i_2}]$. Причём величина b_2^* разрыва удовлетворяет неравенству

$$|b_2^* - \tilde{\nu}_{i_2+N}| \leqslant \chi(\alpha, \delta, h).$$

Аналогичные действия осуществляются и при $t \in [\tau_{i_k+N}, \vartheta]$. Именно, в момент τ_{i_k+N}, $k \geqslant 2$, рассматривается система

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_{1k}(t, x(t), y(t)) + \tilde{u}(t), \quad t \in [\tau_{i_k+N}, \vartheta], \tag{69}$$

с начальным состоянием

$$x(\tau_{i_k+N}) = x_0(\tau_{i_k-1}), \quad y(\tau_{i_k+N}+) = y_0(\tau_{i_k-1}) + \tilde{\nu}_{i_k+N} e_k \tag{70}$$

и управлением $\tilde{u}(\cdot) \in \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n) : u(t) \in E_k$ при п.в. $t \in [\tau_{i_k+N}, \vartheta]\}$. Решаем задачу оптимального управления, состоящую в переводе фазовой траектории системы (69) с начальным состоянием (70) в момент ϑ в минимальную окрестность множества M. Пусть $u_k(\cdot)$ –

оптимальное управление, решающее эту задачу, M^{ε_k} – соответствующая замкнутая ε_k-окрестность множества M. В частности, если разрешима задача о переводе траектории в момент ϑ на множество M, то полагаем $\varepsilon_k = 0$. В качестве семейства стабильных множеств $W_k(t)$, $t \in [\tau_{i_k+N}, \vartheta]$, берём решение системы (69) при $\tilde{u}(t) = u_k(t)$, $t \in [\tau_{i_k+N}, \vartheta]$. Обозначаем его через $\{x_0(t), y_0(t)\}$. Таким образом, $W_k(t) = \{x_0(t), y_0(t)\}$. На промежутках $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \geqslant i_k + N$, поступаем следующим образом. В моменты $t = \tau_i$ зададим векторы u_i и v_i^h согласно формулам (63), (64), в которых B_0 и P_0 заменены на B_k и P_k соответственно. Управления $u(t)$ в системе (1) и $v^h(t)$ в системе (60) задаём по формуле (64). После формирования указанных выше управлений вычисляем траектории $\{x_p(\cdot), y_p(\cdot)\}$ (системы (1)) и $w^h(\cdot)$ (системы (60)) на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Пусть при некотором $i \in [i_k + N + 1 : m_h^3 - 1]$ первый раз выполняется неравенство (66), т.е. при всех $j \leqslant i - 1$, $\tau_{i_k-1} + d_0^* \leqslant \tau_j$ имеют место неравенства $\tilde{\nu}_j \leqslant b^*/2$. Обозначим момент, соответствующий этому i, через $\tau_{i_{k+1}+N}$. Тогда $k+1$-я точка скачка a_{k+1}^* лежит на полуинтервале $(\tau_{i_{k+1}-1}, \tau_{i_{k+1}}]$. Причём величина b_{k+1}^* разрыва такова, что

$$|b_{k+1}^* - \tilde{\nu}_{i_{k+1}+N}| \leqslant \chi(\alpha, \delta, h).$$

Итак, в ходе работы алгоритма устанавливается, что $a_k^* \in (\tau_{i_k-1}, \tau_{i_k}]$, $k \in [1 : r]$.

Таким образом, ε-СГН определяется как стратегия экстремального прицеливания (см. (63)) на стабильную дорожку следующего вида:

$$W(t) = \begin{cases} W_0(t), & t \in [0, \tau_{i_1+N}), \\ W_k(t), & t \in [\tau_{i_k+N}, \tau_{i_{k+1}+N}), \quad k \in [1 : r-1], \\ W_r(t), & t \in [\tau_{i_r+N}, \vartheta]. \end{cases}$$

Этот факт следует из приведённой ниже теоремы.

Пусть $\delta^{(k)} = [\tau_{i_k-1}, \tau_{i_k+N})$, $\Delta^{(r)} = \bigcup_{k=1}^{r} \delta^{(k)} \bigcup [0, \tau_1)$, $\rho(h) = \vartheta(m_h^{-1} + m_h^{-3})$. Заметим, что $\tau_{i_k+N} - \tau_{i_k-1} = \rho(h)$. Поэтому мера Лебега множества $\Delta^{(r)}$ равна $r\rho(h) + \delta(h)$.

Теорема. *Для любого $\gamma_* > 0$ можно указать такие числа $h_* \in (0, 1)$ и $\delta_* \in (0, 1)$, что при всех $h \in (0, h_*)$, $\delta \in (0, \delta_*)$ справедливо неравенство*

$$\varepsilon(\vartheta) \leqslant \gamma_*,$$

где $\varepsilon(t) = |x_p(t) - x_0(t)|_n^2 + |y_p(t) - y_0(t)|_n^2$.

Доказательство теоремы следует из приведённой ниже леммы 9.

Пусть L_k – постоянная Липшица функции f_k, $L = \max\limits_{k \in [0:r]} L_k$, а $\omega_k(\delta)$, $k \in [0 : r]$, – модуль непрерывности функции $t \mapsto f_k(t, x, y, u, v)$ в той области, в которой остаются решения системы (1), а также стабильная дорожка $W(t)$, $t \in T$. Обозначим также

$$\omega(\delta) = \max_{k \in [0:r]} \omega_k(\delta).$$

Заметим, что все точки скачка сосредоточены во множестве $\Delta^{(r)}$.

Лемма 5. *Пусть $\delta_i \bigcap \Delta^{(r)} \neq \varnothing$. Тогда справедливо неравенство*

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + C_1\delta\varepsilon(\tau_i) + C_2\delta^2 + 4\omega^2(\delta)\delta + 2C_0h\delta,$$

где $C_0 = \sup\{|B_ku^{(1)} + C_ku^{(2)} + u^{(3)}|_n : u^{(1)} \in P_k,\ u^{(2)} \in Q_k,\ u^{(3)} \in E_k,\ k \in [0 : r]\}$, $C_1 = 4(1+L)$, $C_2 = 4L^2(F + d)^2 + 5F^2 + 4d^2$.

Доказательство. Согласно условию леммы на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ нет точек скачка. Пусть

$$a_k^* < \tau_i, \quad \tau_{i+1} < a_{k+1}^*.$$

Тогда траектория $\{x_p(\cdot), y_p(\cdot)\}$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ является решением системы

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_{1k}(t, x(t), y(t)) + B_ku_i - C_kv(t),$$

а траектория $\{x_0(\cdot), y_0(\cdot)\}$ – решением системы

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = f_{1k}(t, x(t), y(t)) + u_k(t),$$

где $u_k(\cdot)$ – соответствующее оптимальное управление, $u_k(t) \in E_k$ при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. В таком случае имеем оценку

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + I_{1i} + I_{2i} + 4(d^2 + F^2)\delta^2, \tag{71}$$

где

$$I_{1i} = 2\left(x_p(\tau_i) - x_0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{y_p(s) - y_0(s)\}\,ds\right), \quad I_{2i} = 2\left(y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} q_i(s)\,ds\right),$$

$$q_i(s) = f_*(s, x_p(s), y_p(s), u_i, v(s)) - f_*(s, x_0(s), y_0(s), u_k(s)),$$
$$f_*(s, x_p(s), y_p(s), u_i, v(s)) = f_{1k}(s, x_p(s), y_p(s)) + B_k u_i - C_k v(s),$$
$$f_*(s, x_0(s), y)(s), u_k(s)) = f_{1k}(s, x_0(s), y_0(s)) + u_k(s).$$

Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{y_p(s) - y_0(s)\}\,ds\right|_n = \left|\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i) + \left(\int\limits_{\tau_i}^{s} \{\dot{y}_p(\tau) - \dot{y}_0(\tau)\}\,d\tau\right)ds\right|_n \leqslant$$

$$\leqslant \delta|y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i)|_n + 2F\delta^2,$$

воспользовавшись которым, получаем

$$I_{1i} \leqslant 2\delta|x_p(\tau_i) - x_0(\tau_i)|_n|y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i)|_n + 2F\delta^2|x_p(\tau_i) - x_0(\tau_i)|_n \leqslant 2\delta\varepsilon(\tau_i) + F^2\delta^3. \tag{72}$$

Далее, в силу липшицевости функций f_{1k} по x, y и непрерывности по t, имеем при $s \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ неравенство

$$|q_i(s)|_n \leqslant |f_*(\tau_i, x_p(\tau_i), y_p(\tau_i), u_i, v(s)) - f_*(\tau_i, x_0(\tau_i), y_0(\tau_i), u_k(s))|_n + I_{3i}(s) + 2\omega(\delta). \tag{73}$$

Здесь $I_{3i}(s) = L\{|x_p(s) - x_p(\tau_i)|_n + |y_p(s) - y_p(\tau_i)|_n + |x_0(s) - x_0(\tau_i)|_n + |y_0(s) - y_0(\tau_i)|_n\} \leqslant 2L\delta(f + d)$. Из (73), снова воспользовавшись липшицевостью функций f_{1k}, выводим неравенство $(s \in \delta_i)$

$$|q_i(s)|_n \leqslant |f_*(\tau_i, x_0(\tau_i), y_0(\tau_i), u_i, v(s)) - f_*(\tau_i, x_0(\tau_i), y_0(\tau_i), u_k(s))|_n + q_{1i} + 2\omega(\delta) + 2L\delta(F + d),$$

где $q_{1i} = L\{|x_p(\tau_i) - x_0(\tau_i)|_n + |y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i)|_n\}$. Очевидно, что $q_{1i} \leqslant L\varepsilon^{1/2}(\tau_i)$. Поэтому $I_{2i} \leqslant I_{4i} + I_{5i}$, где

$$I_{4i} = 2\delta|y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i)|_n\{L\varepsilon^{1/2}(\tau_i) + 2\omega(\delta) + 2L\delta(F + d)\},$$

$$I_{5i} = 2\left(y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{f_*(\tau_i, x_0(\tau_i), y_0(\tau_i), u_i, v(s)) - f_*(\tau_i, x_0(\tau_i), y_0(\tau_i), u_k(s))\}\,ds\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$I_{5i} = 2\left(y_p(\tau_i) - y_0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{B_k u_i - C_k v(s) - u_k(s)\}\,ds\right).$$

Следовательно,

$$I_{5i} \leqslant 2\left(\psi_i^h - y_0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{B_k u_i - C_k v(s) - u_k(s)\}\, ds\right) + 2h\delta C_0.$$

Здесь $\psi_i^h \in \mathbb{R}^n$, $|\psi_i^h - y_p(\tau_i)|_n \leqslant h$. В таком случае, учитывая условие 1, а также правило выбора векторов u_i (см. (63), при этом в (63) B_0 и P_0 заменены на B_k и P_k соответственно) заключаем, что справедлива оценка $I_{5i} \leqslant 2h\delta C_0$. Значит,

$$I_{2i} \leqslant I_{4i} + I_{5i} \leqslant 2(1+L)\delta\varepsilon(\tau_i) + 4\omega^2(\delta)\delta + 4L^2(F+d)^2\delta^2 + 2h\delta C_0.$$

Отсюда в силу (71) и (72) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть $\tau_{i^{(k)}} = \max\{\tau_i : \tau_i < a^*_{k+1}\}$.

Лемма 6. *При всех* $k \in [0 : r-1]$ *справедливы неравенства*

$$\varepsilon(a^*_{k+1}-) \leqslant \nu_{k+1} = [\varepsilon(\tau_{i_k+N}+) + (a^*_{k+1} - a^*_k)(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1(a^*_{k+1} - a^*_k),$$

где $\varepsilon(a^*_{k+1}-) = \lim\limits_{t \to a^*_{k+1}-} \varepsilon(t)$.

Доказательство. В силу леммы из работы [12] и леммы 5 настоящей работы при $\tau_i \in [\tau_{i_k+N}, a^*_{k+1}]$ имеют место оценки

$$\varepsilon(\tau_i) \leqslant [\varepsilon(\tau_{i_k+N}+) + (\tau_i - \tau_{i_k+N})(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1(\tau_i - \tau_{i_k+N}). \tag{74}$$

Поэтому

$$\varepsilon(\tau_{i^{(k)}}) \leqslant \Psi_k = [\varepsilon(\tau_{i_k+N}+) + (\tau_{i^{(k)}} - \tau_{i_k})(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1(\tau_{i^{(k)}} - \tau_{i_k}).$$

Обозначим $\Delta_k = a^*_{k+1} - \tau_{i^{(k)}}$. Аналогично лемме 5, учитывая последнее неравенство, получаем

$$\varepsilon(a^*_{k+1}-) \leqslant (1 + C_1\Delta_k)\varepsilon(\tau_{i^{(k)}}) + \tilde{\rho}_k \leqslant (1 + C_1\Delta_k)\Psi_k + \tilde{\rho}_k, \tag{75}$$

где $\tilde{\rho}_k = C_2\Delta_k^2 + 4\omega^2(\Delta_k)\Delta_k + 2hC_0\Delta_k$. Нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$(1 + C_1\Delta_k)\Psi_k \leqslant [\varepsilon(\tau_{i_k+N}+) + (\tau_{i^{(k)}} - \tau_{i_k+N})(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1(a^*_{k+1} - a^*_k), \tag{76}$$

$$\tilde{\rho}_k \leqslant (a^*_{k+1} - \tau_{i^{(k)}})(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta)) \exp C_1(a^*_{k+1} - a^*_k). \tag{77}$$

Утверждение леммы следует из неравенств (75)–(77) и неравенства $a^*_k < \tau_{i_k+N}$. Лемма доказана.

Введём обозначение $\rho_1(h) = \rho(h) + \vartheta m_h^{-3}$.

Лемма 7. *Справедливы неравенства*

$$\varepsilon(\tau_{i_1+N}+) = |y_0(\tau_{i_1+N}+) - y_p(\tau_{i_1+N}+)|_n^2 + |x_0(\tau_{i_1+N}) - x_p(\tau_{i_1+N})|_n^2 \leqslant 4\varepsilon(a^*_1-) + \phi_1(h,\delta), \tag{78}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon(\tau_{i_k+N}+) = |y_0(\tau_{i_k+N}+) - y_p(\tau_{i_k+N}+)|_n^2 + |x_0(\tau_{i_k+N}) - x_p(\tau_{i_k+N})|_n^2 \leqslant \\ \leqslant 4\varepsilon(a^*_k-) + \phi(h,\delta) \quad \text{при} \quad k \in [2:r],\end{gathered} \tag{79}$$

где $\phi_1(h,\delta) = 4(\chi_1 + F\rho_1(h))^2 + 8d^2\rho^2(h)$, $\phi(h,\delta) = 4(\chi + F\rho_1(h))^2 + 8d^2\rho^2(h)$.

Доказательство. Проверим неравенство (78). По определению

$$\varepsilon(a^*_k-) = |y_0(a^*_k-) - y_p(a^*_k-)|_n^2 + |x_0(a^*_k) - x_p(a^*_k)|_n^2.$$

В момент τ_{i_1+N} устанавливаем, что $a^*_1 \in (\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1+N}]$ и

$$|b^*_1 - \tilde{\nu}_{i_1+N}| \leqslant \chi_1 = \chi_1(\alpha,\delta,h). \tag{80}$$

Полагаем (см. (68))

$$y_0(\tau_{i_1+N}+) = y_0(\tau_{i_1-1}) + \tilde{\nu}_{i_1+N} e_1. \tag{81}$$

По постановке задачи имеет место равенство

$$y_p(a_1^*+) = y_p(a_1^*-) + b_1^* e_1. \tag{82}$$

Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$|y_0(a_1^*-) - y_p(a_1^*-)|_n \leqslant \varepsilon^{1/2}(a_1^*-). \tag{83}$$

При $t \in (a_1^*, \tau_{i_1+N}]$ скачков нет. Кроме того, $|F_k|_n \leqslant F$, $k \in [0 : r]$. В таком случае

$$|y_p(\tau_{i_1+N}) - y_p(a_1^*+)|_n \leqslant F\rho(h). \tag{84}$$

Так как $a_1^* \in (\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}]$, $\tau_{i_1} - \tau_{i_1-1} = \delta(h) = \vartheta m_h^{-3}$, $|F_k|_n \leqslant F$, то верна оценка

$$|y_0(\tau_{i_1-1}) - y_0(a_1^*-)|_n \leqslant F\delta = F\vartheta m_h^{-3}. \tag{85}$$

Поэтому вследствие соотношений (80)–(85) справедлива цепочка неравенств

$$\begin{gathered}
|y_0(\tau_{i_1+N}+) - y_p(\tau_{i_1+N}+)|_n = |y_0(\tau_{i_1-1}) + \tilde{\nu}_{i_1+N} e_1 - y_p(\tau_{i_1+N})|_n = \\
= |y_0(\tau_{i_1-1}) + \tilde{\nu}_{i_1+N} e_1 - y_p(\tau_{i_1+N}) + y_p(a_1^*+) - y_p(a_1^*+)|_n \leqslant \\
\leqslant |y_0(\tau_{i_1-1}) + \tilde{\nu}_{i_1+N} e_1 - y_p(a_1^*+)|_n + |y_p(a_1^*+) - y_p(\tau_{i_1+N})|_n \leqslant \\
\leqslant |y_0(\tau_{i_1-1}) - y_p(a_1^*-)|_n + \chi_1 + F\rho(h) \leqslant \\
\leqslant |y_0(\tau_{i_1-1}) - y_0(a_1^*-)|_n + |y_0(a_1^*-) - y_p(a_1^*-)|_n + \chi_1 + F\rho(h) \leqslant \\
\leqslant |y_0(a_1^*-) - y_p(a_1^*-)|_n + \chi_1 + F\rho_1(h) \leqslant \varepsilon^{1/2}(a_1^*-) + \chi_1(\alpha, \delta, h) + F\rho_1(h).
\end{gathered} \tag{86}$$

Так как $a_1^* \in (\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}]$, $N\delta = \vartheta m_h^{-1}$, функция $x_p(\cdot)$ непрерывна на T, а функция $x_0(\cdot)$ – на $[a_1^*, \tau_{i_1+N}]$, то справедливы неравенства

$$|x_0(\tau_{i_1+N}) - x_0(a_1^*)|_n \leqslant d(\tau_{i_1+N} - a_1^*) \leqslant d\rho(h) \quad \text{и} \quad |x_p(\tau_{i_1+N}) - x_p(a_1^*)|_n \leqslant d\rho(h).$$

Следовательно,

$$|x_p(\tau_{i_1+N}) - x_0(\tau_{i_1+N})|_n \leqslant |x_0(a_1^*) - x_p(a_1^*)|_n + 2d\rho(h) \leqslant \varepsilon^{1/2}(a_1^*-) + 2d\rho(h). \tag{87}$$

Из (86), (87) вытекает неравенство (78).

Неравенство (79) устанавливается аналогично. Лемма доказана.

Пусть

$$\Psi_0(h, \delta) = (1 + 4\delta^2)(h + 2F\delta)^2 + h^2 + 4h\delta(h + 2F\delta),$$

$$\Psi_1(h, \delta) = [\Psi_0(h, \delta) + a_1^*(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1 a_1^*.$$

Лемма 8. *При* $k \in [1 : r-1]$ *справедливы неравенства*

$$\varepsilon(a_{k+1}^*-) \leqslant \Psi_{k+1}(h, \delta) = [4\Psi_k(h, \delta) + \phi_*(h, \delta) + \vartheta(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1\vartheta,$$

где $\phi_*(h, \delta) = \phi_1(h, \delta)$, *если* $k = 1$, *и* $\phi_*(h, \delta) = \phi(h, \delta)$, *если* $k \in [2 : r-1]$.

Доказательство. В силу лемм 6 и 7 имеет место оценка

$$\varepsilon(a_{k+1}^*-) \leqslant [4\varepsilon(a_k^*-) + \phi_*(h,\delta) + (a_{k+1}^* - a_k^*)(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1\vartheta.$$

В таком случае

$$\varepsilon(a_{k+1}^*-) \leqslant [4\varepsilon(a_k^*-) + \phi_*(h,\delta) + \vartheta(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1\vartheta. \tag{88}$$

Аналогично лемме 6 устанавливается неравенство

$$\varepsilon(a_1^*-) \leqslant [\varepsilon(\tau_1) + a_1^*(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1 a_1^* \leqslant \Psi_1(h,\delta). \tag{89}$$

Заметим, что в силу (5), (62) и (59) справедливы неравенства

$$|y_p(\tau_1) - y_0(\tau_1)|_n \leqslant h + 2F\delta, \quad |x_p(\tau_1) - x_0(\tau_1)|_n \leqslant h + 2\delta(h + 2F\delta).$$

Поэтому

$$\varepsilon(\tau_1) \leqslant (h + 2F\delta)^2 + [h + 2\delta(h + 2F\delta)]^2 \leqslant \Psi_0(h,\delta).$$

Из (88), (89) и последнего неравенства следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 9. *Для любого* $\gamma_0 > 0$ *можно указать такие* $h_* \in (0,1)$ *и* $\delta_* \in (0,1)$, *что при всех* $\delta \leqslant \delta_*$, $h \leqslant h_*$, $\tau_i \notin \Delta^{(r)}$ *верны неравенства*

$$\varepsilon(\tau_i) \leqslant \Psi_r(h,\delta) \leqslant \gamma_0.$$

Доказательство. Функции $\Psi_k(h,\delta)$ обладают следующим свойством:

$$\Psi_k(h,\delta) < \Psi_{k+1}(h,\delta) \quad \text{при} \quad k \in [0 : r-1].$$

По всякому $\gamma_0 > 0$ можно указать такие $\delta_* = \delta_*(\gamma_0) > 0$ и $h_* = h_*(\gamma_0) > 0$, что при всех $h \in (0, h_*)$, $\delta \in (0, \delta_*)$ справедливо неравенство $\Psi_r(h,\delta) \leqslant \gamma_0$. Поэтому при $\delta \in (0,\delta_*)$, $h \in (0, h_*)$ верны неравенства $\varepsilon(a_k^*-) \leqslant \gamma_0$ при всех $k \in [1 : r]$. Как отмечено выше, справедливо неравенство (74). Из этого неравенства и леммы 7 при $\tau_i \in [\tau_{i_k+N}, a_{k+1}^*]$ получаем

$$\varepsilon(\tau_i) \leqslant [4\varepsilon(a_k^*-) + \phi_*(h,\delta) + (\tau_i - \tau_{i_k+N})(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1(\tau_i - \tau_{i_k+N}) \leqslant$$

$$\leqslant [4\varepsilon(a_k^*-) + \phi_*(h,\delta) + \vartheta(C_2\delta + 2hC_0 + 4\omega^2(\delta))] \exp C_1\vartheta.$$

Отсюда, учитывая лемму 8, выводим оценку $\varepsilon(\tau_i) \leqslant \Psi_{k+1}(h,\delta) \leqslant \gamma_0$. Лемма доказана.

Замечание 2. В силу леммы 9 и неравенства $\vartheta - a_r^* > \rho(h)$ при $\delta \leqslant \delta_*$, $h \leqslant h_*$ справедливо неравенство $\varepsilon(\vartheta) \leqslant \gamma_0$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Замечание 3. Пусть в начальный момент построено семейство u-стабильных множеств позиционного поглощения, обеспечивающих решение задачи гарантированного наведения системы (3) с правой частью $f = f_0$ из начального состояния $\{x_0, y_0\}$ в наименьшую окрестность множества M. Пусть это будет ε-окрестность. Обозначим построенное семейство через $\tilde{W}^\varepsilon(t)$, $t \in T$. Анализ описанного выше алгоритма позволяет сделать вывод, что, если в момент скачков a_k^* выполняются включения

$$\{x_p(a_k^*), y_p(a_k^*+)\} \in \tilde{W}^\varepsilon(a_k^*), \quad k \in [1 : r],$$

то СГН обеспечивает перевод фазовой траектории системы (3) в сколь угодно малую окрестность множества M^ε при достаточно малых h и δ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М., 1985.
3. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М., 1981.

4. Избранные труды Осипова Ю.С. М., 2009.
5. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М., 1990.
6. *Ушаков В.Н.* К построению стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
7. *Кряжимский А.В.* К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 123–128.
8. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Basel, 1995.
9. *Осипов Ю.С.* Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. № 4. С. 25–76.
10. *Кряжимский А.В., Максимов В.И.* О сочетании процессов реконструкции и гарантированного управления // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 26–34.
11. *Максимов В.И.* Дифференциальная игра наведения при неполной информации о фазовых координатах и неизвестном начальном состоянии // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1676–1685.
12. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М., 1967.
13. *Завалищин С.Е., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы: модели и приложения. М., 1991.
14. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М., 2004.
15. *Семеров В.В., Репин В.М., Журина Н.Э.* Алгоритмизация процессов управления летательными аппаратами в классе логико-динамических систем. М., 1987.
16. *Бортаковский А.С.* Оптимизация переключающихся систем. М., 2016.
17. *Engell S., Frehse G., Schnieder E.* Modeling, Analysis and Design of Hybrid System. Berlin; Heidelberg, 2002.
18. *Savkin A.V., Evans R.J.* Hybrid Dynamical Systems: Controller and Sensor Switching Problems. Boston, 2002.
19. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань, 2011. С. 23–81.
20. *Axelsson H., Boccadoro V., Egerstedt M., Valigi P., Wardi Y.* Optimal mode-switching for hybrid systems with varying initial states // J. of Nonlin. Anal.: Hybrid Systems and Appl. 2008. V. 2. № 3. P. 765–772.
21. *Максимов В.И.* Об отслеживании траектории динамической системы // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75. № 6. С. 951–960.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Математический институт
им. В.А Стеклова РАН, г. Москва,
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 22.01.2021 г.
После доработки 22.01.2021 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.