ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 607–613

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926

МЕТОД ЗАМОРОЖЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В УСЛОВИЯХ ГЁЛЬДЕРА

© 2021 г. А. И. Перов, И. Д. Коструб, В. К. Каверина

Методом замороженных коэффициентов для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений получены различные признаки экспоненциальной устойчивости. При этом использована и доказана уточнённая оценка Гельфанда–Шилова матричной экспоненты. Отдельно рассматриваются случаи, когда матрица коэффициентов системы удовлетворяет на всей числовой полуоси условию Липшица или условию Гёльдера.

DOI: 10.31857/S0374064121050034

Оценка Гельфанда–Шилова и её уточнение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – вещественная или комплексная $n \times n$-матрица. Нас интересует поведение матричной экспоненты

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{E} + t\mathbf{A} + \ldots + \frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ – единичная $n \times n$-матрица. Поскольку общее решение линейной обыкновенной дифференциальной системы с матрицей коэффициентов $\mathbf{A}$ имеет вид $e^{t\mathbf{A}}C$, где $C \in \mathbb{R}^n$ – вектор произвольных постоянных, то в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений важную роль играют различные оценки матричной экспоненты, причём с учётом нашей цели – изучения условий устойчивости – нас интересуют оценки матричной экспоненты при неотрицательных значениях времени $t \in [0, +\infty)$. Помимо представления (1) существуют и другие способы задания матричной экспоненты.

Далее через $\|\cdot\|$ обозначается матричная норма. Получим оценки нормы матричной экспоненты. Прежде всего, так как

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant \|\mathbf{E}\| + t\|\mathbf{A}\| + \ldots + \frac{t^k\|\mathbf{A}\|^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\|\mathbf{A}\|^k}{k!},$$

то

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant e^{t\|\mathbf{A}\|} \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{2}$$

Эта оценка крайне груба: из неё, например, не следует стремление при $t \to +\infty$ матричной экспоненты к нулю, если матрица $\mathbf{A}$ является гурвицевой. Частично этот недостаток устраняет оценка

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant e^{ta} \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{3}$$

где $a = \|\mathbf{A}\|_{\log}$ – *логарифмическая норма Лозинского* матрицы $\mathbf{A}$, т.е.

$$\|\mathbf{A}\|_{\log} = \lim_{0<t\to 0} \frac{\|\mathbf{E} + t\mathbf{A}\| - \|\mathbf{E}\|}{t}$$

[1, с. 461; 2, с. 92, задача 16; 3, с. 93–94; 4]. Логарифмическая норма Лозинского может быть положительной, равной нулю или отрицательной; если $\|\mathbf{A}\|_{\log} < 0$, то матрица $\mathbf{A}$ гурвицева, причём $\operatorname{spa}\mathbf{A} \leqslant \|\mathbf{A}\|_{\log}$ (*спектральной абсциссой* $\operatorname{spa}\mathbf{A}$ матрицы $\mathbf{A}$ называется максимальная из вещественных частей её собственных значений).

В оценках (2) и (3) порядок n матрицы не играет никакой роли. Более точная в определённом смысле оценка, учитывающая порядок матрицы, найдена Гельфандом и Шиловым [5, с. 78]:

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant e^{t\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} t^k(2\|\mathbf{A}\|)^k \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{4}$$

где $\alpha = \operatorname{spa}\mathbf{A}$ и n – порядок матрицы $\mathbf{A}$. Для получения этой оценки в [5] использовался интерполяционный многочлен Ньютона. Более точный анализ рассуждений из [5] приводит к оценке

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant e^{t\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k(2\|\mathbf{A}\|)^k}{k!} \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{5}$$

Это уточнение указано в монографии [1, с. 131]. Под *оценкой Гельфанда–Шилова* будем понимать оценку (5).

При выводе этой оценки вначале предполагается, что собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ матрицы $\mathbf{A}$ попарно различны; тогда для аналитической функции f значение $f(\mathbf{A})$ можно найти в виде следующего интерполяционного многочлена Ньютона:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{A}) = a_1\mathbf{E} + a_2(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}) + a_3(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}) + \ldots \\ \ldots + a_n(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E})\cdots(\mathbf{A} - \lambda_{n-1}\mathbf{E}), \end{gathered} \tag{6}$$

коэффициенты которого $a_j,\ \ j = \overline{1,n},$ вычисляются по формуле [5, с. 80]

$$a_{k+1} = \int\limits_0^1 ds_1 \cdots \int\limits_0^{s_{n-1}} f^{(k)}(\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)s_1 + \ldots + (\lambda_{k+1} - \lambda_k)s_k)\, ds_k, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{7}$$

Из формулы (7) вытекает оценка

$$|a_{k+1}| \leqslant \frac{1}{k!}\max_{\lambda\in B_{k+1}} |f^{(k)}(\lambda)|, \tag{8}$$

где B_{k+1} – выпуклая оболочка первых $k+1$ собственных значений $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{k+1}$.

В интересующем нас случае $f(\lambda) = e^{t\lambda}$; поэтому $f^{(k)}(\lambda) = e^{t\lambda}t^k$ и оценка (8) принимает вид

$$|a_{k+1}| \leqslant \frac{1}{k!}e^{t\alpha}t^k \quad (0 \leqslant t < \infty), \tag{9}$$

а так как, кроме того, $\|\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{E}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + |\lambda_j| \leqslant 2\|\mathbf{A}\|,$ то из (6) и (9) следует, что оценка (5) справедлива для матриц, все собственные значения которых попарно различны. Поскольку множество таких матриц всюду плотно в линейном нормированном пространстве матриц, то из соображений непрерывности заключаем, что оценка Гельфанда–Шилова (5) выполняется для любой матрицы $\mathbf{A}$.

В книге [5] k-кратный интеграл в (7) заменялся просто единицей, что и объясняет происхождение оценки (4).

Оценим норму $\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{E}$ более аккуратно: $\|\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{E}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + |\lambda_j| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \operatorname{spr}\mathbf{A}$ (*спектральным радиусом* $\operatorname{spr}\mathbf{A}$ матрицы $\mathbf{A}$ называется число, равное наибольшему из модулей её собственных значений; известно, что $\operatorname{spr}\mathbf{A} \leqslant \|\mathbf{A}\|$ для любой матричной нормы). Таким образом, наше уточнение оценки (5) состоит в следующем:

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leqslant e^{t\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho + \|\mathbf{A}\|)^k}{k!}t^k \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{10}$$

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = \overline{1,n}; \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{x}, \tag{11}$$

где $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ – матрица n-го порядка. Предположим, что $\mathbf{A}(t)$ гурвицева при каждом t. Означает ли это, что система (11) асимптотически устойчива? Ответ на поставленный вопрос отрицательный, как показывает приводимый ниже пример.

Пусть $n = 2$ и

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} -1 - 2\cos(4t) & 2 + 2\sin(4t) \\ -2 + 2\sin(4t) & -1 + 2\cos(4t) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Характеристическое уравнение $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}(t)) \equiv \lambda^2 + 2\lambda + 1$ матрицы $\mathbf{A}(t)$ не зависит от t, а её собственные значения следующие: $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = -1$. Поэтому $\operatorname{spa}\mathbf{A}(t) = -1$ и матрица $\mathbf{A}(t)$ является гурвицевой при каждом t. С другой стороны, система (11) в рассматриваемом случае имеет решение $(e^t\sin(2t), e^t\cos(2t))^{\mathrm{T}}$, для которого $\|x(t)\| = e^t$. Отметим, что в монографии [1, с. 124, формула (9.3)] вместо матрицы (12) приведена транспонированная к ней матрица.

Результаты А.Ю. Левина [6]. Пусть $\|\mathbf{A}(t)\| \leqslant h$ и $\operatorname{spa}\mathbf{A}(t) \leqslant -\gamma$, где $\gamma > 0$ при $0 \leqslant t < \infty$. Мы видим, что $\mathbf{A}(t)$ гурвицева при всех неотрицательных t. Введём условие медленного изменения матричнозначной функции $\mathbf{A}(t)$: имеет место неравенство

$$\|\mathbf{A}(t+s) - \mathbf{A}(t)\| \leqslant \varphi(s) \quad (t \geqslant t_0, \quad s > 0), \tag{13}$$

где для функции φ выполняется оценка

$$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2h)^k}{k!} t^k \varphi(t)\, dt < 1. \tag{14}$$

Пусть выполнено условие медленного роста (13) и условие (14). Тогда система (11) экспоненциально устойчива [6].

Если колебание функции $\mathbf{A}(t)$ достаточно ма́ло:

$$\|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s)\| \leqslant \alpha \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t, s < \infty \tag{15}$$

(в этом случае $\varphi(s) \equiv \alpha$), то условие экспоненциальной устойчивости (14) приводит к оценке

$$(0 <)\ \alpha < \frac{2h - \gamma}{(2h\gamma^{-1})^n - 1}. \tag{16}$$

Если выполнено условие Липшица

$$\|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s)\| \leqslant L|t - s| \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t, s < \infty \tag{17}$$

(в этом случае $\varphi(s) = Ls$), то условие экспоненциальной устойчивости (14) даёт оценку

$$(0 <)\ L < \frac{(2h - \gamma)^2}{n(2h\gamma^{-1})^{n+1} - (n+1)(2h\gamma^{-1})^n + 1}. \tag{18}$$

Условие (14) вытекает из метода замороженных коэффициентов В.М. Алексеева [7] (см. также [1, § 10]).

Основное условие. Рассмотрим систему (11). Предположим, что при всех $t \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\operatorname{spa}\mathbf{A}(t) \leqslant -\gamma, \quad \operatorname{spr}\mathbf{A}(t) \leqslant \rho \quad \text{и} \quad \|\mathbf{A}(t)\| \leqslant h, \tag{19}$$

где γ, ρ, h – некоторые положительные постоянные, причём без ограничения общности считаем, что $\gamma \leqslant \rho \leqslant h$. Использование оценки (10) в сочетании с условием (13), (14) медленного изменения, согласно методу замороженных коэффициентов В.М. Алексеева [7], приводит к следующему условию экспоненциальной устойчивости системы (11):

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^k\varphi(t)\,dt<1. \qquad (20)$$

Так как $\rho+h\leqslant 2h$, то новое условие устойчивости не хуже известного (14) и лучше, если $\rho<h$.

Пусть выполнена оценка (15). Тогда основное условие (20) принимает вид

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^k\alpha\,dt<1.$$

Так как

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^k\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma}t^k\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}\frac{k!}{\gamma^{k+1}}=\frac{\Lambda}{\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\rho+h}{\gamma}\right)^k,$$

то, воспользовавшись очевидным тождеством $\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^k=(\zeta^n-1)/(\zeta-1)$ при $\zeta\neq 1$, получаем

$$(0<)\ \alpha<\frac{\rho+h-\gamma}{((\rho+h)\gamma^{-1})^n-1}.$$

Эта оценка улучшает оценку (16) (и совпадает с ней, если $\rho=h$).

Условие Липшица. Пусть выполнено условие Липшица (17). Основное условие (20) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^kLt\,dt<1. \qquad (21)$$

Имеем

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^{k+1}\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma}t^{k+1}\,dt=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}\frac{(k+1)!}{\gamma^{k+2}}=\frac{1}{\gamma^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\rho+h}{\gamma}\right)^k(k+1).$$

Поэтому неравенство (21) запишется в виде

$$(0<)\ L<\frac{(\rho+h-\gamma)^2}{n((\rho+h)\gamma^{-1})^{n+1}-(n+1)((\rho+h)\gamma^{-1})^n+1}. \qquad (22)$$

Полученная оценка уточняет оценку (18) (и совпадает с ней, если $\rho=h$). При выводе оценки (22) мы воспользовались следующим тождеством:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^k(k+1)=(n\zeta^{n+1}-(n+1)\zeta^n+1)(\zeta-1)^2 \quad \text{при} \quad \zeta\neq 1.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $\zeta = (\rho + h)/\gamma \geqslant 2$.

Вернёмся к условию Липшица (17). Так как $\mathbf{A}(t) \leqslant h$, то $\|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s)\| \leqslant 2h$ для всех t и s. Поэтому вместо (17) можно использовать оценку

$$|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s)\| \leqslant \min\{L|t-s|, 2h\} \quad (0 \leqslant t, s < \infty).$$

Основное условие (20) для такого модуля непрерывности принимает вид

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho+h)^k}{k!} t^k \min\{Lt, 2h\}\, dt < 1.$$

Оценивая $\min\{Lt, 2h\}$ сверху суммой $Lt + 2h$, приходим к неравенству

$$L \int\limits_0^a e^{-t\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho+h)^k}{k!} t^{k+1}\, dt + 2h \int\limits_a^\infty e^{-t\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho+h)^k}{k!} t^k\, dt < 1.$$

Видим, что оценка (22) может быть существенно улучшена, однако мы не приводим получающиеся формулы, так как они имеют громоздкий вид и, что самое главное, не позволяют дать явную оценку для постоянной Липшица.

Условие Гёльдера. Пусть выполнено условие Гёльдера

$$\|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s)\| \leqslant H|t-s|^\sigma \quad (0 \leqslant t, s < \infty), \tag{23}$$

где H и σ – некоторые положительные постоянные, причём $0 < \sigma < 1$. Как и прежде, считаем, что при всех $t \geqslant 0$ имеют место неравенства (19), где γ, ρ, h – некоторые положительные постоянные, причём без ограничения общности $\gamma \leqslant \rho \leqslant h$.

Основное условие (20) в этом случае принимает вид

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho+h)^k}{k!} t^k H t^\sigma\, dt < 1, \tag{24}$$

и всё сводится к нахождению следующего выражения:

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\rho+h)^k}{k!} \int\limits_0^\infty e^{-t\gamma} t^{k+\sigma}\, dt. \tag{25}$$

С этим обозначением неравенство (24) запишется в виде $HJ < 1$. Чтобы найти значения несобственного интеграла $\int_0^\infty e^{-t\gamma} t^{k+\sigma}\, dt$ с нецелым показателем $k + \sigma$, нам понадобятся свойства гамма-функции [8] $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ $(a > 0)$. (Эйлеров интеграл второго рода). Сделав в искомом интеграле замену $s = \gamma t$, получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma} t^{k+\sigma}\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-s} \left(\frac{s}{\gamma}\right)^{k+\sigma} \frac{ds}{\gamma} = \frac{1}{\gamma^{1+k+\sigma}} \int\limits_0^\infty e^{-s} s^{k+\sigma}\, ds = \frac{1}{\gamma^{1+k+\sigma}} \Gamma(1+k+\sigma).$$

Так как

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \tag{26}$$

то

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\gamma} t^{k+\sigma}\, dt = \frac{1}{\gamma^{k+\sigma+1}} (k+\sigma)\Gamma(k+\sigma).$$

Поэтому интересующее нас выражение (25) принимает вид

$$J=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}\frac{1}{\gamma^{k+\sigma+1}}(k+\sigma)\Gamma(k+\sigma).$$

Применяя последовательно формулу (26), будем иметь

$$(k+\sigma)\Gamma(k+\sigma)=(k+\sigma)(k-1+\sigma)\Gamma(k-1+\sigma)=\ldots=(k+\sigma)(k-1+\sigma)\cdots\sigma\Gamma(\sigma).$$

Это означает, что

$$J=\frac{1}{\gamma^{1+\sigma}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\rho+h}{\gamma}\right)^k\frac{(k+\sigma)(k-1+\sigma)\cdots\sigma}{k!}\Gamma(\sigma).$$

Поэтому условие (24) запишется следующим образом (краткое сообщение о последнем результате приведено в [9]):

$$0<H<\gamma^{1+\sigma}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\rho+h}{\gamma}\right)^k\frac{(k+\sigma)(k-1+\sigma)\cdots(\sigma)}{k!}\Gamma(\sigma)\right)^{-1}. \tag{27}$$

Рассмотрим более подробно случай $\sigma=1/2$. Тогда условие (23) принимает вид

$$\|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}(s)\|\leqslant H\sqrt{|t-s|}=H|t-s|^{1/2}.$$

Найдём значение $\Gamma(1/2)$. Так как, согласно [8],

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\pi/\sin(a\pi)\quad(0<a<1),$$

то отсюда при $a=\sigma=1/2$ имеем $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. Поскольку

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}=\frac{(2k+1)(2k-1)\cdots1}{2^{k+1}}=\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}},$$

то при $\sigma=1/2$ получаем

$$\frac{(k+\sigma)(k-1+\sigma)\cdots\sigma}{k!}\Gamma(\sigma)=\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Поэтому оценка (27) в конечном итоге при $\sigma=1/2$ принимает вид

$$0<H<2\gamma^{3/2}\pi^{-1/2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\rho+h}{\gamma}\right)^k\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\right)^{-1}.$$

Вернёмся к условию Гёльдера (23). Так как $\|\mathbf{A}(t)\|\leqslant h$ для рассматриваемых значений t, то $\|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}(s)\|\leqslant 2h$. Поэтому вместо (23) можно использовать оценку

$$\|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}(s)\|\leqslant\min\{H|t-s|^{\sigma},2h\}\quad(0\leqslant t,s<\infty).$$

Основное условие (20) в этом случае принимает вид

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^k\min\{Ht^{\sigma},2h\}\,dt<1.$$

Полагая $b = (2h/L)^{1/\sigma}$, получаем

$$H\int\limits_0^b e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^{k+\sigma}\,dt + 2h\int\limits_b^\infty e^{-t\gamma}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\rho+h)^k}{k!}t^k\,dt < 1.$$

Как видим, оценка (22) может быть существенно улучшена, однако мы не приводим получающиеся формулы, так как они имеют громоздкий вид и, что самое главное, не позволяют дать явную оценку для постоянной Гёльдера.

Исследования Перова А.И. выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19–01–00732).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
3. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Признаки устойчивости периодических решений систем дифференциальных уравнений, основанные на теории внедиагонально неотрицательных матриц. Воронеж, 2015.
4. *Лозинский С.М.* Оценка погрешностей численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. 1958. № 5. С. 52–90.
5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., 1958.
6. *Левин А.Ю.* Теорема Харитонова для слабостационарных систем // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50. Вып. 6 (306). С. 189–190.
7. *Алексеев В.М.* Оценка погрешности численного интегрирования // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 2. С. 247–250.
8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1970.
9. *Перов А.И., Коструб И.Д., Каверина В.К.* Метод замороженных коэффициентов в условиях Гёльдера Современные методы теории краевых задач // Материалы междунар. конф. Воронежская весенняя мат. школа "Понтрягинские чтения XXXI" (3–9 мая 2020 г.). Воронеж, 2020. С. 171–172.

Воронежский государственный университет,
Финансовый университет при правительстве
Российской Федерации, г. Москва

Поступила в редакцию 23.02.2021 г.
После доработки 23.02.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.