ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 572–576

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.926.4

ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА РАДИУСОВ ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ СФЕР РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

© 2021 г. **А. С. Войделевич**

Рассматриваются линейные стационарные дифференциальные уравнения с производной Хукухары. Доказано, что если решение такого уравнения имеет в начальный момент непустую внутренность, то показатели Ляпунова радиусов вписанной и описанной сфер этого решения являются строгими и равны соответственно минимальному и максимальному модулям собственных значений матрицы коэффициентов системы.

DOI: 10.31857/S0374064121040105

1. Введение. Постановка задачи. В работе рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с производной Хукухары [1; 2, с. 14]. Непосредственно из определения производной Хукухары следует, что решения таких уравнений представляют собой при каждом значении независимой переменной компактные выпуклые множества пространства $\mathbb{R}^d$ при некотором $d \in \mathbb{N}$, а значит, обладают нетривиальными геометрическими характеристиками, изучение которых как функций независимой переменной для решений представляет определённый интерес. Так, например, в работе [3] для некоторых классов уравнений с производной Хукухары получена формула вычисления d-мерного объёма значений их решений, а в работе [4] дано полное описание линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары, сохраняющих многогранники, т.е. таких уравнений, что любое их решение, которое при начальном значении независимой переменной является многогранником, остаётся многогранником и для всех последующих значений.

В настоящей работе для линейных стационарных дифференциальных уравнений с производной Хукухары рассматриваются две геометрические характеристики решений – радиусы вписанных и описанных сфер значений решений как функции независимой переменной и в терминах матрицы коэффициентов системы вычислены их показатели Ляпунова.

Прежде чем точно сформулировать постановку задачи и изложить её решение, приведём ряд необходимых определений. Через $\Omega(\mathbb{R}^d)$ обозначим семейство всех непустых ограниченных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$. Совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$ обозначим через $K_c(\mathbb{R}^d)$.

Определение 1. *Суммой Минковского* $Z = X+Y$ двух множеств $X,\ Y \subset \mathbb{R}^d$ называется множество $Z \overset{\text{def}}{=} \{x+y\colon x\in X,\ \ y \in Y\}$.

Определение 2 [1]. Множество $Z \in K_c(\mathbb{R}^d)$ такое, что $X = Y + Z$, где $X,\ Y \in K_c(\mathbb{R}^d)$, называется *разностью Хукухары* множеств $X,\ Y$ и обозначается как $Z = X - Y$.

Отметим, что не для любой пары множеств $X,\ Y \in K_c(\mathbb{R}^d)$ определена разность Хукухары $X - Y$. Более того, если существует такое множество $Z \in K_c(\mathbb{R}^d)$, что $X = Y + Z$, то, вообще говоря, $Z \neq X + (-Y)$. Однако если разность Хукухары множеств X и Y существует, то она единственна.

Через $B \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x\| \leqslant 1\}$ обозначим замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат.

Определение 3. *Расстоянием Хаусдорфа* $h(\,\cdot\,,\cdot\,)$ на множестве $\Omega(\mathbb{R}^d)$ называется величина

$$h(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \inf\{r \geqslant 0 : X \subset Y + rB,\ \ Y \subset X + rB\},\quad X, Y \in \Omega(\mathbb{R}^d).$$

Согласно теореме Хана пара $(K_c(\mathbb{R}^d), h)$ – полное метрическое пространство.

Определение 4. Для произвольного множества $X \in \Omega(\mathbb{R}^d)$ через $r(X)$ и $R(X)$ обозначим радиусы его вписанной и описанной сфер соответственно, т.е.

$$r(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{r \geqslant 0 : x_0 + rB \subset X, \;\; x_0 \in \mathbb{R}^d\} \quad \text{и} \quad R(X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{r \geqslant 0 : X \subset x_0 + rB, \;\; x_0 \in \mathbb{R}^d\}.$$

Через $I \subset \mathbb{R}$ обозначим какой-либо интервал, вообще говоря, неограниченный.

Определение 5 [1]. Отображение $X\colon I \to K_c(\mathbb{R}^d)$ называется *дифференцируемым по Хукухаре* в точке $t_0 \in I$, если пределы

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \to +0} \frac{X(t_0) - X(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}$$

существуют и равны между собой. В этом случае общее значение этих пределов, являющееся, очевидно, выпуклым компактом, обозначается через $D_H X(t_0)$ и называется *производной Хукухары* отображения X в точке t_0.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$D_H X = AX, \quad X(t) \in K_c(\mathbb{R}^d), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с постоянной $d \times d$-матрицей коэффициентов A. Через $\mu_1(A)$ и $\mu_n(A)$ обозначим соответственно максимальное и минимальное по модулю собственные значения матрицы A. Радиусы вписанной и описанной сфер произвольного решения $X(\cdot)$ уравнения (1) будем рассматривать как функции от времени t.

Естественно возникает задача описания асимптотического поведения радиусов вписанных и описанных сфер решений уравнения (1). Несложно видеть, что если отображение $X\colon I \to$ $\to K_c(\mathbb{R}^d)$ дифференцируемо в каждой точке интервала I, то для любых чисел a и b, $a < b$, из интервала I определена разность $X(b) - X(a)$. Следовательно, радиус $r(X(t))$ вписанной и радиус $R(X(t))$ описанной сфер решения $X(t)$ являются неубывающими функциями.

В настоящей работе доказано, что если внутренность решения $X(\cdot)$ в начальный момент времени не пустая, то показатели Ляпунова $\lambda[r(X)]$ и $\lambda[R(X)]$ радиусов $r(X(t))$ и $R(X(t))$ являются строгими и равны соответственно величинам $|\mu_n(A)|$ и $|\mu_1(A)|$, т.е.

$$\lambda[r(X)] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log r(X(t)) = |\mu_n(A)| \quad \text{и} \quad \lambda[R(X)] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log R(X(t)) = |\mu_1(A)|.$$

2. Основной результат. Докажем сначала ряд вспомогательных утверждений.

Определение 6. *Опорной функцией* произвольного множества $X \in \Omega(\mathbb{R}^d)$ называется функция $s(X, \cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $s(X, v) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{x \in X}(x, v)$, $v \in \mathbb{R}^d$, где $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – естественное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Несложно видеть, что для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^d$ верны равенства

$$s(\mathbb{S}^{n-1}, v) = s(B, v) = \|v\|,$$

где $\mathbb{S}^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x\| = 1\}$ – единичная $(n-1)$-мерная сфера с центром в нуле. Если $X \subset Y$, то $s(X, v) \leqslant s(Y, v)$ для любого $v \in \mathbb{R}^d$. Обратно, если $Y \in K_c(\mathbb{R}^d)$ и $s(X, v) \leqslant s(Y, v)$ при всех $v \in \mathbb{R}^d$, то $X \subset Y$.

Лемма 1. *Пусть* $X \in K_c(\mathbb{R}^d)$ *– центрально-симметричное относительно нуля множество, т.е.* $X = -X$, *тогда имеют место равенства*

$$r(X) = \min_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} s(X, v) \quad \text{и} \quad R(x) = \max_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} s(X, v).$$

Доказательство. Если для некоторых точек $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^d$ и неотрицательных чисел $r_1, r_2 \geqslant \geqslant 0$ верны включения $p_1 + r_1 B \subset X \subset p_2 + r_2 B,$ то $r_1 B \subset X \subset r_2 B.$ Действительно, так как множество X центрально-симметричное, то $-p_1 + r_1 B \subset X \subset -p_2 + r_2 B.$ Следовательно,

$$r_1 B = \frac{1}{2}(-p_1 + r_1 B + p_1 + r_1 B) \subset X \quad \text{и} \quad X \subset (-p_2 + r_2 B) \bigcap (p_2 + r_2 B) \subset r_2 B.$$

Поэтому в определении 4 радиусов вписанной и описанной сфер достаточно рассматривать сферы с центром в нуле.

Обозначим $\rho = \min\limits_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} s(X, v).$ Так как множество X является центрально-симметричным относительно нуля, то $\rho \geqslant 0.$ Если для некоторого числа $r \geqslant 0$ верно включение $rB \subset X,$ то

$$r = s(rB, v) \leqslant s(X, v), \quad v \in \mathbb{S}^{n-1},$$

а значит, $r(X) \leqslant \rho.$ С другой стороны, имеем $s(\rho B, v) \leqslant s(X, v),$ $v \in \mathbb{S}^{n-1},$ и, следовательно, $\rho B \subset X.$ Поэтому $r(X) = \min\limits_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} s(X, v).$ Равенство $R(X) = \max\limits_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} s(X, v)$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Для произвольного решения $X(\cdot)$ уравнения (1) справедливо равенство

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^k}{k!} A^k X(t_0), \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0, \tag{2}$$

доказательство которого приведено в работе [4]. В частности, из равенства (2) следует, что, если $X(t_0) = B,$ то

$$s(X(t), v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^k}{k!} s(A^k B, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^k}{k!} \|(A^{\mathrm{T}})^k v\|, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0.$$

Лемма 2. *Пусть $X(\cdot)$ – такое решение уравнения (1), что $X(0) = B.$ Тогда показатель Ляпунова $\lambda[r(X)]$ радиуса $r(X(t))$ вписанной сферы решения $X(t)$ является строгим и равен $|\mu_n(A)|.$*

Доказательство. Матрицы A и $A^{\mathrm{т}}$ подобны, поэтому $\mu_n(A^{\mathrm{т}}) = \mu_n(A).$ Если матрица A вырожденная, т.е. $\mu_n(A) = 0,$ то найдётся такой вектор $v \in \mathbb{S}^{n-1},$ что $A^{\mathrm{т}} v = 0.$ Следовательно, $s(X(t), v) = 1.$ Из равенства (2) следует, что $X(t)$ – центрально-симметричное множество относительно нуля при любом $t \geqslant 0.$ Поэтому, согласно лемме 1, верно неравенство $r(X(t)) \leqslant 1.$ С другой стороны, $r(X(t)) \geqslant r(X(0)) > 0,$ поэтому

$$\lambda[r(X)] = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log r(X(t)) = 0.$$

Пусть $\mu_n(A) \neq 0,$ т.е. существует обратная матрица $A^{-\mathrm{т}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (A^{\mathrm{т}})^{-1}.$ Тогда для любого вектора $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ и целого числа k верно неравенство

$$\|(A^{\mathrm{т}})^k v\| \geqslant \|(A^{-\mathrm{т}})^k\|^{-1} \|v\| = \|(A^{-\mathrm{т}})^k\|^{-1}.$$

Согласно формуле Гельфанда [5] имеет место равенство

$$\lim_{k \to +\infty} \|(A^{-\mathrm{т}})^k\|^{1/k} = |\mu_n(A)|^{-1}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N_\varepsilon > 0,$ что при $k \geqslant N_\varepsilon$ справедливо неравенство $\|(A^{-\mathrm{т}})^k\| \leqslant (|\mu_n(A)|^{-1} + \varepsilon)^k,$ а значит,

$$\|(A^{\mathrm{т}})^k v\| \geqslant \frac{1}{(|\mu_n(A)|^{-1} + \varepsilon)^k} \quad \text{при} \quad v \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Для некоторого многочлена $p_\varepsilon(t)$, коэффициенты которого не зависят от вектора v, имеет место неравенство
$$s(X(t),v) \geqslant p_\varepsilon(t) + \exp\bigg(\frac{t}{|\mu_n(A)|^{-1}+\varepsilon}\bigg).$$
Из леммы 1 следует оценка
$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log r(X(t)) \geqslant \frac{1}{|\mu_n(A)|^{-1}+\varepsilon},$$
устремляя в которой ε к нулю, получаем, что
$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log r(X(t)) \geqslant |\mu_n(A)|.$$

Пусть $v = x+iy$ – собственный вектор матрицы $A^{\text{т}}$, соответствующий собственному значению $\mu_n(A)$. Без нарушения общности считаем $\|v\|=1$ и $\|x\|\geqslant 1/\sqrt{2}$ (если $\|x\|\leqslant\|y\|$, то вместо v нужно рассмотреть вектор iv). Так как $\|(A^{\text{т}})^k v\|^2 = \|(A^{\text{т}})^k x\|^2 + \|(A^{\text{т}})^k y\|^2$, то выполняется неравенство
$$\|(A^{\text{т}})^k x\| \leqslant \|(A^{\text{т}})^k v\| = |\mu_n(A)|^k.$$
Положим $u = x/\|x\| \in \mathbb{S}^{n-1}$. Тогда $\|(A^{\text{т}})^k u\| \leqslant \sqrt{2}|\mu_n(A)|^k$, а значит,
$$s(X(t),u) \leqslant \sqrt{2}\exp(|\mu_n(A)|t) \quad \text{и} \quad \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log r(X(t)) \leqslant \mu_n(A).$$
Поэтому показатель Ляпунова $\lambda[r(X)]$ является строгим и равен $|\mu_n(A)|$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $X(\cdot)$ – такое решение уравнения (1), что $X(0)=B$, то показатель Ляпунова $\lambda[R(X)]$ радиуса $R(X(t))$ описанной сферы решения $X(t)$ является строгим и равен $|\mu_1(A)|$.*

Доказательство. Согласно формуле Гельфанда $\lim\limits_{t\to+\infty}\|(A^{\text{т}})^k\|^{1/k} = |\mu_1(A)|$. При $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ верно $\|(A^{\text{т}})^k v\| \leqslant \|(A^{\text{т}})^k\|$. Рассуждая аналогично доказательству леммы 2, получаем, что
$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log R(X(t)) \leqslant |\mu_1(A)|.$$

Пусть $v = x+iy$ – единичный собственный вектор матрицы $A^{\text{т}}$, соответствующий собственному значению $\mu_1(A)$. Тогда $\|(A^{\text{т}})^k x\| + \|(A^{\text{т}})^k y\| \geqslant \|(A^{\text{т}})^k v\| = |\mu_1(A)|^k$, а значит,
$$2R(X(t)) \geqslant s(X(t),x/\|x\|) + s(X(t),y/\|y\|) \geqslant s(X(t),x) + s(X(t),y) \geqslant \exp(|\mu_1(A)|t),$$
так как $\|x\|\leqslant 1$ и $\|y\|\leqslant 1$ (если, скажем, $x=0$, то считаем, что $x/\|x\|=0$). Следовательно,
$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log R(X(t)) \geqslant |\mu_1(A)|.$$
Поэтому показатель Ляпунова $\lambda[R(X)]$ является строгим и равен $|\mu_1(A)|$. Лемма доказана.

Пусть $Y(\cdot)$ и $Z(\cdot)$ – такие два решения уравнения (1), что для некоторого значения $t_0\geqslant 0$ верно равенство $Z(t_0) = p + kY(t_0)$, где $p\in\mathbb{R}^d$ и $k\geqslant 0$. Тогда $Z(t) = e^{A(t-t_0)}p + kY(t)$ при $t\geqslant t_0$, а значит,
$$r(Z(t)) = kr(Y(t)) \quad \text{и} \quad R(Z(t)) = kR(Y(t)).$$
В частности, из лемм 2 и 3 вытекает, что если $Z(0) = p + kB$, $k>0$, то показатели Ляпунова $\lambda[r(Z)]$ и $\lambda[R(Z)]$ радиусов $r(Z(t))$ вписанной и $R(Z(t))$ описанной сфер решения $Z(t)$ являются строгими и равны соответственно величинам $|\mu_n(A)|$ и $|\mu_1(A)|$.

Из равенства (2) непосредственно следует, что если для решений $Y(\cdot)$, $Z(\cdot)$ уравнения (1) и некоторого значения $t_0\geqslant 0$ верно включение $Y(t_0)\subset Z(t_0)$, то $Y(t)\subset Z(t)$ при всех $t\geqslant t_0$.

Теорема. *Пусть* $X_0 \in K_c(\mathbb{R}^d)$ *– выпуклое компактное множество с непустой внутренностью, а* $X(\cdot)$ *– такое решение уравнения (1), что* $X(0) = X_0$. *Тогда показатели Ляпунова* $\lambda[r(X)]$ *и* $\lambda[R(X)]$ *радиусов* $r(X(t))$ *вписанной и* $R(X(t))$ *описанной сфер решения* $X(t)$ *являются строгими и равны соответственно величинам* $|\mu_n(A)|$ *и* $|\mu_1(A)|$.

Доказательство. Выберем два шара $p_1 + r_1 B$ и $p_2 + r_2 B$, $r_2 \geqslant r_1 > 0$, таких, что $p_1 + r_1 B \subset X(0) \subset p_2 + r_2 B$. Рассмотрим решения $X_1(\cdot)$ и $X_2(\cdot)$ уравнения (1) с начальными условиями

$$X_1(0) = p_1 + r_1 B \quad \text{и} \quad X_2(0) = p_2 + r_2 B.$$

Тогда $X_1(t) \subset X(t) \subset X_2(t)$ при $t \geqslant 0$. Следовательно,

$$r(X_1(t)) \leqslant r(X(t)) \leqslant r(X_2(t)) \quad \text{и} \quad R(X_1(t)) \leqslant R(X(t)) \leqslant R(X_2(t)).$$

Поэтому $\lambda[r(X(t))] = |\mu_n(A)|$ и $\lambda[R(X(t))] = |\mu_1(A)|$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hukuhara M.* Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe // Funk. Ekv. 1967. V. 10. P. 205–223.
2. *Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces. London, 2006.
3. *Атамась И.В., Слынько В.И.* Формула Лиувилля–Остроградского для некоторых классов дифференциальных уравнений с производной Хукухары // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1452–1464.
4. *Войделевич А.С.* Стационарные линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие многогранники // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1695–1698.
5. *Gelfand I.* Normierte Ringe // Мат. сб. 1941. Т. 9 (51). № 1. С. 3–24.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 08.08.2020 г.
После доработки 08.08.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.