ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 590–606

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+519.216.73

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

© 2021 г. И. В. Качан

Для линейных одномерных однородных стохастических дифференциальных уравнений с независимыми стандартным и дробным броуновскими движениями получены как достаточные, так и необходимые и достаточные условия наличия у них некоторых типов устойчивости.

DOI: 10.31857/S0374064121050022

Введение. В дальнейшем считаем, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ заданы стандартное броуновское движение $W(t)$ и дробное броуновское движение $B^H(t)$ с показателем Хёрста $H \in (1/2, 1)$, определённые при $t \geqslant 0$ и являющиеся независимыми.

Под *одномерным стохастическим дифференциальным уравнением смешанного типа* понимается следующее уравнение:

$$dx(t) = f(t, x(t))\, dt + g(t, x(t))\, dW(t) + \sigma(t, x(t))\, dB^H(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $f\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – детерминированные функции. Далее будем предполагать, что $f(t, 0) = 0$, $g(t, 0) = 0$, $\sigma(t, 0) = 0$ для всех $t \geqslant 0$.

Для того чтобы определить решение уравнения (1), это уравнение рассматривают как интегральное. При этом существует несколько способов определения интегралов по dW и по dB^H [1, гл. 2–5; 2, гл. 1, 2]. В настоящей работе интеграл по dW – стохастический интеграл Ито, а интеграл по dB^H – потраекторный интеграл Римана–Стилтьеса, введённый в работе [3] и часто называемый потраекторным интегралом Янга. Различная природа этих интегралов обуславливает определённые сложности в исследовании уравнений (1): к примеру, потраекторный интеграл Янга, вообще говоря, не обладает нулевым средним и не является семимартингалом. Теоремы, дающие достаточные условия существования и единственности решений уравнений (1), впервые получены в работе [4] для уравнений без сноса и в работе [5] для уравнений (1) общего вида. В дальнейшем условия существования решений уравнений (1) были значительно ослаблены, и была доказана непрерывная зависимость решений от начальных данных при тех же условиях, которые обеспечивают существование решений [6–11]. Более того, как показывают работы [12–15], привлечение теории грубых траекторий и теории интегрирования Губинелли позволяет исследовать свойства решений уравнений (1) из более широкого класса, чем указано выше, а именно, уравнений, содержащих дробные броуновские движения с показателями Хёрста $H \in (1/3, 1)$.

Устойчивость уравнений Ито (1) и систем таких уравнений (т.е. уравнений, не содержащих дробное броуновское движение, $\sigma \equiv 0$) достаточно хорошо изучена – ей посвящена обширная литература (см., например, [16–18]). В частности, в монографии [17] описан метод исследования устойчивости с помощью функций Ляпунова, опирающийся на свойство марковости решений $x(t)$ уравнений Ито. В свою очередь, для линейных уравнений Ито (1) и систем таких уравнений в монографии [17] получены достаточные условия устойчивости их нулевых решений.

Исследование устойчивости уравнений (1) общего вида представляется крайне сложной задачей. При попытке расширения области применимости метода функций Ляпунова на класс уравнений (1) с коэффициентом $\sigma \not\equiv 0$ возникают существенные трудности: интеграл Янга не обладает нулевым средним и для него не существует оценок, аналогичных оценкам для стохастического интеграла Ито. Кроме того, процесс $B^H(t)$ обладает высокой дисперсией, равной t^{2H}, $2H > 1$, что влечёт за собой определённые ограничения на коэффициент σ и усложняет исследование свойств устойчивости. Вопросам устойчивости достаточно общего класса уравнений (1) посвящены работы [19, 20]. В работе [19] получены условия, обеспечивающие локальную (т.е. на конечном отрезке $[0,T]$) почти наверное экспоненциальную устойчивость нулевого решения автономного уравнения (1), не содержащего $W(t)$ $(g \equiv 0)$, а также глобальную почти наверное экспоненциальную устойчивость в случае, когда коэффициент при dB^H линеен: $\sigma(x) = \gamma x$, $\gamma \in \mathbb{R}$. В работе [20] найдены условия, гарантирующие (α, p)-асимптотическую устойчивость по вероятности и (α, p)-притяжение решений уравнений (1) с выделенной линейной частью: $f(t,x) = A(t)x + F(t,x)$.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением *линейных однородных* уравнений смешанного типа

$$dx(t) = a(t)x(t)\,dt + b(t)x(t)\,dW(t) + c(t)x(t)\,dB^H(t), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $a\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $b\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $c\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ – детерминированные функции. Отдельное внимание будет уделено уравнениям (2), являющимся *стационарными*:

$$dx(t) = ax(t)\,dt + bx(t)\,dW(t) + cx(t)\,dB^H(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе установлены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности, p-устойчивости и экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения (2), обобщающие результаты для соответствующих уравнений Ито [17, гл. 6]. Кроме того, получена явная формула, выражающая момент порядка $p > 0$ решения уравнения (2). Результаты данной статьи могут быть использованы в дальнейшем, к примеру, при исследовании устойчивости уравнений, сводящихся к линейным (например, уравнений бернуллиевского типа [21]), а также при исследовании устойчивости нулевого решения уравнения (1) по линейному приближению.

1. Предварительные сведения и обозначения. Символом $\mathbb{E}$ будем обозначать математическое ожидание случайных величин, определённых на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Сокращение "п.н." будем использовать для словосочетания "почти наверное", означающего, что то или иное утверждение справедливо на множестве $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ вероятностной меры 1, т.е. $\mathsf{P}\{\tilde{\Omega}\} = 1$.

Дробным броуновским движением с показателем Хёрста $H \in (0,1)$ называют центрированный непрерывный гауссовский процесс $B^H(t)$, $t \geqslant 0$, с ковариационной функцией

$$R_H(t,s) := \mathbb{E}B^H(t)B^H(s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad s, t \geqslant 0.$$

При $H = 1/2$ дробное броуновское движение $B^{1/2}(t)$ является винеровским процессом. Другими словами, процесс $W(t)$ является частным процессом из семейства $B^H(t)$ при $H = 1/2$.

Введём в рассмотрение функцию

$$\phi(t,s) := H(2H-1)|t-s|^{2H-2}, \quad t, s \geqslant 0.$$

Нетрудно видеть, что справедливо следующее представление [1, с. 24]:

$$R_H(t,s) = \int\limits_0^t \int\limits_0^s \phi(u,v)\,dv\,du. \tag{4}$$

Через $L^2_\phi[0,T]$ будем обозначать линейное пространство измеримых функций $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ таких, что конечен интеграл Лебега $\int_0^T \int_0^T f(s)f(u)\phi(s,u)\,ds\,du$. В работе [22] доказано, что на линейном пространстве классов эквивалентности функций из $L^2_\phi[0,T]$ можно определить скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle_{L^2_\phi;T} := \int\limits_0^T\int\limits_0^T f(s)g(u)\phi(s,u)\,ds\,du, \quad f,g\in L^2_\phi[0,T],$$

и, соответственно, норму

$$\|f\|_{L^2_\phi;T} := \sqrt{\langle f,f\rangle_{L^2_\phi;T}} = \biggl(\int\limits_0^T\int\limits_0^T f(s)f(u)\phi(s,u)\,ds\,du\biggr)^{1/2}, \quad f\in L^2_\phi[0,T];$$

это линейное пространство с заданным скалярным произведением $\langle\,,\,\rangle_{L^2_\phi;T}$ является предгильбертовым (не обладает свойством полноты).

Через $C^\lambda(0,T)$ обозначим линейное нормированное пространство функций $f\colon[0,T]\to\mathbb{R}$, непрерывных по Гёльдеру с показателем $\lambda\in(0,1]$, норма в котором задаётся равенством

$$\|f\|_{C^\lambda;T} := \sup_{t\in[0,T]}|f(t)| + \sup_{0\leqslant s<t\leqslant T}\frac{|f(t)-f(s)|}{(t-s)^\lambda}.$$

Пространство $C^\lambda(0,T)$ является банаховым.

Важнейшим свойством дробного броуновского движения $B^H(t)$, используемым при построении потраекторных интегралов, является свойство гёльдеровости его траекторий: для любого $\varepsilon\in(0,H)$ траектории процесса $B^H(t)$, $t\in[0,T]$, п.н. принадлежат классу $C^{H-\varepsilon}(0,T)$.

Пусть $\alpha\in(0,1/2)$. Через $W_0^{\alpha,1}(0,T)$ будем обозначать пространство измеримых функций $f\colon[0,T]\to\mathbb{R}$ таких, что

$$\|f\|_{\alpha,1;T} := \int\limits_0^T\frac{|f(s)|}{s^\alpha}\,ds + \int\limits_0^T\int\limits_0^s\frac{|f(s)-f(u)|}{(s-u)^{\alpha+1}}\,du\,ds<\infty.$$

В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение $\|f\|_{\alpha,T} := \|f\|_{\alpha,1;T}$.

Через $f|_Y$ обозначаем сужение функции $f\colon X\to\mathbb{R}$ на множество Y, $Y\subset X\subset\mathbb{R}$.

Определение 1. *Решением* уравнения (1) (*в сильном смысле*) будем называть процесс $x(t)$, $t\geqslant 0$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, согласованный с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, порождённым процессами $W(t)$ и $B^H(t)$, и обладающий свойствами:

1) существует $\alpha>1-H$ такое, что процесс $x(t)$ имеет п.н. непрерывные по Гёльдеру с показателем α траектории;

2) для любого $t\geqslant 0$ п.н. выполняется равенство

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t f(s,x(s))\,ds + \int\limits_0^t g(s,x(s))\,dW(s) + \int\limits_0^t \sigma(s,x(s))\,dB^H(s),$$

где интеграл по процессу $W(t)$ – стохастический интеграл Ито, а интеграл по процессу $B^H(t)$ – потраекторный интеграл Янга [5].

Замечание 1. Зачастую интеграл по процессу $B^H(t)$ определяется как обобщённый интеграл Стилтьеса с использованием дробных производных подынтегральных процессов [23]. Однако, согласно замечанию 4.1 из [23], обобщённый интеграл Стилтьеса $\int_0^T f(t)\,dg(t)$ совпадает с обычным интегралом Римана–Стилтьеса (интегралом Янга) в случае, если $f\in C^\lambda(0,T)$, $g\in C^\mu(0,T)$ и $\lambda+\mu>1$.

Далее введём определения устойчивости, используемые в работе.

Определение 2. Нулевое решение уравнения (1) называется *устойчивым по вероятности,* если для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ такое, что для любого $t > 0$ и любого решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $|x(0)| < \delta$ п.н., справедливо неравенство

$$\mathsf{P}\{|x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2.$$

Определение 3. Нулевое решение уравнения (1) называют *асимптотически устойчивым по вероятности,* если оно устойчиво по вероятности и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $|x(0)| < \delta$ п.н., справедливо соотношение

$$\mathsf{P}\{|x(t)| > \varepsilon\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Определение 4. Нулевое решение уравнения (1) называется *p-устойчивым* $(p > 0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $t > 0$ и любого решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $|x(0)| < \delta$ п.н., справедливо неравенство

$$\mathbb{E}|x(t)|^p < \varepsilon.$$

Определение 5. Нулевое решение уравнения (1) называют *асимптотически p-устойчивым* $(p > 0)$, если оно p-устойчиво и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $|x(0)| < \delta$ п.н., справедливо соотношение

$$\mathbb{E}|x(t)|^p \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Определение 6. Нулевое решение уравнения (1) называют *экспоненциально p-устойчивым* $(p > 0)$, если существуют постоянные $A = A(p) > 0$ и $\alpha = \alpha(p) > 0$ такие, что для всех $t > 0$

$$\mathbb{E}|x(t)|^p \leqslant A\mathbb{E}|x(0)|e^{-\alpha t}.$$

Как показано в работе [21], решение линейного уравнения (2) выражается формулой

$$x(t) = x(0)\exp\biggl(\int\limits_0^t \Bigl(a(s) - \frac{1}{2}b^2(s)\Bigr)\,ds + \int\limits_0^t b(s)\,dW(s) + \int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s)\biggr), \quad t \geqslant 0, \tag{5}$$

которая, впрочем, может быть получена применением формулы Ито для процессов со стандартным и дробным броуновским движением [2, с. 184] к процессу

$$y(t) = y(0) + \int\limits_0^t b(s)\,dW(s) + \int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s)$$

и функции

$$F(t, y) = \exp\biggl(\int\limits_0^t \Bigl(a(s) - \frac{1}{2}b^2(s)\Bigr)\,ds + y\biggr).$$

Для удобства введём отдельное обозначение для процесса, стоящего в показателе экспоненты в формуле (5):

$$\nu(t) := \int\limits_0^t \Bigl(a(s) - \frac{1}{2}b^2(s)\Bigr)\,ds + \int\limits_0^t b(s)\,dW(s) + \int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s), \quad t \geqslant 0.$$

Тогда формула решения (5) примет вид $x(t) = x(0)e^{\nu(t)}$.

2. Предположения. Далее всюду будем предполагать выполнение следующих условий.

П1. Процессы $W(t)$ и $B^{(H)}(t)$, $t \geqslant 0$, независимы.

П2. Случайная величина $x(0)$ $\mathcal{F}_0$-измерима и не зависит от $W(t)$ и $B^{(H)}(t)$.

П3. Функции $a(t)$, $b(t)$ непрерывны при $t \geqslant 0$.

П4. Существует $\lambda > 1 - H$ такое, что функция $c(t)|_{[0,T]}$ принадлежит классу $C^\lambda(0,T)$ для любого $T > 0$.

Отметим, что условия П2–П4 гарантируют существование решения уравнения (5) и его представление в виде (5).

3. Вспомогательные утверждения. В дальнейшем будут полезны несколько вспомогательных утверждений.

В следующих двух леммах нам потребуется рассматривать произвольную последовательность
$$\mathcal{P}_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{N_n} \in [0,t] : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N_n} = t\} \tag{6}$$
разбиений отрезка $[0,t]$ с диаметрами
$$|\mathcal{P}_n| = \max\{t_{i+1} - t_i : i = \overline{0, N_n - 1}\},$$
стремящимися к нулю при $n \to \infty$.

Лемма 1. *Если процессы $W(t)$ и $B^H(t)$ независимы, то стохастический интеграл Ито $\int_0^t b(s)\,dW(s)$ и потраекторный интеграл Янга $\int_0^t c(s)\,dB^H(s)$ также независимы.*

Доказательство. Рассмотрим интегральные суммы
$$I_n^{(W)} = \sum_{i=0}^{N_n-1} b(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \quad \text{и} \quad I_n^{(B)} = \sum_{i=0}^{N_n-1} c(t_i)(B^H(t_{i+1}) - B^H(t_i))$$
для интегралов Ито $I^{(W)} = \int_0^t b(s)\,dW(s)$ и Янга $I^{(B)} = \int_0^t c(s)\,dB^H(s)$ соответственно вдоль разбиений (6). Как известно, $I_n^{(W)}$ стремится к $I^{(W)}$ по вероятности, а $I_n^{(B)}$ стремится к $I^{(B)}$ п.н. при $n \to \infty$.

Очевидно, что суммы $I_n^{(W)}$ и $I_n^{(B)}$ являются линейными комбинациями компонент векторов $W_{\mathcal{P}_n} = (W(t_0), \ldots, W(t_{N_n}))$ и $B_{\mathcal{P}_n} = (B^H(t_0), \ldots, B^H(t_{N_n}))$. Из независимости процессов $W(t)$ и $B^H(t)$ следует независимость векторов $W_{\mathcal{P}_n}$ и $B_{\mathcal{P}_n}$, откуда следует независимость интегральных сумм $I_n^{(W)}$ и $I_n^{(B)}$. Значит, при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство
$$F_{(I_n^{(W)}, I_n^{(B)})}(x_1, x_2) = F_{I_n^{(W)}}(x_1) F_{I_n^{(B)}}(x_2),$$
в котором $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ. Так как вектор $(I_n^{(W)}, I_n^{(B)})$ стремится к вектору $(I^{(W)}, I^{(B)})$ по вероятности при $n \to \infty$ и сходимость по вероятности влечёт за собой сходимость по распределению, то, переходя к пределу в последнем равенстве, будем иметь
$$F_{(I^{(W)}, I^{(B)})}(x_1, x_2) = F_{I^{(W)}}(x_1) F_{I^{(B)}}(x_2),$$
откуда следует независимость интегралов $I^{(W)}$ и $I^{(B)}$. Лемма доказана.

Предложение 1. *Пусть $c(s) \not\equiv 0$ – непрерывная при $s \geqslant 0$ функция и $c|_{[0,t]} \in L^2_\phi[0,t]$ для некоторого фиксированного $t > 0$. Тогда интеграл Янга $\int_0^t c(s)\,dB^H(s)$ – нормально распределённая случайная величина с нулевым средним $\mu(t) = 0$ и дисперсией*
$$\sigma^2(t) = \|c\|^2_{L^2_\phi;t} = \int_0^t \int_0^t c(s)c(u)\phi(s,u)\,ds\,du.$$

Доказательство. Обозначим $S := \|c\|^2_{L^2_\phi;t} > 0$. Рассмотрим интегральные суммы вдоль разбиений (6) с промежуточными точками $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, N_n - 1}$, возникающими при применении к интегралам

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \phi(u,v)\,du\,dv = \phi(\tau_i,\tau_j)(t_{i+1}-t_i)(t_{j+1}-t_j)$$

теоремы о среднем:

$$I_n := \sum_{i=0}^{N_n-1} c(\tau_i)(B^H(t_{i+1}) - B^H(t_i)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s) \quad (\text{п.н.}).$$

Так как I_n есть линейная комбинация значений $B^H(t)$, $B^H(\tau_i)$, $i = \overline{0, N_n - 1}$, гауссовского процесса $B^H(t)$, то $I_n = I_n(\omega)$ – нормально распределённая случайная величина для любого n. Её среднее равно нулю:

$$\mu_n = \mathbb{E}I_n(t) = \sum_{i=0}^{N_n-1} c(\tau_i)(\mathbb{E}B^H(t_{i+1}) - \mathbb{E}B^H(t_i)) = 0,$$

а дисперсия вычисляется по следующей формуле:

$$\sigma_n^2 = \mathbb{E}I_n^2(t) = \sum_{i,j=0}^{N_n-1} c(\tau_i)c(\tau_j)\mathbb{E}(B^H(t_{i+1}) - B^H(t_i))(B^H(t_{j+1}) - B^H(t_j)) =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{N_n-1} c(\tau_i)c(\tau_j)\big(R_H(t_{i+1},t_{j+1}) - R_H(t_{i+1},t_j) - R_H(t_i,t_{j+1}) + R_H(t_i,t_j)\big),$$

где $R_H(u,v)$ – ковариационная функция дробного броуновского движения $B^H(t)$. Применяя представление (4) и теорему о среднем, получаем

$$\sigma_n^2 = \sum_{i,j=0}^{N_n-1} c(\tau_i)c(\tau_j) \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \phi(u,v)\,dv\,du = \sum_{i,j=0}^{N_n-1} c(\tau_i)c(\tau_j)\phi(\tau_i,\tau_j)(t_{i+1}-t_i)(t_{j+1}-t_j).$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^2 = S$.

Осталось доказать, что предел п.н. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$ – нормально распределённая случайная величина. Сходимость п. н. влечёт за собой сходимость по распределению, поэтому для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$F_I(x) = \lim_{n\to\infty} F_{I_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/(2\sigma_n^2)}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/(2\sigma_n^2)}\,dy,$$

где $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ. Рассмотрим функцию $f(y,\tau) = e^{-y^2/(2\tau)}$, $y \in (-\infty, x)$, $\tau \in [S/2, 3S/2]$. Очевидно, $f(y,\tau) \leqslant f(y, 3S/2)$ для любого y и

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f(y, 3S/2)\,dy \leqslant \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{3S}{2}},$$

поэтому интеграл $\int_{-\infty}^{x} f(y,\tau)\,dy$ сходится равномерно по $\tau \in [S/2, 3S/2]$ при любом фиксированном x. С другой стороны, для любого y выполняется неравенство

$$f'_\tau(y,\tau) = \frac{y^2}{2\tau^2} e^{-y^2/(2\tau)} \leqslant \frac{2}{Se},$$

поскольку $\max\limits_{z\in\mathbb{R}} z^2 e^{-z^2} = 1/e$. Значит, из формулы конечных приращений следует неравенство

$$|f(y,\tau) - f(y,S)| \leqslant 2|\tau - S|/(Se)$$

для любого y и $\tau \in [S/2, 3S/2]$, откуда вытекает, что $f(y,\sigma_n^2) \to f(y,S)$ равномерно относительно y при $n \to \infty$. Таким образом, переходя к пределу под знаком интеграла, получаем

$$F_I(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/(2S)}\,dy,$$

т.е. случайная величина I подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $(\mu,\sigma^2) = (0,S)$, что и требовалось доказать.

Следующая лемма доказана в монографии [17, лемма 6.1].

Лемма 2. *Стохастический интеграл Ито* $\int_0^t b(s)\,dW(s)$ *п.н. представим в виде*

$$\int\limits_0^t b(s)\,dW(s) = \widetilde{W}(\tau(t))$$

для всех $t \geqslant 0$, *где* $\widetilde{W}(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, *– некоторое другое стандартное броуновское движение (винеровский процесс), а* $\tau(t) = \int_0^t b^2(s)\,ds$.

Лемма 3. *Пусть для некоторых* $t > 0$ *и* $\alpha \in (1-H, 1/2)$ *имеет место включение* $c|_{[0,t]} \in \in W_0^{\alpha,1}(0,t)$. *Тогда при любом* $\varepsilon \in \big(0, \alpha - (1-H)\big)$ *справедливы следующие утверждения.*

1) Существует константа $K = K_{H,\varepsilon,\alpha}$, *зависящая лишь от* ε, α *и* H, *такая, что п.н. выполняется оценка*

$$\bigg|\int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s)\bigg| \leqslant K\eta_{H,\varepsilon,t}(\omega)\|c\|_{\alpha,t} t^{H-\varepsilon+\alpha-1} =: C^H_{\varepsilon,\alpha}(t,\omega), \tag{7}$$

где $\eta_{H,\varepsilon,t}(\omega)$ *при фиксированном* t *– случайная величина, для которой п.н. имеет место неравенство* $|B^H(s) - B^H(u)| \leqslant \eta_{H,\varepsilon,t}|s-u|^{H-\varepsilon}$ *для всех* $s,u \in [0,t]$ *и которая задаётся равенством*

$$\eta_{H,\varepsilon,t} := \gamma_{H,\varepsilon}\bigg(\int\limits_0^t\int\limits_0^t \frac{|B^H(s) - B^H(u)|^{2\varepsilon}}{|s-u|^{2H/\varepsilon}}\,ds\,du\bigg)^{2/\varepsilon}$$

с некоторой константой $\gamma_{H,\varepsilon}$, *зависящей лишь от* H *и* ε.

2) Для случайного процесса $C^H_{\varepsilon,\alpha}(t,\omega)$, *определённого правой частью неравенства (7), существует константа* $L = L_{H,\varepsilon,\alpha}$, *зависящая лишь от* ε, α *и* H, *такая, что для любого числа* $M > 0$ *справедлива оценка*

$$\mathsf{P}\{C^H_{\varepsilon,\alpha}(t) \leqslant M\} \geqslant 1 - L\bigg(\frac{\|c\|_{\alpha,t} t^{H+\alpha-1}}{M}\bigg)^{2/\varepsilon}. \tag{8}$$

Доказательство. Оценка (7) непосредственно следует из результатов работы [23]. В самом деле, во-первых, согласно [23, с. 74] п.н. справедливо неравенство

$$\left|\int_0^t c(s)\,dB^H(s)\right| \leqslant G_{\alpha,t}(\omega)\|c\|_{\alpha,t},$$

в котором

$$G_{\alpha,t} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sup_{0<s<u<t}|D_{u^-}^{1-\alpha}B_{u^-}^H(s)|,$$

здесь Γ – гамма-функция, $D_{u^-}^{1-\alpha}$ – оператор левосторонней дробной производной Вейля порядка $1-\alpha$ [23, с. 59–60], а $B_{u^-}^H(s) = (B^H(s) - B^H(u-))1_{(0,u)}(s)$, где $1_{(0,u)}(s)$ – индикаторная функция интервала $(0,u)$. Во-вторых, из оценки, полученной в [23, лемма 7.5], следует неравенство

$$G_{\alpha,t} \leqslant \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(1 + \frac{1}{H-\varepsilon+\alpha-1}\right)\eta_{H,\varepsilon,t}t^{H-\varepsilon+\alpha-1},$$

из которого вытекает оценка (7).

Оценка (8) получается применением оценки из [23, лемма 7.4] и неравенства Маркова. Из доказательства леммы 7.4 в [23, с. 77] следует справедливость неравенства $\mathbb{E}(\eta_{H,\varepsilon,t})^q \leqslant \gamma_{H,\varepsilon}^q\tilde{c}_{\varepsilon,q}t^{q\varepsilon}$ для любого $q \geqslant 2/\varepsilon$ и некоторой константы $\tilde{c}_{\varepsilon,q}$, зависящей от ε и q. Полагая $q = 2/\varepsilon$, получаем оценку $\mathbb{E}(\eta_{H,\varepsilon,t})^{2/\varepsilon} \leqslant L_{H,\varepsilon}t^2$ для некоторой константы $L_{H,\varepsilon}$, зависящей от ε и H. Применяя неравенство Маркова, для любого $M > 0$ приходим к неравенству

$$\mathsf{P}\{(\eta_{H,\varepsilon,t})^{2/\varepsilon} > M\} \leqslant \frac{L_{H,\varepsilon}t^2}{M},$$

равносильному неравенству $\mathsf{P}\{\eta_{H,\varepsilon,t} > M\} \leqslant L_{H,\varepsilon}t^2/M^{2/\varepsilon}$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству

$$\mathsf{P}\{C_{\varepsilon,\alpha}^H(t) > M\} \leqslant L_{H,\varepsilon}t^2\left(\frac{K\|c\|_{\alpha,t}t^{H-\varepsilon+\alpha-1}}{M}\right)^{2/\varepsilon} = L\left(\frac{\|c\|_{\alpha,t}t^{H+\alpha-1}}{M}\right)^{2/\varepsilon},$$

где $L = L_{H,\varepsilon}K^{2/\varepsilon}$ – константа, зависящая от ε, α и H. Лемма доказана.

4. Устойчивость линейных уравнений. Обозначим

$$A(t) := \int_0^t a(s)\,ds, \quad \tau(t) := \int_0^t b^2(s)\,ds, \quad A_\tau(t) := A(t) - \frac{1}{2}\tau(t), \quad \varkappa(t) := \sqrt{2\tau(t)\ln\ln\tau(t)}. \tag{9}$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности нулевого решения уравнения (2) даёт

Теорема 1. *Пусть существует $\alpha \in (1-H, 1/2)$ такое, что $c|_{[0,T]} \in W_0^{\alpha,1}(0,T)$ для любого $T > 0$, и $A(t)$, $\tau(t)$, $A_\tau(t)$ и $\varkappa(t)$ – функции, определённые равенствами (9). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $\tau(\infty) < \infty$ и выполнены условия

$$A(\infty) = -\infty, \quad \lim_{t\to\infty} t^{H+\alpha-1}\|c\|_{\alpha,t}/A(t) = 0,$$

то уравнение (2) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение;

2) если $\tau(\infty) = \infty$ и выполнены условия

$$\varlimsup_{t\to\infty} A_\tau(t)/\varkappa(t) < -1, \quad \lim_{t\to\infty} t^{H+\alpha-1}\|c\|_{\alpha,t}/\varkappa(t) = 0,$$

то уравнение (2) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 > 0$ и решение $x(t) = x(0)e^{\nu(t)}$ уравнения (2) с начальным значением $x(0)$, п.н. удовлетворяющим неравенству $|x(0)| < \delta < \varepsilon_1$. Рассмотрим вероятность

$$\mathsf{P}\{|x(t)| > \varepsilon_1\} = \mathsf{P}\{\nu(t) > \ln(\varepsilon_1/|x(0)|)\} = 1 - \mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/|x(0)|)\}.$$

Достаточно доказать, что в условиях теоремы $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/\delta)\} = 0$. Действительно, с одной стороны, в таком случае будет доказано, что $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{P}\{|x(t)| > \varepsilon_1\} = 0$, так как

$$\mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/|x(0)|)\} \geqslant \mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/\delta)\}.$$

С другой стороны, на любом отрезке $t \in [0, T]$ справедливо неравенство $\mathbb{E}|\nu(t)| \leqslant C_T < \infty$ с некоторой константой C_T, зависящей от T, поскольку для любого $t \in [0, T]$ выполнены неравенства

$$|A(t)| \leqslant \int\limits_0^T |a(s)|\,ds, \quad \mathbb{E}\biggl|\int\limits_0^t b(s)\,dW(s)\biggr| \leqslant (\tau(T))^{1/2},$$

$$\mathbb{E}\biggl|\int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s)\biggr| \leqslant K\mathbb{E}|\eta_{H,\varepsilon,T}|\|c\|_{\alpha,T}T^{H-\varepsilon+\alpha-1} < \infty$$

(ввиду леммы 3 и [23, лемма 7.4]). Тогда применение неравенства Маркова даёт оценку

$$\mathsf{P}\{|x(t)| > \varepsilon_1\} \leqslant \mathsf{P}\{|\nu(t)| > \ln(\varepsilon_1/\delta)\} \leqslant C_T/\ln(\varepsilon_1/\delta),$$

и за счёт выбора достаточно малого δ можно добиться того, чтобы правая часть последнего неравенства была меньше любого наперёд заданного $\varepsilon_2 > 0$.

Рассмотрим отдельно два случая, указанных в условии теоремы.

Случай 1. Пусть $\tau(\infty) = \tau_0 < \infty$ и выполнены условия утверждения 1) теоремы. Введём обозначения

$$\nu_W(t) = \frac{1}{2}A(t) - \frac{1}{2}\tau(t) + \int\limits_0^t b(s)\,dW(s), \quad \nu_B(t) = \frac{1}{2}A(t) + \int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s).$$

В данных обозначениях $\nu(t) = \nu_W(t) + \nu_B(t)$. Рассмотрим события

$$\mathcal{A}_t^W = \biggl\{\nu_W(t) \leqslant \frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1/\delta)\biggr\} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_t^B = \biggl\{\nu_B(t) \leqslant \frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1/\delta)\biggr\}.$$

Несложно видеть, что $\mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/\delta)\} \geqslant \mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^W \bigcap \mathcal{A}_t^B\} = \mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^W\}\,\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^B\}$, поскольку процессы $\int_0^t b(s)\,dW(s)$ и $\int_0^t c(s)\,dB^H(s)$ независимы.

Рассмотрим вероятность $\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^W\}$. Пусть

$$M(t) = \frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1/\delta) - \frac{1}{2}A(t) + \frac{1}{2}\tau(t).$$

В силу леммы 2 и свойств винеровского процесса будем иметь

$$\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^W\} = \mathsf{P}\{\widetilde{W}(\tau(t)) \leqslant M(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau(t)}}\int\limits_{-\infty}^{M(t)} e^{-s^2/(2\tau(t))}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{M(t)/\sqrt{\tau(t)}} e^{-s^2/2}\,ds \xrightarrow[t\to\infty]{} 1,$$

поскольку $A(\infty) = -\infty$, $\tau(\infty) = \tau_0$ и, соответственно,

$$\lim_{t\to\infty} M(t)/\sqrt{\tau(t)} = \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} \lim_{t\to\infty} M(t) = \infty.$$

Теперь оценим вероятность $\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^B\}$, используя лемму 3:

$$\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^B\} \geqslant \mathsf{P}\left\{C_{\varepsilon,\alpha}^H(t) \leqslant \frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1/\delta) - \frac{1}{2}A(t)\right\} \geqslant 1 - L\biggl(\frac{2\|c\|_{\alpha,t}t^{H+\alpha-1}}{\ln(\varepsilon_1/\delta) - A(t)}\biggr)^{2/\varepsilon} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1,$$

так как

$$\lim_{t\to\infty} t^{H+\alpha-1}\|c\|_{\alpha,t}/A(t) = 0.$$

Таким образом, $\mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/\delta)\} \geqslant \mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^W\}\,\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^B\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$, что и требовалось.

Случай 2. Пусть $\tau(\infty) = \infty$ и выполнены условия утверждения 2) теоремы. Введём обозначение для функции из условия утверждения 2):

$$J(t) := A_\tau(t)/\varkappa(t), \quad \varlimsup_{t\to\infty} J(t) < -1.$$

Также для краткости обозначим

$$\xi(t) := A_\tau(t) + \int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s).$$

По лемме 2 имеем

$$\widetilde{W}(\tau(t)) = \int\limits_0^t b(s)\,dW(s)$$

п.н., отсюда $\nu(t) = \widetilde{W}(\tau(t)) + \xi(t)$ п.н. и, следовательно,

$$\mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/\delta)\} = \mathsf{P}\left\{\frac{\nu(t)}{\varkappa(t)} \leqslant \frac{\ln(\varepsilon_1/\delta)}{\varkappa(t)}\right\} \geqslant \mathsf{P}\left\{\frac{\widetilde{W}(\tau(t))}{\varkappa(t)} + \frac{\xi(t)}{\varkappa(t)} \leqslant 0\right\} =: \mathsf{P}\{\mathcal{A}\}.$$

Выберем некоторое достаточно малое положительное $\widetilde{\varepsilon} \in (0, -1 - \varlimsup_{t\to\infty} J(t))$ и рассмотрим события

$$\mathcal{A}_t^{\widetilde{W}} = \left\{\frac{\widetilde{W}(\tau(t))}{\varkappa(t)} \leqslant 1 + \widetilde{\varepsilon}\right\} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_t^{\xi} = \left\{\frac{\xi(t)}{\varkappa(t)} \leqslant -1 - \widetilde{\varepsilon}\right\}.$$

Как и в случае 1), получаем $\mathsf{P}\{\mathcal{A}\} \geqslant \mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^{\widetilde{W}} \bigcap \mathcal{A}_t^{\xi}\} = \mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^{\widetilde{W}}\}\,\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^{\xi}\}$.

Рассмотрим вероятность $\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^{\widetilde{W}}\}$. Для краткости введём обозначение

$$\zeta(\tau) := \sup_{s\geqslant\tau} \widetilde{W}(s)/\sqrt{2s\ln\ln s}.$$

По закону повторного логарифма $\lim\limits_{t\to\infty} \zeta(\tau(t)) = \lim\limits_{\tau\to\infty} \zeta(\tau) = 1$ п.н. Кроме того, функция $\tau(t)$ возрастает, а функция $\zeta(\tau)$ убывает по τ при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$. Значит, для любых $t_1, t_2 > 0$, $t_1 < t_2$, справедливо включение $\{\zeta(\tau(t_1)) \leqslant 1 + \widetilde{\varepsilon}\} \subset \{\zeta(\tau(t_2)) \leqslant 1 + \widetilde{\varepsilon}\}$, откуда по аксиоме непрерывности

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^{\widetilde{W}}\} \geqslant \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\zeta(\tau(t)) \leqslant 1 + \widetilde{\varepsilon}\} \geqslant \mathsf{P}\{\lim_{t\to\infty} \zeta(\tau(t)) \leqslant 1 + \widetilde{\varepsilon}\} = 1.$$

Теперь оценим вероятность $\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^\xi\}$ для достаточно больших t, применяя лемму 3. Имеем

$$\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^\xi\} = \mathsf{P}\left\{\frac{1}{\varkappa(t)}\int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s) \leqslant -1-\widetilde{\varepsilon}-J(t)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{P}\left\{\frac{C^H_{\varepsilon,\alpha}(t)}{\varkappa(t)} \leqslant -1-\widetilde{\varepsilon}-\sup_{s\geqslant t} J(s)\right\} \geqslant 1 - L\left(\frac{\|c\|_{\alpha,t}t^{H+\alpha-1}}{(-1-\widetilde{\varepsilon}-\sup\limits_{s\geqslant t} J(s))\varkappa(t)}\right)^{2/\varepsilon}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу, получаем

$$\varliminf_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^\xi\} \geqslant 1 - L\left(\frac{1}{(-1-\widetilde{\varepsilon}-\varlimsup\limits_{t\to\infty} J(s))}\lim_{t\to\infty}\frac{\|c\|_{\alpha,t}t^{H+\alpha-1}}{\varkappa(t)}\right)^{2/\varepsilon} = 1.$$

Таким образом $\mathsf{P}\{\nu(t) \leqslant \ln(\varepsilon_1/\delta)\} \geqslant \mathsf{P}\{\mathcal{A}\} \geqslant \mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^{\widetilde{W}}\}\,\mathsf{P}\{\mathcal{A}_t^\xi\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для уравнения (3) любое из условий:*
1) $b=0$, $a<0$, c *– любое;*
2) $b\neq 0$, $a<b^2/2$, $c=0$,
является достаточным для асимптотической устойчивости по вероятности его нулевого решения.

Доказательство получается непосредственным применением теоремы 1 с учётом того, что в случае постоянной функции $c(t)\equiv c$ выражение $\|c\|_{\alpha,t}$ равно $|c|t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$.

Следующая теорема является критерием асимптотической устойчивости по вероятности нулевого решения уравнения (2) в предположении, что коэффициент $b(t)$ отличен от тождественно нулевого. Обозначим

$$C_\phi(t) = \|c\|^2_{L^2_\phi;t} = \int\limits_0^t\int\limits_0^t c(s)c(u)\phi(s,u)\,ds\,du. \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть* $b\not\equiv 0$ *и* $c|_{[0,T]}\in L^2_\phi[0,T]$ *для любого* $T>0$. *Уравнение (2) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A_\tau(t)}{\sqrt{\tau(t)+C_\phi(t)}} = -\infty,$$

где $A_\tau(t)$, $\tau(t)$ *и* $C_\phi(t)$ *– функции, определённые в равенствах (9) и (10).*

Доказательство. Пусть $c\not\equiv 0$. Из лемм 1, 2 и предложения 1 следует, что интегралы Ито $I_W(t)=\int_0^t b(s)\,dW(s)$ и Янга $I_B(t)=\int_0^t c(s)\,dB^H(s)$ при фиксированном t – независимые, нормально распределённые случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями $\tau(t)$ и $C_\phi(t)$ соответственно. Следовательно, их сумма – также нормально распределённая случайная величина с нулевым средним и дисперсией $\tau(t)+C_\phi(t)$, откуда для любого $M>0$ выводим равенство

$$\mathsf{P}\{\nu(t)>M\} = \mathsf{P}\{I_W(t)+I_B(t) > M - A_\tau(t)\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau(t)+C_\phi(t))}}\int\limits_{M-A_\tau(t)}^\infty e^{-s^2/(2(\tau(t)+C_\phi(t)))}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{M(t)}^\infty e^{-s^2/2}\,ds,$$

$$M(t) = \frac{M-A_\tau(t)}{\sqrt{\tau(t)+C_\phi(t)}}. \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что формула (11) верна и в случае $c\equiv 0$. Условие $b\not\equiv 0$ гарантирует, что при достаточно больших t знаменатель дроби $M(t)$ будет отличен от нуля.

Далее, асимптотическая устойчивость равносильна соотношению $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\nu(t) > M\} = 0$, которое равносильно тому, что $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$. Заметим, что при достаточно больших t выражение $M/\sqrt{\tau(t) + C_\phi(t)}$ ограничено: для достаточно малого $\epsilon > 0$ оно принадлежит отрезку

$$\left[M\Big/\sqrt{\varliminf_{t\to\infty} \tau(t) + \varlimsup_{t\to\infty} C_\phi(t) + \epsilon}, M\Big/\sqrt{\varliminf_{t\to\infty} \tau(t) + \varliminf_{t\to\infty} C_\phi(t) - \epsilon}\right],$$

который, впрочем, может вырождаться в точку 0 в случае, если хотя бы один из пределов $\lim_{t\to\infty} \tau(t)$ или $\varliminf_{t\to\infty} C_\phi(t)$ равен бесконечности. Из ограниченности функции $M/\sqrt{\tau(t) + C_\phi(t)}$ следует равносильность соотношений $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$ и $\lim_{t\to\infty} A_\tau(t)/\sqrt{\tau(t) + C_\phi(t)} = -\infty$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Для уравнения (3) необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости по вероятности его нулевого решения является неравенство* $a < b^2/2$.

Доказательство. Если коэффициенты уравнения постоянны, то справедливы равенства $\nu(t) = (a - b^2/2)t + bW(t) + cB^H(t)$ и $C_\phi(t) = c^2 R_H(t,t) = c^2 t^{2H}$. При $b = c = 0$ утверждение теоремы очевидно.

Если $b \neq 0$ и $c = 0$, то из формулы (11) следует эквивалентность

$$M(t) \sim -(a - b^2/2)t^{1/2}/|b|$$

при $t \to \infty$. Если же $c \neq 0$, то из формулы (11) следует эквивалентность

$$M(t) \sim -(a - b^2/2)t^{1-H}/|c|$$

при $t \to \infty$. Таким образом, для асимптотической устойчивости по вероятности необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $a < b^2/2$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Из последнего утверждения следует, что слагаемое $cx(t)\,dB^H(t)$ в уравнении (3) не влияет на асимптотическую устойчивость по вероятности его нулевого решения.

В следующем предложении получена явная формула для момента порядка $p > 0$ решения уравнения (2).

Предложение 2. *Пусть* $c|_{[0,t]} \in L^2_\phi[0,t]$ *для некоторого* $t > 0$. *Тогда для любого* $p > 0$ *справедливо равенство*

$$\mathbb{E}|x(t)|^p = \mathbb{E}|x(0)|^p \exp\biggl(p\int\limits_0^t \biggl(a(s) + \frac{p-1}{2}b^2(s) + pH(2H-1)\int\limits_0^s (s-u)^{2H-2}c(s)c(u)\,du\biggr)\,ds\biggr),$$

где $x(t)$ *– решение уравнения (2) с начальным значением* $x(0)$.

Доказательство. Из представления (5) решения уравнения (2), независимости $x(0)$, $W(t)$, $B^H(t)$ и из леммы 1 следует равенство

$$\mathbb{E}|x(t)|^p = \mathbb{E}|x(0)|^p \exp\biggl(p\int\limits_0^t \biggl(a(s) - \frac{1}{2}b^2(s)\biggr)\,ds\biggr) \times$$

$$\times\,\mathbb{E}\exp\biggl(\int\limits_0^t pb(s)\,dW(s)\biggr)\mathbb{E}\exp\biggl(\int\limits_0^t pc(s)\,dB^H(s)\biggr). \tag{12}$$

Вычислим $u(t) = \mathbb{E}\exp(\int_0^t pb(s)\,dW(s))$. Из представления (5) следует, что процесс $\eta(t) = \exp(\int_0^t pb(s)\,dW(s))$ является решением линейного уравнения

$$\eta(t) = 1 + \frac{p^2}{2}\int\limits_0^t b^2(s)\eta(s)\,ds + p\int\limits_0^t b(s)\eta(s)\,dW(s).$$

Возьмём математическое ожидание от обеих частей последнего равенства. Воспользовавшись теоремой Фубини и тем, что среднее интеграла Ито равно нулю, получаем

$$u(t) = 1 + \frac{p^2}{2}\int\limits_0^t b^2(s)u(s)\,ds.$$

Дифференцируя последнее равенство, приходим к уравнению

$$u'(t) - \frac{p^2}{2}b^2(t)u(t) = 0$$

с начальным условием $u(0) = \mathbb{E}e^{y(0)} = 1$. Его решение

$$\mathbb{E}\exp\biggl(\int\limits_0^t pb(s)\,dW(s)\biggr) = u(t) = \exp\biggl(\frac{p^2}{2}\tau(t)\biggr). \tag{13}$$

Осталось вычислить $v(t) = \mathbb{E}\exp(\int_0^t pc(s)\,dB^H(s))$. Для краткости введём обозначения: $y(t) = \int_0^t pc(s)\,dB^H(s)$, $z(t) = e^{y(t)}$, тогда $v(t) = \mathbb{E}z(t)$. Из представления решения (5) следует, что процесс $z(t)$ является решением линейного уравнения

$$z(t) = 1 + p\int\limits_0^t c(s)z(s)\,dB^H(s). \tag{14}$$

Согласно [1, разд. 5.1] потраекторный интеграл Янга $\int_0^t c(s)z(s)\,dB^H(s)$ совпадает с симметрическим интегралом $\int_0^t c(s)z(s)d^\circ B^H(s)$. Согласно [1, теорема 5.5.1] симметрический интеграл может быть выражен через интеграл Вика–Ито–Скорохода $\int_0^t c(s)z(s)\diamond dB^H(s)$ по формуле

$$\int\limits_0^t c(s)z(s)d^\circ B^H(s) = \int\limits_0^t c(s)z(s)\diamond dB^H(s) + \int\limits_0^t D_s^\phi(c(s)z(s))\,ds$$

(п.н.), где D_t^ϕ – оператор ϕ-производной [1, разд. 3.5] (обобщённой производной по ω). Поскольку интеграл Вика–Ито–Скорохода имеет нулевое среднее, то, взяв математическое ожидание от обеих частей равенства (14), получим

$$v(t) = 1 + p\mathbb{E}\int\limits_0^t D_s^\phi(c(s)z(s))\,ds.$$

Вычислим ϕ-производную $D_s^\phi(c(s)z(s))$. Используя связь интеграла Янга, симметрического интеграла и интеграла Вика–Ито–Скорохода, нетрудно заметить, что

$$y(t) = p\int\limits_0^t c(s)\,dB^H(s) = p\int\limits_0^t c(s)d^\circ B^H(s) = p\int\limits_0^t c(s)\diamond dB^H(s),$$

поскольку функция $c(s)$ не зависит от ω и, соответственно, $D_s^\phi(c(s)) = 0$. Следовательно, $z(t) = F(\int_0^t c(s)\diamond dB^H(s))$, где $F(y) = e^{py}$. Согласно свойствам ϕ-производной [1, раздел 3.5] будем иметь

$$D_t^\phi(c(t)z(t)) = c(t)D_t^\phi F(y(t)) = c(t)F'(y(t)) = c(t)pe^{y(t)}D_t^\phi\biggl(\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(s)1_{[0,t]}(s)\diamond dB^H(s)\biggr) =$$

$$= pc(t)z(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(s,t)c(s)1_{[0,t]}(s)\,ds = pH(2H-1)c(t)z(t)\int\limits_0^t (t-s)^{2H-2}c(s)\,ds.$$

Таким образом, используя последнее равенство и применяя теорему Фубини к интегралу (14), получаем интегральное уравнение для нахождения функции $v(t)$:

$$v(t) = 1 + p^2H(2H-1)\int\limits_0^t \bigg(c(s)\int\limits_0^s (s-u)^{2H-2}c(u)\,du\bigg)v(s)\,ds.$$

Дифференцируя последнее равенство, приходим к уравнению

$$v'(t) - p^2H(2H-1)c(t)\bigg(\int\limits_0^t (t-s)^{2H-2}c(s)\,ds\bigg)v(t) = 0$$

с начальным условием $v(0) = \mathbb{E}e^{y(0)} = 1$. Его решение:

$$\mathbb{E}\exp\bigg(\int\limits_0^t pc(s)\,dB^H(s)\bigg) = v(t) = \exp\bigg(p^2H(2H-1)\int\limits_0^t c(s)\bigg(\int\limits_0^s (s-u)^{2H-2}c(u)\,du\bigg)\,ds\bigg). \quad (15)$$

Теперь из равенств (12), (13), (15) вытекает требуемое. Предложение доказано.

Обозначим

$$F_p(t) := a(t) + \frac{p-1}{2}b^2(t) + pH(2H-1)\int\limits_0^t (t-u)^{2H-2}c(t)c(u)\,du, \quad I_p(t) := \int\limits_0^t F_p(s)\,ds. \quad (16)$$

Из предложения 2 очевидным образом следует теорема о p-устойчивости нулевого решения уравнения (2).

Теорема 3. *Пусть* $c|_{[0,T]} \in L^2_\phi[0,T]$ *для любого* $T > 0$, *и* $F_p(t)$, $I_p(t)$ *– функции, определённые равенствами (16). Тогда справедливы утверждения.*

1. Уравнение (2) имеет p*-устойчивое нулевое решение тогда и только тогда, когда* $\varlimsup\limits_{t\to\infty} I_p(t) < \infty$.

2. Уравнение (2) имеет асимптотически p*-устойчивое нулевое решение тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{t\to\infty} I_p(t) = -\infty$.

3. Уравнение (2) имеет экспоненциально p*-устойчивое нулевое решение, если*

$$\sup_{t>0} F_p(t) < 0.$$

Следствие 3. *Для уравнения (3) имеют место следующие утверждения:*

1) необходимым и достаточным условием p*-устойчивости его нулевого решения является выполнение соотношений* $c = 0$ *и* $a \leqslant (1-p)b^2/2$;

2) необходимым и достаточным условием экспоненциальной p*-устойчивости его нулевого решения является выполнение соотношений* $c = 0$ *и* $a < (1-p)b^2/2$.

В частности, нулевое решение не является p*-устойчивым ни при каком* $c \neq 0$.

Доказательство. Если коэффициенты уравнения (2) постоянны, то выражение для $I_p(t)$ принимает вид

$$I_p(t) = \int\limits_0^t \bigg(a + \frac{p-1}{2}b^2 + pHc^2s^{2H-1}\bigg)\,ds = \bigg(a + \frac{p-1}{2}b^2 + \frac{p}{2}c^2t^{2H-1}\bigg)t.$$

Если $c \neq 0$, то имеет место эквивалентность $I_p(t) \sim pc^2t^{2H}/2$, откуда $\lim\limits_{t\to\infty} I_p(t) = \infty$, и нулевое решение не является p-устойчивым. Поэтому с необходимостью $c = 0$. В таком случае $I_p(t) = (a + (p-1)b^2/2)t$ и утверждение становится очевидным.

Замечание 3. Условия асимптотической устойчивости по вероятности нулевого решения стационарного уравнения (3) отличаются от условий асимптотической p-устойчивости. В критерии асимптотической устойчивости по вероятности c – любое, а в критерии асимптотической p-устойчивости $c = 0$ (при выполнении условий $a < b^2/2$ и $a < (1-p)b^2/2$ соответственно).

Это обстоятельство объясняется тем, что асимптотическая устойчивость по вероятности зависит от стандартного отклонения $\sigma(t) = \sqrt{b^2t + c^2t^{2H}}$ процесса $\nu(t) = (a-b^2/2)t + bW(t) + cB^H(t)$. Функция $\sigma(t)$ имеет порядок роста t^H – более низкий, чем порядок роста математического ожидания $\mu(t) = (a-b^2/2)t$ процесса $\nu(t)$. В свою очередь, асимптотическая p-устойчивость зависит от дисперсии $\sigma^2(t)$ процесса $\nu(t)$, имеющей порядок роста t^{2H} – более высокий, нежели порядок роста функции $\mu(t)$.

Замечание 4. Важное свойство линейного стационарного уравнения Ито (3) $(c = 0)$, состоящее в том, что для него из асимптотической устойчивости по вероятности следует p-устойчивость его нулевого решения при достаточно малом p [17, разд. 6.1], перестаёт быть верным в общем случае при $c \neq 0$.

5. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = -2tx(t)\,dt + \frac{x(t)}{\sqrt{1+t^2}}\,dW(t) + tx(t)\,dB^H(t), \quad t \geqslant 0.$$

Для него

$$\tau(t) = \operatorname{arctg} t \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi/2, \quad A(t) = -t^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} -\infty, \quad \|c\|_{\alpha,t} = t^{2-\alpha}/(1-\alpha)$$

и нетрудно вычислить, что

$$\lim_{t\to\infty} t^{H+\alpha-1}\|c\|_{\alpha,t}/A(t) = \lim_{t\to\infty} t^{H-1}/(1-\alpha) = 0.$$

Поэтому на основании теоремы 1 заключаем, что нулевое решение этого уравнения асимптотически устойчиво по вероятности.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = t(\cos^2 t)x(t)\,dt + 2\sqrt{t}(\cos t)x(t)\,dW(t) + x(t)\,dB^H(t), \quad t \geqslant 0.$$

В данном случае

$$\tau(t) = t^2 + t\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty, \quad a(s) = \frac{1}{4}b^2(t),$$

соответственно

$$\lim_{t\to\infty} A_\tau(t)/\varkappa(t) = -\frac{1}{4}\lim_{\tau\to\infty}\sqrt{\frac{\tau}{2\ln\ln\tau}} = -\infty.$$

Поскольку $\|c\|_{\alpha,t} = t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, $\tau(t) \sim t^2$, то

$$\lim_{t\to\infty} t^{H+\alpha-1}\|c\|_{\alpha,t}/\varkappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}(1-\alpha)}\lim_{t\to\infty}\frac{t^{H-1}}{\sqrt{\ln\ln\tau(t)}} = 0,$$

откуда на основании теоремы 1 заключаем, что нулевое решение асимптотически устойчиво по вероятности.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = a(t)x(t)\,dt + b(t)x(t)\,dW(t) + e^{-t}x(t)\,dB^H(t), \quad t \geqslant 0. \tag{17}$$

Поскольку $c(u) = e^{-u} \in (0,1]$ при $u \geqslant 0$, то

$$\int_0^t (t-u)^{2H-2} c(t)c(u)\,du \leqslant c(t) \int_0^t (t-u)^{2H-2}\,du = \frac{1}{2H-1} e^{-t} t^{2H-1}.$$

Заметим, что функция $\psi(t) = e^{-t}t^{2H-1}$ достигает максимума в точке $t_0 = 2H-1$, поскольку $\psi(0) = \psi(\infty) = 0$, $\psi'(t) = e^{-t}t^{2H-2}((2H-1)-t)$. Значит, в обозначениях теоремы 3 будем иметь

$$F_p(t) \leqslant a(t) + \frac{p-1}{2} b^2(t) + pH(2H-1)^{2H-1}e^{1-2H} < a(t) + \frac{p-1}{2} b^2(t) + pH,$$

откуда на основании теоремы 3 достаточное условие экспоненциальной p-устойчивости даёт неравенство

$$\sup_{t\geqslant 0}\bigg(a(t) + \frac{p-1}{2} b^2(t)\bigg) \leqslant -pH.$$

В некотором смысле последнее неравенство является аналогом условия 2 из следствия 3 в классе уравнений (17) с непостоянными коэффициентами.

В частности, из последнего следует, что, к примеру, уравнение

$$dx(t) = \bigg(-\beta + \frac{(p-1)H}{2}\sin^2 t\bigg)x(t)\,dt + \sqrt{H}(\cos t)x(t)\,dW(t) + e^{-t}x(t)\,dB^H(t), \quad t \geqslant 0,$$

будет иметь p-экспоненциально устойчивое нулевое решение для любого $p > 0$ и $\beta \geqslant (3p-1)H/2$.

Автор выражает благодарность М.М. Васьковскому за предложенное направление исследования и внимание, проявленное к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biagini F., Hu Y., Oksendal B., Zhang T.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications. London, 2008.
2. *Mishura Y.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. Berlin; Heidelberg, 2008.
3. *Zahle M.* Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I // Prob. Theory and Rel. Fields. 1998. V. 111. № 3. P. 333–374.
4. *Kubilius K.* The existence and uniqueness of the solution of an integral equation driven by a p-semimartingale of special type // Stoch. Proc. and Their Appl. 2002. V. 98. № 2. P. 289–315.
5. *Guerra J., Nualart D.* Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion // Stoch. Anal. and Appl. 2008. V. 26. № 5. P. 1053–1075.
6. *Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием и стандартным и дробным броуновскими движениями // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 22–34.
7. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 2. С. 187–200.
8. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1060–1076.
9. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 997–1003.
10. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1011–1019.

11. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения. Минск, 2019.
12. *Vaskouski M., Kachan I.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 // Stoch. Anal. and Appl. 2018. V. 36. № 6. P. 909–931.
13. *Васьковский М.М.* Стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа со стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Херста, большими 1/3 // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2020. Т. 56. № 1. С. 36–50.
14. *Васьковский М.М., Качан И.В.* Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62. № 4. С. 398–405.
15. *Качан И.В.* Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2018. Т. 54. № 2. С. 193–209.
16. *Khasminskii R.Z.* On the stability of nonlinear stochastic systems // J. of Appl. Math. and Mechanics. 1967. V. 30. № 5. P 1082–1089.
17. *Khasminskii R.Z.* Stochastic Stability of Differential Equations. Berlin; Heidelberg, 2012.
18. *Mao X.* Exponential Stability of Stochastic Differential Equations. New York, 1994.
19. *Garrido-Atienza M.J., Neuenkirch A., Schmalfuss B.* Asymptotical stability of differential equations driven by Hölder-continuous paths // J. of Dynamics and Differ. Equat. 2018. V. 30. № 1. P. 359–377.
20. *Васьковский М.М.* Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 160–173.
21. *Васьковский М.М., Качан И.В.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2019. Т. 55. № 2. С. 135–151.
22. *Pipiras V., Taqqu M.S.* Integration questions related to fractional Brownian motion // Prob. Theory and Rel. Fields. 2000. V. 118. P. 251–291.
23. *Nualart D., Rascanu A.* Differential equations driven by fractional Brownian motion // Collect. Math. 2002. V. 53. № 1. P. 55–81.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 25.12.2020 г.
После доработки 25.12.2020 г.
Принята к публикации 02.03.2021 г.