ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 4, с. 577–580

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.926.4

ОБ УБЫВАЮЩИХ К НУЛЮ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ, ИЗМЕНЯЮЩИХ ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА ПРАВИЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2021 г. Н. С. Нипарко

Доказано, что, какова бы ни была вещественнозначная функция $\theta(\cdot)$, определённая на полуоси $[0,+\infty)$, монотонно возрастающая к $+\infty$ и такая, что $\theta(t)/t\to 0$ при $t\to+\infty$, при любом натуральном $n\geqslant 2$ существует такая n-мерная правильная по Ляпунову линейная дифференциальная система, показатели Ляпунова которой изменяются при некотором возмущении её матрицы коэффициентов, норма которого при всех $t\geqslant 0$ не превосходит $\operatorname{const}\exp\{-\theta(t)\}$. Ранее примеры таких правильных систем были известны только при $\theta(t)=\sqrt{t}$.

DOI: 10.31857/S0374064121040117

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot x = A(t)x,\quad x=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+:=[0,+\infty),\tag{1}$$

порядка $n\geqslant 2$, матрица коэффициентов $A(\cdot)\colon\mathbb{R}_+\to\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ которой кусочно-непрерывна и ограничена на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$. Через $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$ обозначим показатели Ляпунова системы (1). Система (1) называется *правильной* [1, с. 38], если существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\int_0^t\operatorname{Sp}A(\tau)\,d\tau=:\mathcal{I}_A$, где $\operatorname{Sp}A(\cdot)$ – след матрицы $A(\cdot)$, и для её показателей Ляпунова имеет место равенство $\lambda_1(A)+\ldots+\lambda_n(A)=\mathcal{I}_A$. Класс правильных систем (1) обозначим через $\mathfrak{R}_n$ и, отождествляя систему (1) и её матрицу коэффициентов, принадлежность системы (1) этому классу будем записывать как $A\in\mathfrak{R}_n$.

Класс правильных систем введён А.М. Ляпуновым [1, с. 38] и является следующим после класса приводимых систем классом систем с переменными коэффициентами, по своим свойствам наиболее близким классу систем с постоянными коэффициентами. Так, правильные системы при возмущениях высшего порядка малости сохраняют [1, с. 44–55] условную экспоненциальную устойчивость, а также размерность экспоненциально устойчивого многообразия и показатель асимптотики его решений. Поскольку правильные системы по своим свойствам должны быть близки системам с постоянными коэффициентами, а для последних показатели Ляпунова, как доказано К.П. Персидским, не изменяются при линейных убывающих к нулю возмущениях, то одно время предполагалась справедливой гипотеза о том, что убывающие к нулю возмущения матрицы коэффициентов правильной системы не изменяют показателей Ляпунова системы, т.е. если $A\in\mathfrak{R}_n$ и кусочно-непрерывная $n\times n$-матрица $Q(\cdot)$ такова, что $\|Q(t)\|\to 0$ при $t\to+\infty$, то показатели Ляпунова системы (1) и показатели Ляпунова $\lambda_1(A+Q)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A+Q)$ возмущённой системы

$$\dot y=(A(t)+Q(t))y,\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

равны между собой: $\lambda_k(A)=\lambda_k(A+Q)$ при всех $k=\overline{1,n}$. Справедливость этой гипотеза была подтверждена для некоторых подклассов класса правильных систем в работах Б.Ф. Былова и И.Г. Малкина. Однако в общем случае эта гипотеза оказалась неверной: первые контрпримеры к ней построены Р.Э. Виноградом в работах [2, 3]. Позже В.М. Миллионщиков усилил этот результат, доказав [4], что линейные убывающие к нулю возмущения могут изменять показатели Ляпунова даже статистически правильных систем – специального подкласса класса правильных систем.

В работе [2] Р.Э. Виноградом построена такая система $A \in \mathfrak{R}_2$ и такая кусочно-непрерывная 2×2-матрица $Q(\cdot)$, удовлетворяющая при всех $t \geqslant 0$ оценке $\|Q(t)\| \leqslant \mathrm{const}\, \exp(-\sqrt{t})$, что $\lambda_2(A+Q) > \lambda_2(A)$. Естественно возникает вопрос, сколь быстро может убывать к нулю норма кусочно-непрерывной матрицы-возмущения, чтобы это возмущение могло изменить показатели Ляпунова правильной системы. Результат в противоположном направлении – об устойчивости показателей Ляпунова правильных систем – хорошо известен и вытекает из теоремы Богданова–Гробмана [5, 6], вследствие которой, если матрица-возмущение $Q(\cdot)$ удовлетворяет условию $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|Q(t)\| < 0$, то такое возмущение не изменяет показателей Ляпунова правильной системы. Поэтому, чтобы матрица-возмущение $Q(\cdot)$, норма которой убывает к нулю на бесконечности, могла изменять показатели Ляпунова правильной системы, необходимо должно выполняться равенство $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|Q(t)\| = 0$.

Это утверждение близко к достаточному, как показывает следующая

Теорема. *Для любого $n \geqslant 2$, какова бы ни была положительная функция $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, монотонно возрастающая к $+\infty$, для которой $\theta(t)/t \to 0$ при $t \to +\infty$, существуют система $A \in \mathfrak{R}_n$ и кусочно-непрерывная $n\times n$-матрица $Q(\cdot)$, удовлетворяющая при всех $t \in \mathbb{R}_+$ оценке $\|Q(t)\| \leqslant \mathrm{const}\,\exp\{-\theta(t)\}$, такие, что справедливо неравенство $\lambda_n(A+Q) > \lambda_n(A)$.*

Доказательство теоремы проводится методом поворотов Миллионщикова [4, 7] с использованием δ-характеристической последовательности для функции $\theta(\cdot)$ [8].

1. Для функции $\theta(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, монотонно возрастающей к $+\infty$, определим зависящую от положительных числовых параметров δ и α последовательность $(T_k(\delta,\alpha;\theta))_{k\in\mathbb{N}}$ рекуррентно следующими соотношениями [8]:

$$T_1(\delta,\alpha;\theta) = \alpha \quad \text{и} \quad T_k(\delta,\alpha;\theta) = T_{k-1}(\delta,\alpha;\theta) + \delta\theta(T_{k-1}(\delta,\alpha;\theta)) \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где число $\alpha = \mathrm{fix}$ – любое, такое, что $\theta(t) > 0$ при всех $t \geqslant \alpha$. Положим ещё $T_0(\delta,\alpha;\theta) = 0$. Далее считаем, что монотонно возрастающая к $+\infty$ функция $\theta(\cdot)$ задана и удовлетворяет дополнительному условию

$$\theta(t)/t \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{3}$$

Считая функцию $\theta(\cdot)$ и числа δ и α фиксированными, в дальнейшем зависимость от них элементов последовательности (2) будем в записи опускать и вместо $T_k(\delta,\alpha;\theta)$ писать T_k.

Установим нужное в дальнейшем свойство последовательности $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$. При $k \in \mathbb{N}$ обозначим $\Delta_k = T_k - T_{k-1}$ и положим

$$S_k = \begin{cases} \Delta_k + \Delta_{k-2} + \ldots + \Delta_2, & \text{если } k \text{ чётное},\\ \Delta_k + \Delta_{k-2} + \ldots + \Delta_1, & \text{если } k \text{ нечётное}. \end{cases}$$

Докажем, что $S_k > T_k/2$. В самом деле, вследствие определения (2) и монотонного возрастания функции $\theta(\cdot)$ имеем $\Delta_{i+1} = \delta\theta(T_i) > \delta\theta(T_{i-1}) = \Delta_i$ для любого $i \geqslant 2$. Поэтому $S_k > S_{k-1}$ для любого $k \geqslant 3$, а поскольку $S_k + S_{k-1} = T_k$ при всех $k \geqslant 2$, то $S_k > T_k/2$.

2. Построим искомую систему (1) сначала при $n = 2$. Её матрицу коэффициентов зададим равенствами

$$A(t) \equiv \begin{cases} \mathrm{diag}[1,-1] & \text{при } t \in [T_{2k}, T_{2k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}_+,\\ \mathrm{diag}[-1,1] & \text{при } t \in [T_{2k-1}, T_{2k}), \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4}$$

Докажем, что система (1) при $n = 2$ с матрицей коэффициентов (4) является правильной. Поскольку след матрицы (3) тождественно нулевой, то для неё $\mathcal{I}_A = 0$.

Найдём показатели Ляпунова системы (1), (4). Определим функцию $a(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ равенствами

$$a(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [T_{2k}, T_{2k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}_+,\\ -1 & \text{при } t \in [T_{2k-1}, T_{2k}), \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{5}$$

Поскольку система (1), (4) является диагональной, то её показатели Ляпунова совпадают [9, гл. 2, § 4.1] с показателями Ляпунова тех двух её решений, которые в момент $t = 0$ выходят из векторов $(1, 0)^{\mathrm{т}}$ и $(0, 1)^{\mathrm{т}}$, т.е. решений $x_1(t) = (\exp b(t), 0)^{\mathrm{т}}$ и $x_2(t) = (0, \exp\{-b(t)\})^{\mathrm{т}}$, где $b(t) = \int_0^t a(\tau)\, d\tau$. Очевидно, что показатель Ляпунова $\lambda[x_j]$ решения $x_j(\cdot)$, $j = 1, 2$, определяется равенством

$$\lambda[x_j] = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{t} \int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

а так как функция $a(\cdot)$ кусочно-постоянна и $\mathcal{T} = \{T_k : k \in \mathbb{N}\}$ – множество её точек разрыва, то при вычислении верхних пределов (6) достаточно считать [9, гл. 4, § 11.6, упр. 11.6.1], что t в (6) пробегает только множество $\mathcal{T}$, т.е. считать, что в (6) $t = T_k$ и $k \to +\infty$, и тогда вследствие определения (5) функции $a(\cdot)$ получаем

$$\lambda[x_j] = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{T_k} \int\limits_0^{T_k} a(\tau)\, d\tau = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \Delta_i. \tag{7}$$

Из представления (7), поскольку $\Delta_i > \Delta_{i-1}$ при $i \geqslant 3$, следует, что при нечётном k интеграл в (7) отрицателен (не превосходит величины $-T_1$), а при чётном k положителен. Следовательно, $\lambda[x_1] \geqslant 0$ и при вычислении предела в (7) для $j = 1$ можно считать, что k чётное. Заменяя в (7) Δ_i на $T_i - T_{i-1}$ и приводя подобные члены, несложно убедиться, что при чётном k интеграл в (7) равен $T_k - 2S_{k-1} - 2T_1$, а значит, в силу установленного в п. 1 доказательства неравенства $S_{k-1} > T_{k-1}/2$, он не превосходит величины $T_k - T_{k-1} - 2T_1 = \delta\theta(T_{k-1}) - 2T_1$. Поэтому

$$\lambda[x_1] \leqslant \delta \lim_{k\to+\infty} \theta(T_{k-1})/T_k \leqslant \delta \lim_{k\to+\infty} \theta(T_{k-1})/T_{k-1} \overset{(3)}{=} 0.$$

Итак, $\lambda[x_1] = 0$. Точно так же доказывается, что $\lambda[x_2] = 0$.

Следовательно, система (1), (4) имеет нулевые показатели Ляпунова, а так как для неё $\mathcal{I}_A = 0$, то эта система является правильной.

3. Согласно методу поворотов Миллионщикова [7] (см. также [10, § 4.1]), на применении которого мы здесь подробно останавливаться не будем, поскольку оно к настоящему времени является достаточно стандартным и хорошо известным, возмущая систему (1), (4) разве что на единичных отрезках $D_k := [T_k - 1, T_k]$, $k \in \mathbb{N}$, с помощью преобразования $U_k(t)$, $t \in \in D_k$, представляющего собой преобразование поворота на угол $4\exp\{-\theta(T_k)\}(t - T_k + 1)$, мы получаем матрицу $Q(\cdot)$, удовлетворяющую при $t \in \mathbb{R}_+$ неравенству $\|Q(t)\| \leqslant 24\exp\{-\theta(t)\}$, и такое решение $y(\cdot)$ возмущённой системы

$$\dot{y} = (A(t) + Q(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{8}$$

для которого на отрезках $[T_k, T_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$, справедлива оценка

$$\|y(T_{k+1})\| \geqslant \exp\{T_{k+1} - T_k - \theta(T_k)\}\|y(T_k)\|, \quad k \in \mathbb{N},$$

т.е. в силу определения (2) последовательности $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ оценка

$$\|y(T_{k+1})\| \geqslant \exp\{(1 - \delta^{-1})(T_{k+1} - T_k)\}\|y(T_k)\|, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Тогда, последовательно применяя оценки (9), приходим к неравенству

$$\|y(T_{k+1})\| \geqslant \exp\{(1 - \delta^{-1})(T_{k+1} - T_1)\}\|y(T_1)\|.$$

Отсюда для показателя Ляпунова $\lambda[y]$ рассматриваемого решения $y(\cdot)$ системы (8) получаем оценку

$$\lambda[y] \geqslant \varlimsup_{k\to+\infty} T_{k+1}^{-1} \ln \|y(T_{k+1})\| \geqslant 1 - \delta^{-1}.$$

Поэтому, выбирая при задании (2) последовательности $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ число δ большим единицы, будем иметь $\lambda[y] \geqslant 1-\delta^{-1} > 0$.

Двумерная правильная система (1), для которой $\lambda_2(A+Q) > \lambda_2(A)$ при некотором возмущении $Q(\cdot)$, удовлетворяющем при всех $t\in\mathbb{R}_+$ оценке $\|Q(t)\| \leqslant 24\exp\{-\theta(t)\}$, построена. Чтобы построить такую n-мерную систему, достаточно к построенной системе (1), (4) присоединить $n-2$ уравнения $\dot{x}_i = 0$, $i=\overline{3,n}$. Теорема доказана.

В частности, взяв в этой теореме $\theta(t)\equiv\sqrt{t}$, получаем утверждение из примера Р.Э. Винограда [2].

Замечание. Стандартными рассуждениями с использованием теоремы Арцеля–Асколи, применяемыми в методе поворотов В.М. Миллионщикова при оценке младшего показателя Ляпунова [7; 10, § 4.1], аналогично предыдущему получаем, что для системы (1), (4) существует такая матрица-возмущение $Q_0(\cdot)$, удовлетворяющая при всех $t\in\mathbb{R}_+$ оценке $\|Q_0(t)\| \leqslant \mathrm{const}\,\exp\{-\theta(t)\}$, что имеет место неравенство $\lambda_1(A+Q_0) < \lambda_1(A)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Собрание сочинений. В 6-ти т. Т. 2. М.; Л., 1956.
2. *Виноград Р.Э.* Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91. № 5. С. 999–1002.
3. *Виноград Р.Э.* Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17. Вып. 6. С. 645–650.
4. *Миллионщиков В.М.* О неустойчивости характеристических показателей статистически правильных систем // Мат. заметки. 1967. Т. 2. Вып. 3. С. 315–318.
5. *Гробман Д.М.* Характеристические показатели систем, близких к линейным // Мат. сб. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166.
6. *Богданов Ю.С.* Характеристические числа систем линейных дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1957. Т. 41. № 4. С. 481–498.
7. *Миллионщиков В.М.* Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104.
8. *Барабанов Е.А.* Точные границы крайних показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях: дис. … канд. физ.-мат. наук. Минск, 1984.
9. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
10. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006.

Белорусский аграрный технический университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 20.09.2020 г.
После доработки 20.09.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.