ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 614–624

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.3

БИКВАТЕРНИОННЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И СВОЙСТВА ИХ ОБОБЩЁННЫХ РЕШЕНИЙ

© 2021 г. Л. А. Алексеева

Рассматриваются бикватернионные волновые (биволновые) уравнения. Они представляют собой бикватернионные обобщения уравнений Максвелла и Дирака и эквивалентны системе из восьми дифференциальных уравнений гиперболического типа. С использованием теории обобщённых функций построены фундаментальные и обобщённые решения таких уравнений, в том числе и разрывные, описывающие ударные волны, и получены условия на фронтах. Построено решение задачи Коши для биволнового уравнения и бикватернионные аналоги формул Кирхгофа–Грина, которые позволяют по граничным и начальным значениям решения в ограниченной области определить его внутри области.

DOI: 10.31857/S0374064121050046

Введение. В настоящей работе строятся решения краевых задач для бикватернионных волновых (*биволновых*) уравнений. Эти уравнения являются бикватернионными обобщениями уравнений Максвелла и Дирака. Отметим, что кватернионное представление уравнений Максвелла началось с работ Дж. Максвелла и имеет довольно обширную библиографию (см., например, [1–10] и др.). Бикватернионные волновые уравнения относятся к классу гиперболических и описывают решения гиперболических систем из восьми дифференциальных уравнений первого порядка. Теория краевых задач для таких систем уравнений пока не получила такого значительного развития, как теория краевых задач для уравнений и систем эллиптического и параболического типов.

Здесь развивается подобная теория для биволновых уравнений с использованием методов теории обобщённых функций. Наиболее простая из краевых задач – это задача Коши с начальными условиями. Её решение для волнового уравнения хорошо известно и определяется формулами Даламбера, Пуассона и Кирхгофа при размерности пространства 1, 2 и 3 соответственно. Решение волнового уравнения при любых правых частях и начальных условиях из класса обобщённых функций было предложено В.С. Владимировым [11, 12]. Здесь мы используем метод Владимирова для решения соответствующей задачи Коши для биволнового уравнения.

Для решения начально-краевых задач в данной работе разработан метод обобщённых функций (МОФ), основные идеи которого для классического волнового уравнения в пространствах размерности, не превосходящей трёх, изложены автором в работах [13, 14]. В основе МОФ лежит представление краевой задачи в пространстве обобщённых функций, что позволяет начальные и краевые условия перевести в правую часть дифференциальных уравнений с использованием сингулярных обобщённых функций – простых и двойных слоёв на границе области определения решения. Плотности этих слоёв определяются граничными значениями решения и его производных. Свойства фундаментального решения – функции Грина уравнения – дают возможность строить решение полученного уравнения в пространстве обобщённых функций в виде его свёртки с правой частью этого уравнения. Регулярное интегральное представление обобщённого решения даётся классическим решением краевой задачи, которое позволяет найти решение внутри области определения по его граничным значениям, часть которых известна, а часть подлежит определению. Эти формулы являются аналогом известной формулы Грина для уравнения Лапласа, которая по граничному значению и нормальной производной решения вычисляет его внутри области определения. Для определения неизвестных граничных функций, используя предельные свойства решения при приближении к границе области, строятся разрешающие граничные интегральные уравнения, как правило, сингулярные. Метод позволяет строить решения с учётом ударных волн, характерных для гиперболических уравнений, на фронтах которых производные терпят скачки. Этот метод используется в настоящей работе для построения обобщённых решений краевых задач и их интегральных представлений.

1. Взаимные биградиенты. Биволновое уравнение. Рассмотрим бикватернионное волновое уравнение вида

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B}+\mathbf{F}\circ\mathbf{B}=\mathbf{G}(\tau,x),\quad (\tau,x)\in\mathbb{M},\tag{1.1}$$

где $\mathbb{M}$ – пространство Минковского. Здесь и далее используем гамильтонову скалярно-векторную запись бикватернионов, употребляя для скаляра одноимённые строчные курсивные буквы, а для вектора – прописные буквы:

$$\mathbf{B}=b(\tau,x)+B(\tau,x),\quad \mathbf{G}=g(\tau,x)+G(\tau,x),$$

структурный коэффициент $\mathbf{F}$ – постоянный бикватернион. Предполагается, что $\mathbf{B}(\tau,x)$ и $\mathbf{G}(\tau,x)$ принадлежат пространству *обобщённых* бикватернионов $\mathbb{B}'(\mathbb{M})$ на $\mathbb{M}$. Под таковыми понимаем бикватернионы, компоненты которых принадлежат классу обобщённых функций медленного роста [12, § 8].

Дифференциальные бикватернионные операторы – *взаимные биградиенты* – имеют вид [14]

$$\nabla^{+}=\partial_\tau+i\nabla,\quad \nabla^{-}=\partial_\tau-i\nabla.\tag{1.2}$$

Их действие определяется согласно кватернионному умножению в алгебре бикватернионов:

$$\mathbf{F}\circ\mathbf{B}=(f+F)\circ(b+B)=(fb-(F,B))+(fB+bF+[F,B]),\tag{1.3}$$

где

$$(F,B)=\sum_{j=1}^{3}F_jB_j\quad\text{и}\quad [F,B]=\sum_{k,l,m=1}^{3}\varepsilon_{klm}F_kB_le_m$$

– это соответственно скалярное и векторное произведение указанных векторов, ε_{klm} – псевдотензор Леви–Чивиты, e_m – базисные элементы алгебры бикватернионов $(m=0,1,2,3)$. Согласно этому имеем

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B}\triangleq(\partial_\tau\pm i\nabla)\circ(b(\tau,x)+B(\tau,x))=(\partial_\tau b\mp i(\nabla,B)+\partial_\tau B\pm i(\nabla b+[\nabla,B])=$$

$$=(\partial_\tau b\mp i\operatorname{div}B)+\partial_\tau B\pm i\operatorname{grad}b\pm i\operatorname{rot}B$$

(соответственно верхнему и нижнему знакам).

Уравнение (1.1) относится к классу биволновых уравнений общего вида

$$\mathbf{A}\circ\nabla^{\pm}\mathbf{B}+\mathbf{C}\circ\mathbf{B}=\mathbf{H}(\tau,x),$$

которые приводятся к (1.1), если существует обратный бикватернион $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-}\circ\mathbf{A}/(a^2+(A,A)),$$

где $\mathbf{A}^{-}=a-A$ (*взаимный* бикватернион). В этом случае, умножая равенство (1.3) слева на $\mathbf{A}^{-1}$, получаем уравнение (1.1), в котором

$$\mathbf{F}=\mathbf{A}^{-1}\circ\mathbf{C},\quad \mathbf{G}=\mathbf{A}^{-1}\circ\mathbf{H}.$$

Введём также *сопряжённый* бикватернион: $\mathbf{A}^{*}=\bar{\mathbf{A}}^{-}$. Здесь и далее черта над символом означает комплексное сопряжение скалярной и векторной частей бикватерниона.

Ранее нами рассмотрены частные случаи, когда $\mathbf{F}$ скаляр или вектор. Уравнение (1.1) эквивалентно модифицированной системе уравнений Максвелла при $\mathbf{F}=0$, уравнениям Дирака при чисто мнимом $\mathbf{F} = i\rho$ (см. работы [15, 16]). В этих работах с использованием теории обобщённых функций построены элементарные и общие решения уравнения (1.1), описывающие нестационарные гармонические по времени и статические бикватернионные поля.

Построим обобщённые решения (1.1) при произвольной правой части $\mathbf{G}(\tau, x) \in \mathbb{B}'(\mathbb{M})$.

2. Взаимные МД-операторы и их свойства. Введём дифференциальные бикватернионные операторы

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+} = \nabla^{+} + \mathbf{F} = \nabla^{+} + f + F, \quad \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-} = \nabla^{-} + \mathbf{F}^{-} = \nabla^{-} + f - F, \tag{2.1}$$

свойствами которых будем пользоваться далее для решения поставленной задачи. В связи с изложенным выше назовём их *взаимными МД-операторами (операторами Максвелла–Дирака).* Используем далее обозначение для классического волнового оператора – даламбертиана:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta,$$

$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ – лапласиан.

Взаимные биградиенты и МД-операторы обладают полезными для приложений свойствами.

Лемма. *Взаимные биградиенты коммутируют между собой, и для их композиции имеет место равенство*

$$\nabla^{+}\nabla^{-} = \nabla^{-}\nabla^{+} = \Box.$$

МД-операторы коммутируют между собой, и для их композиции справедливо равенство

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+} \circ \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-} = \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-} \circ \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+} = \Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F, F) - 2i(F, \nabla).$$

Доказательство. Действительно, согласно определению (1.2), имеем

$$\nabla^{+}\nabla^{-} = (\partial_\tau + i\nabla) \circ (\partial_\tau - i\nabla) = \partial_\tau\partial_\tau - (\nabla, \nabla) - i\partial_\tau\nabla + i\partial_\tau\nabla - [\nabla, \nabla] = \nabla^{-} \circ \nabla^{+} = \Box.$$

Аналогично, воспользовавшись определением (2.1), получим

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+} \circ \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-} = \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-} \circ \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+} = (\nabla^{+} + f + F) \circ (\nabla^{-} + f - F) = \Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F, F) + 2i(F, \nabla).$$

Далее значок кватернионного умножения между операторами не пишем.

3. Ударные волны как обобщённые решения биволнового уравнения. Условия на фронтах. Рассмотрим решения уравнения (1.1) для верхнего знака биградиента:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+}\mathbf{B} = \mathbf{G}(\tau, x). \tag{3.1}$$

Решения для нижнего знака биградиента можно построить аналогично показанному ниже или просто используя операцию комплексного сопряжения.

Заметим, что в силу леммы биволновое уравнение (1.1) является гиперболическим и допускает решения, разрывные на характеристических поверхностях $F \subset \mathbb{M}$, нормаль к которым удовлетворяет характеристическому уравнению для волнового уравнения Даламбера:

$$n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 = 0. \tag{3.2}$$

Им соответствуют волновые фронты $F_\tau \subset \mathbb{R}^3$, распространяющиеся в направлении волнового вектора $n(\tau, x) = (n_1, n_2, n_3)$ со скоростью

$$v = -\frac{n_0}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 1.$$

Из равенства (3.2) следует, что поверхность $\tau = \mathrm{const}$ не может быть характеристической. Если волновой вектор нормировать:

$$\|n\| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 1,$$

то из этих равенств вытекает, что

$$n_0 = -1. \tag{3.3}$$

С учётом правил дифференцирования разрывных регулярных функций [12, § 6], действие биградиента на соответствующий бикватернион имеет вид

$$\nabla^+\hat{\mathbf{B}} = \nabla^+\mathbf{B} + \{n_0 + n\} \circ [\mathbf{B}(\tau, x)]_F \delta_F(\tau, x),$$

где $[\mathbf{B}]_F \delta_F(\tau, x)$ – простой слой на поверхности F, плотность которого равна скачку бикватерниона на F, т.е.

$$[\mathbf{B}]_F = \lim_{\varepsilon \to +0} \{\mathbf{B}(\tau + n_0\varepsilon, x + \varepsilon n) - \mathbf{B}(\tau - n_0\varepsilon, x - \varepsilon n)\}.$$

Следовательно, разрывные решения биволнового уравнения (1.1) должны удовлетворять следующему условию (*условие на фронтах ударных волн*):

$$\{n_0 + n\} \circ [\mathbf{B}(\tau, x)]_F = 0.$$

Раскрывая в этом равенстве скалярную и векторную части, с учётом равенства (3.3) получаем

$$[b(\tau, x)]_F + i(n(\tau, x), [B(\tau, x)]_F) = 0$$

и

$$[B(\tau, x)]_F = i\{n[b(\tau, x)]_F + [n, [B(\tau, x)]_F]\}.$$

Отсюда следует, что если $[b(\tau, x)]_F = 0$, то вектор $[B(\tau, x)]_F$ перпендикулярен фронту волны, т.е. если перед фронтом поле нулевое, то волна будет поперечной. Этот факт хорошо известен для электромагнитных волн, которые описываются чисто векторным бикватернионом с нулевой скалярной частью.

4. Построение решений МД-уравнения. Будем называть биволновое уравнение (1.1) *МД-уравнением*. Для построения его решений используем определение (2.1). В результате из (3.1) следует, что

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^- \mathbf{D}_\mathbf{F}^+ \mathbf{B} = \{\Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F, F) + 2i(F, \nabla)\}\mathbf{B} = \mathbf{D}_\mathbf{F}^- \mathbf{G} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{Q}.$$

Другими словами, каждая компонента бикватерниона $\mathbf{B}$ удовлетворяет скалярному уравнению

$$\Box u + 2f\partial_\tau u + 2i(F, \nabla u) + f^2 u + (F, F)u = q(\tau, x) \tag{4.1}$$

с соответствующей компонентой бикватерниона $\mathbf{Q}$ в правой части.

Заметим, что это уравнение, если положить $m^2 = f^2 + (F, F)$, содержит оператор Клейна–Гордона–Фока $(\Box + m^2)$, а также дополнительное слагаемое $2f\partial_\tau + 2i(F, \nabla)$. Если $f = ik$ – чисто мнимая величина, то в этом уравнении можно увидеть и оператор Шрёдингера $(2ik\partial_\tau - \Delta)$. Поэтому уравнение (4.1) называем КГФШ-*уравнением*.

Теорема 1. *Решение биволнового уравнения (1.1) можно представить в виде*

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_\mathbf{F}^-(\psi * \mathbf{G}) = \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\psi * \mathbf{G} + \mathbf{B}^0 = \psi * \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\mathbf{G} + \mathbf{B}^0, \tag{4.2}$$

здесь $\psi(\tau, x)$ *– фундаментальное решение уравнения (4.1) (при* $q = \delta(\tau)\delta(x)$*), а* $\mathbf{B}^0(\tau, x)$ *– решение однородного уравнения (3.1) (при* $\mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$*):*

$$\mathbf{B}^0 = \sum_{\psi^0} \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\psi^0 * \mathbf{C}^0 = \sum_{\psi^0} \psi^0 * \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\mathbf{C}^0 = \sum_{\psi^0} \mathbf{D}_\mathbf{F}^-(\psi^0 * \mathbf{C}^0), \tag{4.3}$$

где $\psi^0(\tau, x)$*– решения однородного уравнения (1.1) (при* $q = 0$*),* $\mathbf{C}^0 \in \mathbb{B}'(\mathbb{M})$ *– произвольные бикватернионы, допускающие такую свёртку.*

Доказательство. В силу линейности уравнения достаточно доказать утверждение для каждого слагаемого в формуле (4.1). Подставим первое слагаемое в уравнение (3.1) и, используя определение (2.1) и свойство дифференцирования свёртки, получим

$$\mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\mathbf{D}^+_{\mathbf{F}}(\psi * \mathbf{G}) = \{\Box\psi + 2f\partial_\tau\psi + f^2\psi + (F,F)\psi + 2i(F,\nabla\psi)\} * \mathbf{G} = \delta(\tau)\delta(x) * \mathbf{G} = \mathbf{G}.$$

Для каждого слагаемого второй суммы аналогично имеем равенства

$$\mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\mathbf{D}^+_{\mathbf{F}}(\psi^0 * \mathbf{C}^0) = \{\Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) + 2i(F,\nabla)\}\psi^0 * \mathbf{C}^0 = 0.$$

Очевидно, что в силу линейности уравнения (1.1) любое его решение можно представить в аналогичном виде. При этом в формулах (4.2) и (4.3) теоремы для построения решения можно брать любое из равенств в зависимости от удобства вычисления свёрток, что зависит от конкретного вида входящих в свёртку функций.

Следовательно, решение биволнового уравнения (3.1) определяется скалярными функциями $\psi(\tau,x)$ и $\psi^0(\tau,x)$ – решениями уравнения (4.1), которые будем называть *скалярными потенциалами* решений МД-уравнения.

5. Построение функции Грина МД-уравнения. Рассмотрим фундаментальные решения уравнения (1.1):

$$\nabla^\pm\mathbf{U} + \mathbf{F}\circ\mathbf{U} = \delta(\tau)\delta(x),$$

здесь справа сингулярные дельта-функции. Фундаментальные решения определяются с точностью до решений однородного биволнового уравнения (с нулевой правой частью).

Определение. Назовём *функцией Грина* фундаментальное решение уравнения (4.2), удовлетворяющее следующим условиям излучения:

$$\mathbf{U}(\tau,x) = 0 \ \text{ при } \ \tau < 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{U}(\tau,x) = 0 \ \text{ при } \ \|x\| > \tau.$$

Свойства фундаментальных решений позволяют строить частные решения уравнения (1.1) в виде функциональной свёртки

$$\mathbf{B} = \mathbf{G} * \mathbf{U} = (g+G)*(u+U) =$$

$$= \left\{g*u - \sum_{k=1}^{3} G_k * U_k\right\} + \left\{u*G + g*U + \sum_{j,k,l=1}^{3} \varepsilon_{jkl}e_j(G_k*U_l)\right\}, \tag{5.1}$$

где в правой части стоят покомпонентные свёртки, которые следует брать согласно правилам теории обобщённых функций [12, § 7]. Условия существования таких свёрток определяют класс бикватернионов в правой части (1.1), для которых решения уравнения существуют.

Используя формулу теоремы 1, построим фундаментальные решения уравнения (5.1):

$$\mathbf{U}(\tau,x) = \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}(\psi * \delta(\tau)\delta(x)) = \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\psi + \mathbf{B}^0 = \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\psi + \mathbf{B}^0. \tag{5.2}$$

Здесь мы использовали свойство свёрток с дельта-функцией: $\psi * \delta = \psi$.

6. Функция Грина КГФШ-уравнения. Для построения функции Грина биволнового уравнения найдём функцию Грина для КГФШ-уравнения, которая удовлетворяет уравнению

$$\Box\psi + 2f\partial_\tau u + 2i(F,\nabla\psi) + f^2\psi + (F,F)\psi = \delta(\tau)\delta(x) \tag{6.1}$$

и условиям излучения:

$$\psi(\tau,x) = 0 \ \text{ при } \ \tau < 0 \quad \text{и} \quad \psi(\tau,x) = 0 \ \text{ при } \ \|x\| > \tau.$$

Теорема 2. *Функция Грина уравнения (5.1) представима в виде*

$$\psi = \frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|), \tag{6.2}$$

где $\delta(\tau-\|x\|)$ *– сингулярная обобщённая функция – простой слой на световом конусе* $\|x\| = \tau$.

Доказательство. Для доказательства формулы (6.2) используем преобразование Фурье обобщённых функций. Далее переменные Фурье, соответствующие (τ, x), обозначаем (ω, ξ). Рассмотрим преобразование Фурье КГФШ-уравнения (6.1):

$$(\|\xi\|^2 - \omega^2 - 2if\omega + 2(F,\xi) + f^2 + (F,F))\bar{\psi}(\omega,\xi) = 1,$$

которое можно записать следующим образом:

$$\{(\xi + F, \xi + F) + (f - i\omega)^2\}\bar{\psi} = 1.$$

Откуда получим преобразование Фурье скалярного потенциала в виде

$$\bar{\psi}(\omega,\xi) = \frac{1}{(\xi + F, \xi + F) - (\omega + if)^2} \tag{6.3}$$

Для построения обратного преобразования Фурье воспользуемся фундаментальным решением уравнения Даламбера

$$\Box\, \chi = \delta(x,t),$$

удовлетворяющим условиям излучения. Это решение имеет вид

$$\chi(x,\tau) = \frac{1}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|).$$

Его преобразование Фурье равно следующей регуляризации функции $(\|\xi\|^2 - \omega^2)^{-1}$:

$$\mathrm{F}\left[\frac{1}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\right] = \frac{1}{\|\xi\|^2 - (\omega + i0)^2}. \tag{6.4}$$

Вследствие свойств сдвига преобразования Фурье из равенств (6.3) и (6.4) вытекает представление (6.2). Теорема доказана.

Заметим, что ψ – сингулярная обобщённая функция, носителем которой является трёхмерная расширяющаяся со временем сфера, т.е. сферическая расходящаяся волна, распространяющаяся в $\mathbb{R}^3$ с единичной скоростью (τ – время).

7. Функция Грина и решения МД-уравнения. Используя равенства (6.2) и (6.4), теперь можем дать представление функции Грина. Воспользовавшись формулой для обобщённого решения (5.2), получаем представление решения в виде

$$\mathbf{U}(\tau,x) = \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\right\} = (\partial_\tau - i\nabla + \mathbf{F}^-)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\right\} =$$

$$= (\partial_\tau - i\nabla)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\right\} + \left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\right\}\mathbf{F}^-,$$

где $\mathbf{F}^- = f - F$. Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Функция Грина МД-уравнения (1.1) имеет вид*

$$\mathbf{U} = (\partial_\tau - i\nabla)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\right\} + \left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\right\}\mathbf{F}^-,$$

а его общее решение представимо в виде

$$\mathbf{B} = \frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) * \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\mathbf{G} + \mathbf{B}^0, \tag{7.1}$$

где $\mathbf{B}^0$ *– решение однородного уравнения (1.1).*

При $\mathbf{B}^0 = 0$ это решение описывает расходящиеся волны, порождаемые источником $\mathbf{G}$. Для регулярных дифференцируемых бикватернионов

$$\mathbf{K}(\tau, x) = k(\tau, x) + K(\tau, x) = \mathbf{D}^-_{\mathbf{F}}\mathbf{G}(\tau, x) = (\partial_\tau - i\nabla)(g + G) + (f - F) \circ (g + G) =$$

$$= (\partial_\tau g + fg + (F, G) + i \operatorname{div} G) - i\nabla g + \partial_\tau G - i \operatorname{rot} G + fG - gF - [F, G]$$

формула (7.1) представляется в интегральном виде:

$$\mathbf{B}(\tau, x) = \frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) * (k + K) + \mathbf{B}^0 =$$

$$= \int\limits_{\|x-y\|<\tau} \frac{e^{-i(F,x-y)-\|x-y\|f}}{4\pi\|x - y\|}\mathbf{K}(y, \tau - \|x - y\|)\, dy_1\, dy_2\, dy_3 + \mathbf{B}^0.$$

Для сингулярных бикватернионов для вычисления свёрток следует использовать определение свёрток в пространстве обобщённых функций.

8. Задача Коши. Аналог формулы Кирхгофа. Так мы называем решение задачи Коши для биволнового уравнения, по аналогии с формулами Кирхгофа – представлением решений волнового уравнения при заданных начальных данных в трёхмерном пространстве [12, § 13, с. 233]. Здесь начальные условия имеют вид

$$\mathbf{B}(0, x) = \mathbf{B}0(x),$$

где бикватернион начальных данных $\mathbf{B}0(x)$ – регулярный бикватернион, компоненты которого принадлежат классу непрерывных дифференцируемых функций. Предположим, что его носитель ограничен:

$$\Omega_a = \operatorname{supp} \mathbf{B}0(x) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < a\}. \tag{8.1}$$

Требуется построить решение этой задачи, удовлетворяющее условию излучения:

$$\mathbf{B}(\tau, x) = 0 \quad \text{при} \quad \|x\| > \tau + a. \tag{8.2}$$

Для построения решения задачи Коши воспользуемся методом Владимирова [12, § 13, с. 229]. Рассмотрим уравнение (1.1) на пространстве обобщённых бикватернионов с носителем на положительной полуоси времени, которые представим в виде обобщённого бикватерниона

$$\hat{\mathbf{B}}(\tau, x) = \mathbf{B}(\tau, x)H(\tau),$$

где $\mathbf{B}(\tau, x)$ – решение задачи Коши, $H(\tau)$ – функция Хевисайда. В этом пространстве имеем

$$\nabla^+\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{F} \circ \hat{\mathbf{B}} = (\nabla^+\mathbf{B} + \mathbf{F} \circ \mathbf{B})H(\tau) + \mathbf{B}0(x)\delta(\tau) = \mathbf{G}(\tau, x)H(\tau) + \mathbf{B}0(x)\delta(\tau).$$

Используя свойство функции Грина, представим решение в виде свёртки функции Грина с правой частью:

$$\mathbf{B}(\tau, x) = \mathbf{U} * \mathbf{G}(\tau, x)H(\tau) + \mathbf{U} * \mathbf{B}0(x)\delta(\tau) = \mathbf{U} * \mathbf{G}(\tau, x)H(\tau) +$$

$$+ (\partial_\tau - i\nabla)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\right\} * \mathbf{B}0(x)\delta(\tau) + \left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|)\right\}\mathbf{F}^- * \mathbf{B}0(x)\delta(\tau) =$$

$$= \mathbf{U} * \mathbf{G}(\tau, x)H(\tau) + (\partial_\tau - i\nabla)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta_{S_\tau}(x) \underset{x}{*} \mathbf{B}0(x)\right\} = \hat{\mathbf{B}}_1(\tau, x) + \hat{\mathbf{B}}_2(\tau, x), \tag{8.3}$$

где $\delta_{S_\tau}(x)$ – простой слой на сфере S_τ радиуса τ и с центром в нуле, т.е. $S_\tau = \{x : \|x\| = \tau\}$. Здесь первое слагаемое в правой части имеет с учётом условий излучения вид

$$\hat{\mathbf{B}}_1(\tau, x) = \int\limits_{\|x-y\|<\tau} \frac{e^{-i(F,x-y)-\|x-y\|f}}{4\pi\|x-y\|}\mathbf{K}(y, \tau - \|x-y\|)\, dy_1\, dy_2\, dy_3.$$

Второе слагаемое $\hat{\mathbf{B}}_2(\tau, x)$, содержащее неполную свёртку только по x, представляется следующим образом:

$$\hat{\mathbf{B}}_2(\tau, x) = (\partial_\tau - i\nabla)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta_{S_\tau}(x) \underset{x}{*} \mathbf{B}0(x)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\partial_\tau(\delta_{S_\tau}(x) * \mathbf{B}0(x))\right\} - i\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta_{S_\tau}(x) \underset{x}{*} \nabla\mathbf{B}0(x)\right\} =$$

$$= \frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int\limits_{\|x-y\|\leqslant\tau} \mathbf{B}0(x-y)\, dy_1\, dy_2\, dy_3\right) - i\int\limits_{\|x-y\|=\tau} \frac{e^{-i(F,x-y)-f\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|}\nabla\mathbf{B}0(y)dS(y) =$$

$$= \frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\left(\int\limits_{\|x-y\|=\tau} b0(x-y) + B0(x-y)dS(y)\right) +$$

$$+ ie^{-i(F,x)}\int\limits_{\|x-y\|=\tau} \frac{e^{i(F,y)-f\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|}(\operatorname{div} B0(y) - \operatorname{rot} B0(y))dS(y).$$

Здесь интегралы поверхностные, берутся на сфере радиуса τ с центром в точке x.

Формулы (8.1)–(8.3) являются аналогом формулы Кирхгофа для биволнового уравнения (1.1). Они представляют решение задачи Коши для биволнового МД-уравнения.

9. Динамический аналог формулы Грина. Под таковым мы понимаем представление решения биволнового уравнения с нулевыми начальными данными в ограниченной открытой области $S^- \subset \mathbb{R}^3$ по его граничным значениям на границе S, по аналогии с представлением решений уравнения Лапласа по граничным значениям его решений и производных [12, § ??, с. ??]. Для этого используем характеристическую функцию этой области $H_S^-(x)$, функцию Хевисайда $H(\tau)$ и $H_S^-(x)H(\tau)$-характеристическую функцию пространственно-временно́го цилиндра $\mathrm{C}_+ = \{(\tau, x) \in \mathbb{M} : \tau \geqslant 0,\ \ x \in S^- + S\}$. Их обобщённые производные имеют вид

$$\partial_j H_S^-(x) = -n_j(x)\delta_S(x), \quad \partial_t H(t) = \delta(t),$$

$$\partial_j(H_S^-(x)H(t)) = -n_j(x)\delta_S(x)H(t), \quad \partial_t(H_S^-(x)H(t)) = H_S^-(x)\delta(t),$$

где сингулярная обобщённая функция $n_j(x)\delta_S(x)$ – простой слой на поверхности S, $n(x) = (n_1, n_2, n_3)$ – внешняя единичная нормаль на границе S.

Введём регулярный бикватернион

$$\hat{\mathbf{B}}(\tau, x) = \mathbf{B}(\tau, x)H_S^-(x)H(\tau),$$

равный решению $\mathbf{B}(\tau, x)$ этого уравнения с нулевыми начальными условиями в этой области с её границей, а вне их равный нулю. Обобщённые частные производные этого бикватерниона в $\mathbb{B}'(\mathbb{M})$ равны:

$$\partial_\tau\hat{\mathbf{B}}(\tau, x) = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\tau}H_S^-(x)H(\tau) + \mathbf{B}0H_S^-(x)\delta(\tau),$$

$$\partial_j\hat{\mathbf{B}}(\tau, x) = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x_j}H_S^-(x)H(\tau) - \mathbf{B}_S(\tau, x)n_j(x)\delta_S(x)H(\tau). \tag{9.1}$$

Здесь первые слагаемые справа – классические частные производные бикватерниона, $\mathbf{B}_S(\tau,x)$ – значения $\mathbf{B}(\tau,x)$ на S. С учётом представлений (9.1) и нулевых начальных условий ($\mathbf{B}0(x) = 0$) действие биградиента на этот бикватернион имеет вид

$$\nabla^+\hat{\mathbf{B}} = \{(\partial_\tau b - i\operatorname{div} B) + \partial_\tau B + i(\operatorname{grad} b + \operatorname{rot} B)\}H_S^-(x)H(\tau) + \\ + i\{(n(x),B) - bn(x) - [n(x),B]\}\delta_S(x)H(t). \tag{9.2}$$

Тогда действие МД-операторов на этот бикватернион в пространстве обобщённых бикватернионов, с учётом уравнения (1.1) и равенства (9.2), запишется следующим образом:

$$\mathbf{D}^+\hat{\mathbf{B}}(\tau,x) = \nabla^+\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{F}\circ\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{G}(\tau,x)H_S^-(x)H(\tau) + \\ + i\{(n(x),B_S) - b_S n(x) - [n(x),B_S]\}\delta_S(x)H(t).$$

Обозначим $\hat{\mathbf{G}}(\tau,x) = \mathbf{G}(\tau,x)H_S^-(x)H(\tau)$ и введём сингулярный граничный бикватернион

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}(\tau,x) = \mathbf{\Gamma}(\tau,x)(\tau,x)\delta_S(x)H(t) = i\{(n(x),B_S) - b_S n(x) - [n(x),B_S]\}\delta_S(x)H(t).$$

Здесь $\mathbf{\Gamma}(\tau,x)$ – плотность простого слоя на пространственно-временно́й цилиндрической поверхности: $\tau \geqslant 0$, $x\in S$. В результате приходим к уравнению

$$\mathbf{D}^+\hat{\mathbf{B}}(\tau,x) = \nabla^+\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{F}\circ\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{G}}(\tau,x) + \hat{\mathbf{\Gamma}}(\tau,x),$$

решение которого имеет вид бикватернионной свёртки правой части с функцией Грина:

$$\hat{\mathbf{B}}(\tau,x) = \mathbf{U}\circ\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{U}^+\circ\hat{\mathbf{G}}(\tau,x) + \mathbf{U}\circ\hat{\mathbf{\Gamma}}(\tau,x). \tag{9.3}$$

Первое слагаемое в правой части вычисляется по формуле

$$\hat{\mathbf{B}}_1(\tau,x) = \mathbf{U}*\hat{\mathbf{G}}(\tau,x) = (u+U)*(\hat{g}+\hat{G}) =$$

$$= \Big(u*\hat{g} - \sum_{k=1}^3 U_k*\hat{G}_k\Big) + \sum_{k=1}^3(u*\hat{G}_k + \hat{g}*U_k)e_k + \sum_{k=1}^3 e_k\sum_{l,m=1}^3\varepsilon_{klm}(U_l*\hat{G}_m),$$

где покомпонентные свёртки берутся согласно определению свёрток в пространстве обобщённых функций.

Для регулярных $\hat{\mathbf{G}}(\tau,x) = \mathbf{G}(\tau,x)$ они имеют следующее интегральное представление:

$$4\pi\mathbf{B}_1 = \mathbf{U}*\hat{\mathbf{G}}(\tau,x) = \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^-\Big\{\frac{e^{-(f\|x-y\|+i(F,x-y))}}{\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)*\hat{\mathbf{G}}\Big\} =$$

$$= \nabla^-\int\limits_{r(x,y)\leqslant\tau}\frac{e^{-(fr(x,y)+i(F,x-y))}}{r(x,y)}\mathbf{G}(\tau-r(x,y),y)H_S^-(y)\,dy_1\,dy_2\,dy_3 +$$

$$+\mathbf{F}^-\circ\int\limits_{r(x,y)\leqslant\tau}\frac{e^{-(fr(x,y)+i(F,x-y))}}{r(x,y)}\mathbf{G}(\tau-r(x,y),y)H_S^-(y)\,dy_1\,dy_2\,dy_3, \tag{9.4}$$

$r(x,y) = \|x-y\|$. Вычисляя второе слагаемое, получаем

$$4\pi\hat{\mathbf{B}}_2(\tau,x) = \mathbf{U}*\hat{\mathbf{\Gamma}}(\tau,x) =$$

$$= i\nabla^-\frac{e^{-(fr(x,y)+i(F,x-y))}}{\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)*((n(x),B_S) - b_S n(x) - [n(x),B_S])\delta_S(x)H(t) +$$

$$+ i\mathbf{F}^-\circ\Big\{\frac{e^{-(fr(x,y)+i(F,x-y))}}{\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)*\Big\}((n(x),B_S) - b_S n(x) - [n(x),B_S])\delta_S(x)H(t) =$$

$$= i\nabla^- \int\limits_S \frac{(n(y), B_S(\tau - r(x,y), y)) - b_S(\tau - r(x,y), y)n(y) - [n(x), B_S(\tau - r(x,y), y)]}{r(x,y)\exp(r(x,y)f + i(F, x-y))}\, dS(y) +$$

$$+ i\mathbf{F}^- \circ \int\limits_S \frac{i(n(y), B_S(\tau - r(x,y), y)) - b_S(\tau - r(x,y), y)n(y) - [n(x), B_S(\tau - r(x,y), y)]}{r(x,y)\exp(r(x,y)f + i(F, x-y))}\, dS(y).$$

Здесь вначале берём интегралы, а затем применяем МД-оператор к полученному бикватерниону.

Формулы (9.3), (9.4) представляют собой аналог формулы Грина. Они позволяют вычислить бикватернион внутри области по его граничным значениям. Заметим, что все интегралы и их производные существуют только при $x \notin S$. Для граничных точек сами интегралы являются слабо сингулярными и сходящимися, а вот их производные таковыми не являются. Здесь наблюдаются те же особенности, что и у решений волнового уравнения в трёхмерном пространстве [13].

Исследование интегральных представлений бикватерниона на границе позволяет получить граничные сингулярные интегральные уравнения для решений начально-краевых задач для биволновых уравнений и корректно поставить краевые условия на границе для построения их решений. Это можно сделать предельным переходом по $x \notin S$ в аналоге формулы Грина к границе S аналогично как для краевых задач для волнового уравнения [13].

Заключение. Используя построенные аналоги формулы Кирхгофа и Грина, можно получить аналоги формулы Грина при ненулевых начальных условиях, разлагая решение уравнения (1.1) на два бикватерниона, один из которых удовлетворяет начальным условиям, а другой – нулевым. Формулы (9.3), (9.4) дают его представление с учётом действующих источников. Условия на границе для второго бикватерниона получим, используя граничные значения исходного бикватерниона и учитывая поправки от первого построенного бикватерниона. После по этим формулам построим второй бикватернион.

Поскольку уравнения Максвелла и Дирака являются частным случаем биволновых уравнений, построенные решения могут использоваться для решения задач электродинамики и теории поля. Они могут применяться в экспериментах, так как полевые характеристики ЭМ-полей на границе можно измерить экспериментально, не решая сингулярные граничные интегральные уравнения.

Заметим также, что трансформация электрогравимагнитных (ЭГМ) зарядов и токов под действием внешних ЭГМ полей описывается бикватернионными дифференциальными уравнениями типа (1.1) (см. [17, 18]). Построенные здесь решения можно использовать для решения краевых задач в ЭГМ полях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант AP05132272, 2018–2020 гг.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hamilton W.R.* On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions // Proc. of the Royal Irish Academy. 1844. V. 2. P. 424–434.
2. *Edmonds J.D.* Eight Maxwell equations as one quaternionic // Amer. J. Phys. 1978. V. 46. № 4. P. 430.
3. *Шпилькер Г.Л.* Гиперкомплексные решения уравнений Максвелла // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 6. С. 1359–1363.
4. *Rodrigues W.A. Jr., Capelas de Oliviera E.* Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spinClifford bundles // Int. J. of Theor. Phys. 1990. V. 29. P. 379–412.
5. *Finkelstein D., Jauch J.M., Schiminovich S., Speiser D.* Foundations of quaternion quantum mechanics // J. Math. Phys. 1992. V. 3. P. 207–220.
6. *Adler S.L.* Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields. New York, 1995.
7. *De Leo S., Rodrigues W.A. Jr.* Quaternionic quantum mechanics: from complex to complexified quaternions // Int. J. Theor. Phys. 1997. V. 36. P. 2725–2757.

8. *Ефремов А.П.* Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. Т. 1. № 1. С. 111–127.
9. *Acevedo M., Lopez-Bonilla M.J., Sanchez-Meraz M.* Quaternions, Maxwell equations and Lorentz transformations // Apeiron. 2005. V. 12. № 4. P. 371.
10. *Марчук Н.Г.* Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. М., 2009.
11. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
13. *Алексеева Л.А.* Граничные интегральные уравнения начально-краевой задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 8. С. 1451–1453.
14. *Алексеева Л.А.* Метод обобщённых функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Мат. журн. 2006. Т. 6. № 1. С. 16–32.
15. *Alexeyeva L.A.* Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // Clifford Analysis, Clifford Algebras and Their Applications. 2012. V. 7. № 1. P. 19–39.
16. *Alexeyeva L.A.* Differential algebra of biquaternions. Dirac equations and its generalized solutions // Proc. of the 8th Congress of ISAAC. Moscow, Aug 22–27, 2011. Moscow, 2011. P. 153–161.
17. *Alexeyeva L.A.* Newton's laws for a biquaternionic model of the electro-gravimag-netic fields, charges, currents, and their interactions // J. of Phys. Math. 2009. V. 1. P. 15.
18. *Alexeyeva L.A.* Biquaternionic form of laws of electro-gravimagnetic charges and currents interactions // J. of Modern Phys. 2016. V. 7. P. 1351–1358.

Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан,
г. Алматы

Поступила в редакцию 14.08.2020 г.
После доработки 16.03.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.