ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 583–589

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.2

ФОРМУЛА СЛЕДА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ТОЧКОЙ δ'-ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

© 2021 г. А. Р. Алиев, М. Дж. Манафов

Для оператора Штурма–Лиувилля с точкой δ'-взаимодействия получена формула регуляризованного следа первого порядка. При больших значениях спектрального параметра найдены асимптотические представления для решений уравнения Штурма–Лиувилля с условиями разрыва. Выведена асимптотика собственных значений исследуемого оператора. Показано, что в формуле регуляризованного следа появляется дополнительное слагаемое, учитывающее скачок функции распределения заряда в середине интервала. Отметим, что регуляризованные следы применяются для приближённого вычисления первых собственных значений рассматриваемого оператора. Они полезны и при решении обратных задач спектрального анализа для дифференциальных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064121050010

Посвящается светлой памяти академика
НАН Азербайджана М.Г. Гасымова

1. Введение. Теория регуляризованных следов обыкновенных дифференциальных операторов насчитывает более 65 лет. Впервые формула следа для двух регулярных операторов Штурма–Лиувилля получена И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном [1]. Впоследствии следы были вычислены для различных дифференциальных операторов (см. [2–6]) многими математиками, из которых особо отметим М.Г. Гасымова, в работе [3] которого для сингулярных операторов Штурма–Лиувилля с дискретными спектрами найден аналог формулы следа Гельфанда–Левитана. Весомый вклад в развитие теории регуляризованных следов внесли В.А. Садовничий и его ученики, с их результатами и с текущей ситуацией по данной тематике можно ознакомиться по обстоятельному обзору [7]. Значимый интерес представляют и работы [8, 9], в которых получены формулы следов для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами (типа δ-функции).

В математической физике встречается достаточно много задач, когда коэффициенты дифференциального оператора являются обобщёнными функциями. Например, в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ дифференциальный оператор $P\equiv -d^2/dx^2$ с областью определения

$$D(P)=\{y(x)\in C[0,1]: y'(x_0+0)-y'(x_0-0)=\alpha y(x_0),\quad y(0)=y(1)=0\}$$

описывает стационарные колебания однородной струны, лежащей на упругом основании. В точке x_0 струна связана с пружинкой, жёсткость которой $K(x)$ имеет плотность $K'(x)=\alpha\delta(x-x_0)$. Следует отметить, что в приложениях формулы следов имеют важное значение, например, при приближённом вычислении первых собственных значений соответствующих операторов (см. [2, 7]).

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\quad x\in(0,\pi/2)\bigcup(\pi/2,\pi), \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$U(y):=y'(0)-hy(0)=0,\quad V(y):=y(\pi)=0 \tag{1.2}$$

и в точке $x=\pi/2$ условиями разрыва

$$I(y):=\begin{cases} y'(\pi/2+0)=y'(\pi/2-0)\equiv y'(\pi/2),\\ y(\pi/2+0)-y(\pi/2-0)=\alpha y'(\pi/2),\end{cases} \tag{1.3}$$

где h и $\alpha \neq 0$ – заданные действительные числа, λ – спектральный параметр, $q(x)$ – вещественнозначная функция, причём $q(x) \in W_1^1(0,\pi)$.

Заметим, что уравнение (1.1) с условиями разрыва (1.3) сводится к уравнению

$$-y'' + (\alpha\delta'(x-\pi/2) + q(x))y = \lambda y, \quad x \in (0,\pi), \tag{1.4}$$

где $\delta'(x)$ – производная функции Дирака (см. [10]). Отметим, что различные обратные спектральные задачи для уравнения (1.4) исследованы в работе [11].

В настоящей работе для оператора Штурма–Лиувилля L в пространстве $L_2(0,\pi)$, порождённого дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$, с плотной областью определения

$$D(L) = \left\{ y \in W_2^2((0,\pi/2) \bigcup (\pi/2,\pi)) \bigcap L_2(0,\pi) \;\middle|\; \begin{array}{l} y'(0) - hy(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \\ y'(\pi/2+0) = y'(\pi/2-0) \equiv y'(\pi/2), \\ y(\pi/2+0) - y(\pi/2-0) = \alpha y'(\pi/2) \end{array} \right\}$$

получена формула регуляризованного следа первого порядка.

2. Свойства спектральных характеристик. Пусть $y(x)$ и $z(x)$ – функции, непрерывно дифференцируемые на интервалах $(0,\pi/2)$ и $(\pi/2,\pi)$. Обозначим $\langle y, z\rangle := yz' - y'z$. Если $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют условиям (1.3), т.е. имеют место $I(y)$ и $I(z)$, то, как несложно убедиться,

$$\langle y, z\rangle|_{x=\pi/2+0} = \langle y, z\rangle|_{x=\pi/2-0}, \tag{2.1}$$

другими словами, функция $\langle y, z\rangle$ непрерывна на $(0,\pi)$.

Обозначим через $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$, $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$c(0,\lambda) = \varphi(0,\lambda) = s'(0,\lambda) = 1, \quad c'(0,\lambda) = s(0,\lambda) = \psi(\pi,\lambda) = 0, \quad \varphi'(0,\lambda) = h, \quad \psi'(\pi,\lambda) = 1$$

и условиям разрыва (1.3). Для каждого фиксированного x функции $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$, $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ являются целыми по λ. Очевидно, что

$$U(\varphi) := \varphi'(0,\lambda) - h\varphi(0,\lambda) = 0, \quad V(\psi) := \psi(\pi,\lambda) = 0.$$

Обозначим

$$\Delta(\lambda) := \langle \varphi(x,\lambda), \psi(x,\lambda)\rangle. \tag{2.2}$$

В силу равенства (2.1) и теоремы Остроградского–Лиувилля [12, с. 83] $\Delta(\lambda)$ не зависит от x. Функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией краевой задачи (1.1)–(1.3). Подставляя $x = 0$ и $x = \pi$ в (2.2), получаем

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = U(\psi). \tag{2.3}$$

Очевидно, что функция $\Delta(\lambda)$ является целой и имеет не более чем счётное множество нулей $\{\lambda_n\}$.

Лемма 1. *Собственные значения λ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ действительные. Собственные функции $\varphi(x,\lambda_n)$ и $\psi(x,\lambda_n)$ вещественнозначные. Все нули функции $\Delta(\lambda)$ простые, т.е.*

$$\frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda_n) \neq 0.$$

Мы опускаем доказательство этой леммы, поскольку оно аналогично тем доказательствам, которые приведены в работе [13] для классических операторов Штурма–Лиувилля и в работе [14] для обыкновенных дифференциальных операторов с обобщёнными потенциалами.

Пусть $c_0(x,\lambda)$ и $s_0(x,\lambda)$ – гладкие решения уравнения (1.1) на интервале $(0,\pi)$ при начальных условиях

$$c_0(0,\lambda) = s_0'(0,\lambda) = 1, \quad c_0'(0,\lambda) = s_0(0,\lambda) = 0.$$

Тогда

$$c(x,\lambda)=c_0(x,\lambda),\quad s(x,\lambda)=s_0(x,\lambda),\quad x<\pi/2, \tag{2.4}$$

$$c(x,\lambda)=A_1c_0(x,\lambda)+B_1s_0(x,\lambda),\quad s(x,\lambda)=A_2c_0(x,\lambda)+B_2s_0(x,\lambda),\quad x>\pi/2, \tag{2.5}$$

где

$$A_1=1+\alpha c_0'(\pi/2,\lambda)s_0'(\pi/2,\lambda),\quad B_1=-\alpha[c_0'(\pi/2,\lambda)]^2,$$

$$A_2=\alpha[s_0'(\pi/2,\lambda)]^2,\quad B_2=1-\alpha c_0'(\pi/2,\lambda)s_0'(\pi/2,\lambda). \tag{2.6}$$

Пусть $\lambda=k^2$. Нетрудно убедиться, что функция $c_0(x,\lambda)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$c_0(x,\lambda)=\cos(kx)+\int\limits_0^x\frac{\sin(k(x-t))}{k}q(t)c_0(t,\lambda)\,dt. \tag{2.7}$$

Решая уравнение (2.7) методом последовательных приближений, находим, что

$$c_0(x,\lambda)=\cos(kx)+\frac{\sin(kx)}{2k}\int\limits_0^x q(t)\,dt+\frac{\cos(kx)}{4k^2}\biggl\{q(x)-q(0)-\frac{1}{2}\biggl[\int\limits_0^x q(t)\,dt\biggr]^2\biggr\}+$$

$$+O\biggl(\frac{1}{k^3}\exp(|\mathrm{Im}\,k|x)\biggr), \tag{2.8}$$

$$c_0'(x,\lambda)=-k\sin(kx)+\frac{\cos(kx)}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt+\frac{\sin(kx)}{4k}\biggl\{q(x)+q(0)+\frac{1}{2}\biggl[\int\limits_0^x q(t)\,dt\biggr]^2\biggr\}+$$

$$+O\biggl(\frac{1}{k^3}\exp(|\mathrm{Im}\,k|x)\biggr). \tag{2.9}$$

Аналогично, решая соответствующее уравнение для функции $s_0(x,\lambda)$, будем иметь

$$s_0(x,\lambda)=\frac{\sin(kx)}{k}-\frac{\cos(kx)}{2k^2}\int\limits_0^x q(t)\,dt+\frac{\sin(kx)}{4k^3}\biggl\{q(x)+q(0)-\frac{1}{2}\biggl[\int\limits_0^x q(t)\,dt\biggr]^2\biggr\}+$$

$$+O\biggl(\frac{1}{k^4}\exp(|\mathrm{Im}\,k|x)\biggr), \tag{2.10}$$

$$s_0'(x,\lambda)=\cos(kx)+\frac{\sin(kx)}{2k}\int\limits_0^x q(t)\,dt-\frac{\cos(kx)}{4k^2}\biggl\{q(x)-q(0)+\frac{1}{2}\biggl[\int\limits_0^x q(t)\,dt\biggr]^2\biggr\}+$$

$$+O\biggl(\frac{1}{k^4}\exp(|\mathrm{Im}\,k|x)\biggr). \tag{2.11}$$

В силу равенств (2.6) и соотношений (2.8)–(2.11) получаем:

$$A_1=-\frac{\alpha}{2}k\sin(k\pi)+1+\frac{\alpha}{2}\cos(k\pi)\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt+\frac{\alpha}{4}\frac{\sin(k\pi)}{k}\biggl\{q(\pi/2)+\biggl[\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt\biggr]^2\biggr\}+O(1/k^2),$$

$$B_1=-\frac{\alpha}{2}k^2(1-\cos(k\pi))+\frac{\alpha}{2}k\sin(k\pi)\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt+\frac{\alpha}{4}[q(\pi/2)+q(0)]-$$

$$-\frac{\alpha}{4}\cos(k\pi)\biggl\{q(\pi/2)+q(0)+\biggl[\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt\biggr]^2\biggr\}+O(1/k),$$

$$A_2=\frac{\alpha}{2}(1+\cos(k\pi))+\frac{\alpha}{2}\frac{\sin(k\pi)}{k}\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt+O(1/k^2),$$

$$B_2=\frac{\alpha}{2}k\sin(k\pi)+1-\cos(k\pi)\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt+O(1/k).$$

Принимая во внимание (2.4)–(2.11) и то, что $\varphi(x,\lambda)=c(x,\lambda)+hs(x,\lambda)$, имеем:

$$\varphi(x,\lambda)=\cos(kx)+\biggl(h+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt\biggr)\frac{\sin(kx)}{k}+$$

$$+\biggl\{\frac{1}{4}[q(x)-q(0)]-\frac{h}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt-\frac{1}{8}\biggl[\int\limits_0^x q(t)\,dt\biggr]^2\biggr\}\frac{\cos(kx)}{k^2}+O\biggl(\frac{1}{k^3}\exp(|\mathrm{Im}\,k|x)\biggr),$$

если $x<\pi/2$,

$$\varphi(x,\lambda)=-\frac{\alpha}{2}k[\sin(k(\pi-x))+\sin(kx)]+\frac{\alpha}{2}\biggl[\frac{2}{\alpha}+h+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt\biggr]\cos(kx)+$$

$$+\frac{\alpha}{2}\biggl\{h+\frac{1}{2}\biggl[\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt-\int\limits_{\pi/2}^x q(t)\,dt\biggr]\biggr\}\cos(k(\pi-x))+\frac{\alpha}{2}\biggl\{\frac{2h}{\alpha}+\biggl(\frac{1}{\alpha}+\frac{h}{2}\biggr)\int\limits_0^x q(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{4}\biggl[-q(x)+2q(\pi/2)+q(0)-\frac{1}{2}\biggl[\int\limits_0^x q(t)\,dt\biggr]^2\biggr]\biggr\}\frac{\sin(kx)}{k}+\frac{\alpha}{2}\biggl\{\frac{h}{2}\biggl[\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt-\int\limits_{\pi/2}^x q(t)\,dt\biggr]+$$

$$+\frac{1}{4}\biggl[-q(x)+2q(\pi/2)+q(0)+\frac{1}{2}\biggl[\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt-\int\limits_{\pi/2}^x q(t)\,dt\biggr]^2\biggr]\biggr\}\frac{\sin(k(\pi-x))}{k}+$$

$$+O\biggl(\frac{1}{k^2}\exp(|\mathrm{Im}\,k|x)\biggr),\tag{2.12}$$

если $x>\pi/2$.

Из (2.3) и (2.12) следует, что

$$\Delta(\lambda)=-\frac{\alpha}{2}\biggl(k\sin(k\pi)-\omega_1\cos(k\pi)+\omega_2-\omega_3\frac{\sin(k\pi)}{k}\biggr)+O\biggl(\frac{1}{k^2}\exp(|\mathrm{Im}\,k|\pi)\biggr),\tag{2.13}$$

где

$$\omega_1=\frac{2}{\alpha}+h+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}q(t)\,dt,\quad \omega_2=-h+\frac{1}{2}\biggl[\int\limits_{\pi/2}^{\pi}q(t)\,dt-\int\limits_0^{\pi/2}q(t)\,dt\biggr],$$

$$\omega_3=\frac{2}{\alpha}h+\biggl(\frac{1}{\alpha}+\frac{h}{2}\biggr)\int\limits_0^{\pi}q(t)\,dt+\frac{1}{4}[-q(\pi)+2q(\pi/2)+q(0)]-\frac{1}{8}\biggl[\int\limits_0^{\pi}q(t)\,dt\biggr]^2.\tag{2.14}$$

Используя представление (2.13), общеизвестным методом (см., например, [15, гл. 12]) получаем, что при $n\to\infty$ выполняется соотношение

$$k_n = n + \frac{1}{\pi n}(\omega_1 + (-1)^{n-1}\omega_2) + \frac{\xi_n}{n^2}, \quad \{\xi_n\}\in l_2.$$

Таким образом, доказана

Лемма 2. *Оператор* L *имеет счётное множество собственных значений* λ_n, $n = 1, 2, \ldots$ *Для них при* $n\to\infty$ *имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$\lambda_n = n^2 + \frac{2}{\pi}(\omega_1 + (-1)^{n-1}\omega_2) + \frac{\sigma_n}{n}, \quad \{\sigma_n\}\in l_2. \tag{2.15}$$

3. Формула регуляризованного следа. В дальнейшем под *регуляризованным следом первого порядка* для краевой задачи (1.1)–(1.3), а следовательно, и для задачи (1.4), (1.2), будем понимать сумму ряда

$$S_\lambda := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n - n^2 - \frac{2}{\pi}(\omega_1 + (-1)^{n-1}\omega_2)\right). \tag{3.1}$$

Асимптотика (2.15) показывает, что ряд S_λ сходится.

Цель данной работы заключается в нахождении суммы ряда (3.1).

Теорема. *Пусть* $q(x)\in W_1^1(0,\pi)$. *Тогда ряд (3.1) сходится, а его сумма равна*

$$S_\lambda = \omega_3 - \frac{2\omega_1}{\pi} - \frac{\omega_1^2}{2},$$

где ω_1 *и* ω_3 *определены равенствами (2.14).*

Доказательство. Поскольку $\Delta(\lambda)$ является целой функцией порядка $1/2$, то из теоремы Адамара [16, раздел 4.2] в силу соотношения (2.13) вытекает представление

$$\Delta(\lambda) = A\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \tag{3.2}$$

где A – некоторая постоянная, которая будет определена ниже.

Пусть $\lambda = -\mu^2$. Сумму S_λ ряда (3.1) вычислим, сравнив асимптотические выражения из формул (2.13) и (3.2) при $\mu\to\infty$. Вследствие представления (3.2) имеем

$$\Delta(-\mu^2) = \frac{(\lambda_1+\mu^2)\operatorname{sh}(\mu\pi)}{\mu\pi}C\Phi(\mu), \tag{3.3}$$

где

$$C = \frac{A}{\lambda_1}\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}, \quad \Phi(\mu) = \prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{n^2-\lambda_n}{\mu^2+n^2}\right).$$

Исследуем асимптотическое поведение функции $\Phi(\mu)$ при больших положительных μ. Для этого нам понадобятся следующие формулы (см. [17]):

$$\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|n^2-\lambda_n|^j}{(\mu^2+n^2)^j} = O(1/\mu^3), \tag{3.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2+n^2} = \frac{\pi\coth(\pi\mu)}{2\mu} - \frac{1}{2\mu^2} = \frac{\pi}{2\mu} - \frac{1}{2\mu^2} + O(\exp(-2\pi\mu)), \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{\mu^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n-n^2-2\frac{\omega_1+(-1)^{n-1}\omega_2}{\pi}\right)\frac{n^2}{\mu^2+n^2}\leqslant\frac{1}{\mu^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2+n^2}\right)^{1/2}=O(1/\mu^3) \quad (3.6)$$

при условии $\sup\limits_n|\lambda_n-n^2-2(\omega_1+(-1)^{n-1}\omega_2)/\pi|n^2<\infty$. Вследствие формул (3.4)–(3.6) имеем

$$\ln\Phi(\mu)=\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{n^2-\lambda_n}{\mu^2+n^2}\right)=-\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{n^2-\lambda_n}{\mu^2+n^2}\right)^j=\frac{2(\omega_1+\omega_2)}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2+(2m+1)^2}+$$

$$+\frac{2(\omega_1-\omega_2)}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2+(2m)^2}+\frac{1}{\mu^2}\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda_n-n^2-2(\omega_1+(-1)^{n-1}\omega_2)/\pi)-$$

$$-\frac{1}{\mu^2}\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda_n-n^2-2(\omega_1+(-1)^{n-1}\omega_2)/\pi)\frac{n^2}{\mu^2+n^2}-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-\lambda_n}{\mu^2+n^2}\right)^j=$$

$$=\frac{\omega_1}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}\left(S_\lambda+\frac{2\omega_1}{\pi}\right)+O(1/\mu^3).$$

Отсюда получаем, что

$$\Phi(\mu)=1+\frac{\omega_1}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}\left(S_\lambda+\frac{2\omega_1}{\pi}+\frac{\omega_1^2}{2}\right)+O(1/\mu^3),$$

и тогда в силу тождества (3.3) будем иметь

$$\Delta(-\mu^2)=\frac{1}{2}Ce^{\mu\pi}\left\{\mu+\omega_1+\frac{1}{\mu}\left(S_\lambda+\frac{2\omega_1}{\pi}+\frac{\omega_1^2}{2}\right)\right\}+O(1/\mu^2). \quad (3.7)$$

Теперь же изучим асимптотическое поведение функции $\Delta(-\mu^2)=\varphi(\pi,-\mu^2)$ при больших отрицательных $\lambda=-\mu^2$. Тогда, согласно формуле (2.12), справедливо представление

$$\Delta(-\mu^2)=\frac{\alpha e^{\mu\pi}}{4}\left\{\mu+\omega_1+\frac{1}{\mu}\omega_3\right\}+O(1/\mu^2). \quad (3.8)$$

Из соотношений (3.3), (3.7), (3.8), сравнивая коэффициенты, находим, что

$$C=\frac{\alpha}{2},\quad S_\lambda=\omega_3-\frac{2\omega_1}{\pi}-\frac{\omega_1^2}{2}.$$

Теорема доказана.

4. Пример. Краевая задача

$$-y''=\lambda y,\quad x\in(0,\pi/2)\bigcup(\pi/2,\pi), \quad (4.1)$$

с граничными условиями

$$y'(0)=y(\pi)=0 \quad (4.2)$$

и в точке $x=\pi/2$ условиями разрыва

$$y'(\pi/2+0)=y'(\pi/2-0)\equiv y'(\pi/2),\quad y(\pi/2+0)-y(\pi/2-0)=\alpha y'(\pi/2) \quad (4.3)$$

является частным случаем краевой задачи (1.1)–(1.3), когда $q(x)=0$, $h=0$, где $\alpha\neq0$ – действительное число. Отметим, что уравнение (4.1) с условиями разрыва (4.3) сводится также к уравнению

$$-y''+\alpha\delta'(x-\pi/2)y=\lambda y,\quad x\in(0,\pi). \quad (4.4)$$

Для этого случая формула (2.15) примет вид

$$\lambda_n = n^2 + \frac{4}{\pi\alpha} + \frac{\sigma_n}{n}, \quad \{\sigma_n\} \in l_2.$$

Согласно теореме формула регуляризованного следа первого порядка для краевой задачи (4.1)–(4.3), а следовательно, и для задачи (4.4), (4.2) запишется в виде

$$S_\lambda := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n - n^2 - \frac{4}{\pi\alpha}\right) = -\frac{4}{\pi\alpha} - \frac{2}{\alpha^2}.$$

Отметим, что регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом вычислен в работе [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 593–596.
2. *Дикий Л.А.* Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. № 3 (81). С. 111–143.
3. *Гасымов М.Г.* О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. № 6. С. 1202–1205.
4. *Gesztesy F., Holden H., Simon B., Zhao Z.* A trace formula for multidimensional Schrödinger operators // J. Funct. Anal. 1996. V. 141. № 2. P. 449–465.
5. *Гусейнов Г.Ш., Левитан Б.М.* О формулах следов для операторов Штурма–Лиувилля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1978. № 1. С. 40–49.
6. *Lax P.D.* Trace formulas for the Schroedinger operator // Commun. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. P. 503–512.
7. *Садовничий В.А., Подольский В.Е.* Следы операторов // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. № 5 (371). С. 89–156.
8. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 2001. Т. 69. № 3. С. 427–442.
9. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С. 735–751.
10. *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.* Solvable Models in Quantum Mechanics. Providence, 2005.
11. *Manafov M.Dzh.* Inverse spectral and inverse nodal problems for Sturm–Liouville equations with point δ'-interaction // Trans. Nat. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics. 2017. V. 37. № 4. P. 111–119.
12. *Coddington E.A., Levinson N.* Theory of Ordinary Differential Equations. New York, 1955.
13. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. М., 1970.
14. *Манафов М.Дж.* Описание области определения обыкновенного дифференциального оператора с обобщенными потенциалами // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 5. С. 706–707.
15. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
16. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956.
17. *Левитан Б.М.* Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма–Лиувилля // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19. № 1 (115). С. 161–165.
18. *Савчук А.М.* Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55. № 6 (336). С. 155–156.

Азербайджанский государственный университет
нефти и промышленности, г. Баку,
Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку,
Университет Адыямана,
г. Адыяман, Турция

Поступила в редакцию 20.08.2019 г.
После доработки 05.02.2021 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.