ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 625–634

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУПОЛОСЕ С НЕГЛАДКОЙ БОКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2021 г. Е. А. Бадерко, С. И. Сахаров

Рассматривается первая начально-краевая задача для одномерной по пространственной переменной параболической по Петровскому системы второго порядка с дифференцируемыми коэффициентами, заданной в полуполосе с негладкой боковой границей. Доказана теорема о единственности классического решения этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064121050058

Введение. Работа посвящена исследованию единственности классического решения первой начально-краевой задачи для одномерной по пространственной переменной параболической по Петровскому (см. [1]) системы второго порядка с дифференцируемыми коэффициентами в полуполосе с негладкой боковой границей.

Хорошо известно (см., например, [2, 3]), что из принципа максимума вытекает единственность классического решения первой начально-краевой задачи для параболического уравнения. В [4] доказано, что для параболических систем, вообще говоря, принцип максимума места не имеет.

Из [5; 6, с. 706] следует единственность классического решения в пространстве Гёльдера $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$, первой начально-краевой задачи для параболической системы, если боковые границы криволинейной трапеции – достаточно гладкие кривые, а именно, принадлежат классу $H^{1+\alpha/2}$, т.е. функции, задающие указанные границы, обладают первой производной из пространства $H^{\alpha/2}[0,T]$.

Особый интерес указанная задача представляет в случае областей с негладкими боковыми границами, в частности, имеющими "клювы". В [7–9] (см. также [10–12]) установлены существование и единственность классического решения в пространстве $\underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega})$ первой начально-краевой задачи для параболических систем в криволинейной трапеции с боковыми границами, принадлежащими классу Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$.

Классическая разрешимость рассматриваемой задачи исследовалась также в топологически более слабых пространствах Дини–Гёльдера. В случае одного уравнения существование и единственность классического решения первой начально-краевой задачи в полуполосе с негладкой боковой границей хорошо известны. В [3, 13] установлены соответствующие теоремы при условии, что функция, задающая негладкую боковую границу, принадлежит пространству $H^{1/2+\omega}[0,T]$, здесь и до конца введения ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (определение см. в п.1).

В [14, 15] доказана теорема о существовании классического решения в пространстве $\underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega})$ первой начально-краевой задачи для параболической системы в полуполосе с негладкой боковой границей из класса $H^{1/2+\omega}$. Единственность полученного решения в этих работах не рассматривалась.

Естественно, возникает вопрос о исследовании единственности классического решения первой начально-краевой задачи в случае параболической системы в полуполосе с боковой границей из класса $H^{1/2+\omega}$. Отметим, что если не требовать, чтобы модуль непрерывности ω из определения класса $H^{1/2+\omega}$, которому по предположению должна принадлежать боковая граница, удовлетворял условию Дини, то, как показано в работах [16, 17], на ней могут появиться слишком узкие “клювы”, что может привести к неограниченному росту вблизи боковой границы первой производной решения по пространственной переменной. Таким образом, указанное условие на гладкость боковой границы является минимальным для исследования классической разрешимости параболических начально-краевых задач в классе $C^{1,0}(\overline{\Omega})$.

В настоящей работе устанавливается теорема о единственности классического решения первой начально-краевой задачи для параболических систем с дифференцируемыми коэффициентами в полуполосе с негладкой боковой границей из класса $H^{1/2+\omega}$ в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ с дополнительным ограничением на характер гладкости решения по временно́й переменной и на характер роста его второй производной по пространственной переменной вблизи боковой границы. При доказательстве используется метод, разработанный в [11].

Работа состоит из трёх пунктов. В первом пункте приводятся необходимые определения и формулируется основная теорема. Второй пункт посвящён построению матрицы Грина первой начально-краевой задачи. В третьем пункте доказывается основная теорема.

1. Необходимые сведения и формулировка основного результата. Пусть фиксировано положительное число T. Введём нужные в дальнейшем функциональные пространства. Через $C[\tau,T]$, $\tau\in[0,T)$, обозначим линейное нормированное пространство непрерывных вектор-функций (матриц) $\psi:[\tau,T]\to\mathbb{R}^m$, $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, с нормой $\|\psi;[\tau,T]\|^0:=\max\limits_{t\in[\tau,T]}|\psi(t)|$, а его подпространство, состоящее из вектор-функций (матриц), обращающихся при $t=\tau$ в нуль, через $\underset{0}{C}[\tau,T]$, т.е. $\underset{0}{C}[\tau,T]=\{\psi\in C[\tau,T]:\psi(\tau)=0\}$. Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под нормой $|a|$ (соответственно нормой $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Рассмотрим в полосе $D=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2: x\in\mathbb{R},\ t\in(0,T)\}$ некоторую область Ω такую, что $\overline{\Omega}\bigcap\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}\neq\varnothing$. Обозначим через $C(\overline{\Omega})$ линейное пространство непрерывных ограниченных вектор-функций (матриц) $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^m$ с нормой $\|u;\Omega\|^0:=\sup\limits_{(x,t)\in\Omega}|u(x,t)|$ и его подпространство $\underset{0}{C}(\overline{\Omega}):=\{u\in C(\overline{\Omega}):u(x,0)=0\}$. Определим также линейное нормированное пространство

$$C^{1,0}(\overline{\Omega}):=\{u\in C(\overline{\Omega}):\partial_x u\in C(\overline{\Omega})\}$$

с нормой $\|u;\Omega\|^{1,0}:=\sum_{l=0}^{1}\|\partial_x^l u;\Omega\|^0$ и его подпространство

$$\underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega}):=\{u\in C^{1,0}(\overline{\Omega}):\partial_x^l u\in \underset{0}{C}(\overline{\Omega}),\quad l=0,1\}.$$

Под значениями функций и их производных на границе области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω.

Функция $\nu(z)$, $z\geqslant 0$, называется *почти убывающей*, если при некоторой положительной постоянной C неравенство $\nu(z_1)\leqslant C\nu(z_2)$ выполняется для всех $z_1\geqslant z_2\geqslant 0$.

Следуя [18, с. 147], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, для которой $\omega(0)=0$. Заметим, что

$$\omega(|x|)\exp\{-|x|^2/t\}\leqslant C\omega(t^{1/2})\exp\{-c|x|^2/t\}$$

для некоторых положительных постоянных C, c и всех $x\in\mathbb{R}$ и $t>0$. Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если для него выполняется соотношение

$$\widetilde{\omega}(z):=\int\limits_0^z \omega(\xi)\xi^{-1}\,d\xi<+\infty,\quad z>0. \tag{1}$$

Через $\mathfrak{D}$ обозначим линейное пространство, состоящее из модулей непрерывности, которые удовлетворяют условию Дини (1). Если $\omega\in\mathfrak{D}$, то $\widetilde{\omega}$ – также модуль непрерывности, причём $\omega(z)\leqslant 2\widetilde{\omega}(z)$, $z\geqslant 0$. Кроме того, если ω – модуль непрерывности, то функция $\omega^*(z)=\omega(z^{1/2})$ также является модулем непрерывности, при этом если $\omega\in\mathfrak{D}$, то $\omega^*\in\mathfrak{D}$ и при $z\geqslant 0$ имеет место равенство $\widetilde{\omega^*}(z)=2\widetilde{\omega}(z^{1/2})$.

Зафиксируем некоторый модуль непрерывности ω. Введём следующие линейные нормированные пространства: $H^{q+\omega}[\tau,T]$, $q\in[0,1)$, – пространство вектор-функций (матриц) $\psi\in C[\tau,T]$, для которых

$$\|\psi;[\tau,T]\|^{q+\omega}:=\|\psi;[\tau,T]\|^0+\sup_{t,t+\Delta t\in(\tau,T)}\left\{\frac{|\Delta_t\psi(t)|}{|\Delta t|^q\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\}<\infty;$$

$\underset{0}{H}{}^{q+\omega}[\tau,T]:=\{\psi\in H^{q+\omega}[\tau,T]:\psi(0)=0\}$; $H^{\omega}(\overline{\Omega})$ – пространство вектор-функций (матриц) $u\in C(\overline{\Omega})$ таких, что

$$\|u;\Omega\|^{\omega}:=\|u;\Omega\|^0+\sup_{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega}\left\{\frac{|\Delta_{x,t}u(x,t)|}{\omega(|\Delta x|+|\Delta t|^{1/2})}\right\}<\infty;$$

$\underset{0}{H}{}^{\omega}(\overline{\Omega}):=\{u\in H^{\omega}(\overline{\Omega}):u(x,0)=0\}$; $\underset{0}{H}{}^{1,\omega}(\overline{\Omega})$ – пространство вектор-функций (матриц) $u\in \underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega})$, для которых

$$\|u;\Omega\|^{1,\omega}:=\|u;\Omega\|^{1,0}+\sup_{(x,t)(x,t+\Delta t)\in\Omega}\left\{\frac{|\Delta_t u(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\}+$$
$$+\sup_{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega}\left\{\frac{|\Delta_{x,t}\partial_x u(x,t)|}{\omega(|\Delta x|+|\Delta t|^{1/2})}\right\}<\infty.$$

Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t)\equiv(\partial_t^{1/2}\psi)(t):=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t(t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)\,d\tau,\quad t\in[0,T],$$

– оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя [8, 14, 15], введём линейные нормированные пространства

$$\underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]:=\{\psi\in \underset{0}{C}[0,T]:\partial^{1/2}\psi\in \underset{0}{C}[0,T]\}$$

с нормой $\|\psi;[0,T]\|^{1/2}:=\|\psi;[0,T]\|^0+\|\partial^{1/2}\psi;[0,T]\|^0$ и

$$\underset{0}{C}{}^{1/2,\omega}[0,T]:=\{\psi\in \underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]:\partial^{1/2}\psi\in \underset{0}{H}{}^{\omega}[0,T]\}$$

с нормой $\|\psi;[0,T]\|^{1/2,\omega}:=\|\psi;[0,T]\|^0+\|\partial^{1/2}\psi;[0,T]\|^{\omega}$.

Замечание 1. Если $\psi\in \underset{0}{H}{}^{1/2+\omega}[0,T]$, где $\omega\in\mathfrak{D}$, то $\psi\in \underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$ (см. [19]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [8]).

В полосе D рассмотрим равномерно параболический по Петровскому (см. [1]) оператор

$$Lu:=\partial_t u-\sum_{l=0}^{2}A_l(x,t)\partial_x^l u,\quad u=(u_1,\ldots,u_m)^{\mathrm{т}},\quad m>1,$$

где $A_l=\|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m$ – $m\times m$-матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определённые в $\overline{D}$ и удовлетворяющие следующим условиям:

(a) собственные числа μ_r матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\operatorname{Re}\mu_r\geqslant\delta$ для некоторого $\delta>0$ и всех $(x,t)\in\overline{D}$, $r=\overline{1,m}$;

(b) имеют место включения $a_{ijl}\in H^{\omega_0}(\overline{D})$, $i,j=\overline{1,m}$, $l=0,1,2$, где ω_0 – модуль непрерывности такой, что

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z)=\int\limits_0^z y^{-1}\,dy\int\limits_0^y\omega_0(\xi)\xi^{-1}\,d\xi<+\infty,\quad z>0,$$

и для некоторого $\varepsilon_0\in(0,1)$ функция $\omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z>0$, почти убывает.

Известно (см. [20]), что при выполнении условий (a) и (b) у системы $Lu = 0$ существует фундаментальная матрица решений (ф.м.р.) $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D} \times \overline{D}$, $t > \tau$, и справедливы оценки

$$|\partial_t^k \partial_x^l \Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2} \exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \tag{2}$$

$2k + l \leqslant 2$, $(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D} \times \overline{D}$, $t > \tau$.

Далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от числа T, размерности m, коэффициентов оператора L и кривой Σ, определяемой ниже.

В полосе D выделяется полуполоса $\Omega = \{(x,t) \in D : x > g(t)\}$ с негладкой, вообще говоря, боковой границей $\Sigma = \{(x,t) \in \overline{\Omega} : x = g(t)\}$, причём функция g удовлетворяет условию

$$g \in H^{1/2+\omega_1}[0,T], \tag{3}$$

где $\omega_1 \in \mathfrak{D}$ и для некоторого $\varepsilon_1 \in (0,1)$ функция $\omega_1(z)z^{-\varepsilon_1}$, $z > 0$, почти убывает.

В области Ω рассмотрим первую начально-краевую задачу

$$Lu = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u(x,0) = 0, \quad x \geqslant g(0), \quad u|_\Sigma = \psi. \tag{4}$$

Известна следующая

Теорема 1 [14, 15]. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия (a), (b) и для функции g, задающей кривую Σ, – условие (3). Тогда для любой вектор-функции $\psi \in \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ классическим решением задачи (4) является потенциал простого слоя*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \Gamma(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{5}$$

где $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ – единственное в $C[0,T]$ решение граничного интегрального уравнения Вольтерры первого рода

$$\int\limits_0^t \Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \psi(t), \quad t \in [0,T].$$

Решение (5) обладает свойствами

$$u, \partial_x u \in \underset{0}{C}(\overline{\Omega}),$$

$$|\Delta_t u(x,t)| \leqslant C|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t) \in \overline{\Omega}.$$

Если, кроме того, $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2,\omega_2}[0,T]$, где ω_2 – модуль непрерывности, для которого существует $\varepsilon_2 \in (0,1)$ такое, что функция $\omega_2(z)z^{-\varepsilon_2}$, $z > 0$, почти убывает, то выполнена оценка

$$|\partial_x^2 u(x,t)| \leqslant C\|\psi;[0,T]\|^{1/2,\omega_2}\omega_3(d(x,t))d^{-1}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega,$$

где $d(x,t) := |x - g(t)|$, $\omega_3 = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1 + \omega_2$.

Далее предполагаем, что для коэффициентов оператора L выполнено дополнительно условие

(c) справедливы включения $\partial_x^k a_{ijl} \in H^{\omega_0}(\overline{D})$, $i,j = \overline{1,m}$, $l = 0,1,2$, $0 \leqslant k \leqslant l$.

Основное содержание настоящей работы составляет следующая

Теорема 2. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия (a)–(c) и для функции g, задающей кривую Σ, – условие (3). Пусть, кроме того, вектор-функция $u \in \in C^{2,1}(\Omega) \bigcap C^{1,0}(\overline{\Omega})$ – решение задачи*

$$Lu = 0 \ \textit{ в } \ \Omega, \quad u(x,0) = 0, \quad x \geqslant g(0), \quad u|_\Sigma = 0,$$

удовлетворяет неравенствам

$$|\Delta_t u(x,t)| \leqslant C|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t) \in \overline{\Omega}, \tag{6}$$

и

$$|\partial_x^2 u(x,t)| \leqslant C\omega(d(x,t))d^{-1}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{7}$$

где ω *– некоторый модуль непрерывности. Тогда* $u \equiv 0$ *в* $\overline{\Omega}$.

2. Матрица Грина первой начально-краевой задачи. Для любого промежутка $\langle \tau, \eta \rangle$, $\tau, \eta \in [0,T]$, $\tau < \eta$, обозначим $\Omega_{\langle \tau,\eta \rangle} := \{(x,t) \in \Omega : t \in \langle \tau, \eta \rangle\}$. Построим матрицу Грина задачи (4), а именно, матрицу

$$G(x,t;\xi,\tau) = \Gamma(x,t;\xi,\tau) - v(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t) \in \Omega_{(\tau,T]}, \quad (\xi,\tau) \in \Omega,$$

где Γ – ф.м.р. системы $Lu = 0$, а матрица $v(x,t;\xi,\tau)$ для любой фиксированной точки $(\xi,\tau) \in \Omega$ является решением первой начально-краевой задачи

$$Lv(\cdot\,;\xi,\tau) = 0 \ \text{ в } \ \Omega_{(\tau,T]}, \tag{8}$$

$$v(\cdot\,;\xi,\tau) = 0 \ \text{ в } \ \overline{\Omega} \bigcap \{t = \tau\}, \tag{9}$$

$$v(\cdot\,;\xi,\tau) = \Psi(\cdot\,;\xi,\tau) \ \text{ на } \ \Sigma \bigcap \{\tau \leqslant t \leqslant T\}, \tag{10}$$

где $\Psi(t;\xi,\tau) = \Gamma(g(t),t;\xi,\tau)$, $t \in (\tau,T]$, $\Psi(t;\xi,\tau) = 0$, $t = \tau$.

Замечание 2. В частном случае, когда $\omega_1(x) = x^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, для систем с постоянными коэффициентами матрица Грина построена в [11].

Лемма. *Матрица* $\Psi(t;\xi,\tau)$ *обладает следующими свойствами:*

$$\Psi(\cdot\,;\xi,\tau) \in H^{1/2+\omega_1}[\tau,T], \quad \Psi(\tau+0;\xi,\tau) = 0,$$

$$\|\Psi(\cdot\,;\xi,\tau);[\tau,T]\|^{1/2+\omega_1} \leqslant C(\xi,\tau) \tag{11}$$

для любых $(\xi,\tau) \in \Omega$, *где* ω_1 *– модуль непрерывности из условия (3), а* $C(\xi,\tau)$ *– положительная постоянная, зависящая только от* ξ *и* τ.

Доказательство. В силу оценок (2), условия (3) и неравенств

$$\xi > g(\tau) \quad \text{и} \quad (a-b)^2 \geqslant a^2/2 - 2b^2, \quad a,b \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

получаем

$$|\Psi(t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-1/2}\exp\{-c(g(t)-\xi)^2/(t-\tau)\} \leqslant C(t-\tau)^{-1/2}\exp\{-c(g(\tau)-\xi)^2/(t-\tau)\}.$$

Следовательно, имеет место оценка

$$|\Psi(t;\xi,\tau)| \leqslant C(\xi,\tau)\exp\{-c(\xi,\tau)/(t-\tau)\}, \quad \tau < t \leqslant T, \tag{13}$$

в которой $c(\xi,\tau)$ – положительная постоянная, зависящая только от ξ и τ.

Поэтому $\lim\limits_{t\to\tau+0} \Psi(t;\xi,\tau) = 0$, а значит, справедливо включение $\Psi(\cdot\,;\xi,\tau) \in \underset{0}{C}[\tau,T]$ с оценкой $|\Psi(t;\xi,\tau)| \leqslant C(\xi,\tau)$.

Докажем включение $\Psi(\cdot\,;\xi,\tau) \in H^{1/2+\omega_1}[\tau,T]$. Проверим, что

$$|\Delta_t \Psi(t;\xi,\tau)| \leqslant C(\xi,\tau)(|\Delta t|)^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t+\Delta t \in (\tau,T]. \tag{14}$$

Не ограничивая общности, считаем $\Delta t > 0$. В случае $\Delta t \geqslant t - \tau$ оценка (14) непосредственно следует из (13). В случае $\Delta t < t - \tau$, используя оценки (2), условие (3) и неравенства (12), находим

$$|\Delta_t \Psi(t;\xi,\tau)| \leqslant C\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-1} + (\Delta t)(t-\tau)^{-3/2}\}\exp\{-c(g(\tau)-\xi)^2/(t-\tau)\} \leqslant$$
$$\leqslant C(\xi,\tau)(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2}),$$

откуда вытекает оценка (14), переходя в которой к пределу при $t \to \tau + 0$, окончательно получаем доказываемое включение с оценкой (11). Лемма доказана.

Из леммы и теоремы 1 следует, что решением задачи (8)–(10) является потенциал простого слоя

$$v(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} \Gamma(x,t;g(\eta),\eta)\varphi(\eta;\xi,\tau)\,d\eta, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_{(\tau,T)}, \tag{15}$$

где матричная плотность $\varphi(\cdot\,;\xi,\tau)$ принадлежит пространству $H^{\omega_4}[\tau,T]$, $\omega_4 = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1$, и является единственным в $C[\tau,T]$ решением интегрального уравнения Вольтерры первого рода

$$\int\limits_{\tau}^{t} \Gamma(g(t),t;g(\eta),\eta)\varphi(\eta)\,d\eta = \Psi(t;\xi,\tau), \quad t \in [\tau,T],$$

причём $\varphi(\tau+0;\xi,\tau) = 0$ для любых $(\xi,\tau) \in \Omega$. Кроме того (см. [20, 21]), матрица (15) принадлежит пространству $\underset{0}{H}{}^{1,\omega_4}(\overline{\Omega})$ и для неё справедливы оценки

$$|\partial_x^l v(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\xi,\tau)\exp\{-c(x-g(t))^2/(t-\tau)\}, \quad (x,t) \in \Omega_{(\tau,T]}, \quad l = 0,1;$$

$$|\partial_x^2 v(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\xi,\tau)\,d^{-1}(x,t)\,\omega_4(d(x,t)), \quad (x,t) \in \Omega_{(\tau,T)}.$$

3. Доказательство теоремы единственности. Для оператора L рассмотрим сопряжённый к нему оператор L^*, определяемый формулой (см. [22, с. 318])

$$L^*u = \partial_t u + \sum_{l=0}^{2}(-1)^l\partial_x^l(A_l^{\mathrm{T}}(x,t)u) \equiv \partial_t u + A_2^{\mathrm{T}}(x,t)\partial_x^2 u +$$

$$+ [2\partial_x A_2^{\mathrm{T}}(x,t) - A_1^{\mathrm{T}}(x,t)]\partial_x u + [\partial_x^2 A_2^{\mathrm{T}}(x,t) - \partial_x A_1^{\mathrm{T}}(x,t) + A_0^{\mathrm{T}}(x,t)]u,$$

где A_l^{T} – транспонированная по отношению к A_l матрица, $l = 0,1,2$. Из результатов п. 2 следует, что можно построить матрицу Грина $G^*(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t) \in \Omega_{[0,\tau)}$, $(\xi,\tau) \in \Omega$, задачи

$$L^*u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u(x,T) = 0, \quad x \geqslant g(T), \quad u|_\Sigma = \psi,$$

а именно, функцию

$$G^*(x,t;\xi,\tau) = \Gamma^*(x,t;\xi,\tau) - v^*(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t) \in \Omega_{[0,\tau)}, \quad (\xi,\tau) \in \Omega,$$

где Γ^* – ф.м.р. системы $L^*u = 0$, а матрица $v^*(x,t;\xi,\tau)$ для любой фиксированной точки $(\xi,\tau) \in \Omega$ является решением первой начально-краевой задачи

$$L^*v^*(\cdot\,;\xi,\tau) = 0 \ \text{ в } \ \Omega_{[0,\tau)},$$

$$v^*(\cdot\,;\xi,\tau) = 0 \ \text{ в } \ \overline{\Omega}\bigcap\{t=\tau\},$$

$$v^*(\cdot\,;\xi,\tau) = \Psi^*(\cdot\,;\xi,\tau) \ \text{ на } \ \Sigma\bigcap\{0 \leqslant t \leqslant \tau\},$$

где $\Psi^*(t;\xi,\tau) = \Gamma^*(g(t),t;\xi,\tau)$, $t \in [0,\tau)$, $\Psi^*(t;\xi,\tau) = 0$, $t = \tau$.

Известно (см. [22, с. 319]), что $\Gamma^*(x,t;\xi,\tau) = \Gamma^{\mathrm{T}}(\xi,\tau;x,t)$, где Γ – ф.м.р. системы $Lu = 0$. Поэтому из оценок (2) вытекают неравенства

$$|\partial_t^k\partial_x^l\Gamma^*(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\tau-t)^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(\tau-t)\}, \tag{16}$$

в которых $2k+l \leqslant 2$, $(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D}\times\overline{D}$, $t < \tau$.

Из результатов п. 2 следует, что для любых (ξ,τ) имеет место включение

$$v^*\in \underset{0}{H}^{1,\omega_4}(\overline{\Omega}_{[0,\tau)}),\tag{17}$$

где $\omega_4=\widetilde{\widetilde{\omega}}_0+\widetilde{\omega}_1$, и выполнены оценки

$$|\partial_x^l v^*(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(\xi,\tau)\exp\{-c(x-g(t))^2/(\tau-t)\},\quad (x,t)\in\Omega_{[0,\tau)},\quad l=0,1,\tag{18}$$

$$|\partial_x^2 v^*(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(\xi,\tau)d^{-1}(x,t)\omega_4(d(x,t)),\quad (x,t)\in\Omega_{(0,\tau)}.\tag{19}$$

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем произвольно выбранную точку $(\xi,\tau)\in\Omega$ и докажем, что $u(\xi,\tau)=0$.

Пусть $\varepsilon\in(0,\tau)$ – произвольное фиксированное число. Положим

$$G^*(x,t)=G^*(x,t;\xi,\tau),\quad \hat G(x,t)=(G^*)^{\mathrm{т}}(x,t),\quad v^*(x,t)=v^*(x,t;\xi,\tau).$$

Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям теоремы 2. Справедливо тождество

$$0=\hat G(x,t)Lu(x,t)+(L^*G^*)^{\mathrm{т}}(x,t)u(x,t)=\partial_t[\hat G(x,t)u(x,t)]-\partial_x[\hat G(x,t)A_2(x,t)\partial_x u(x,t)-$$

$$-(\partial_x\hat G(x,t))A_2(x,t)u(x,t)-\hat G(x,t)(\partial_x A_2(x,t))u(x,t)+\hat G(x,t)A_1(x,t)u(x,t)],$$

в силу которого для любых $\varepsilon\in(0,\tau)$ и $M>\max\{\max\limits_{[0,T]}|g|,|\xi|\}$ имеет место равенство

$$0=\int\limits_0^{\tau-\varepsilon}dt\int\limits_{g(t)}^{2M}\{\partial_t[\hat G(x,t)u(x,t)]\}\,dx-\int\limits_0^{\tau-\varepsilon}dt\int\limits_{g(t)}^{2M}\partial_x[\hat G(x,t)A_2(x,t)\partial_x u(x,t)-$$

$$-(\partial_x\hat G(x,t))A_2(x,t)u(x,t)-\hat G(x,t)(\partial_x A_2(x,t))u(x,t)+\hat G(x,t)A_1(x,t)u(x,t)]\,dx\equiv$$

$$\equiv P(\varepsilon,M)-Q(\varepsilon,M),\tag{20}$$

где

$$P(\varepsilon,M)=\int\limits_0^{\tau-\varepsilon}dt\int\limits_{g(t)}^{2M}\{\partial_t[\hat G(x,t)u(x,t)]\}\,dx.$$

Рассмотрим вектор-функцию $P(\varepsilon,M)$. Только в доказательстве теоремы 2 примем обозначение

$$\|u\|:=\sum_{l\leqslant1}\sup_{\Omega}|\partial_x^l u|+\sup_{\Omega}\{|\Delta_t u||\Delta t|^{-1/2}\}+\sup_{\Omega}\{|\partial_x^2u|d(x,t)\omega^{-1}(d(x,t))\}.$$

Положим $h(x,t)=\hat G(x,t)u(x,t)$, если $x\geqslant g(t)$, и $h(x,t)=0$, если $x<g(t)$. Заметим, что $\partial_t h(z,t)|_{z=g(t)}=0,\ \ 0\leqslant t\leqslant\tau-\varepsilon$.

Действительно, при $g(t)<g(t+\Delta t)$ из определения функции h следует равенство

$$h(g(t),t+\Delta t)-h(g(t),t)=0.$$

В случае $g(t)\geqslant g(t+\Delta t)$ в силу оценок (6), (16), (19) и включения (17) находим

$$|h(g(t),t+\Delta t)-h(g(t),t)|=|\hat G(g(t),t+\Delta t)u(g(t),t+\Delta t)|=$$

$$=|\hat G(g(t),t+\Delta t)-\hat G(g(t),t)||u(g(t),t+\Delta t)-u(g(t),t)|\leqslant C(\varepsilon)\|u\||\Delta t|\omega_4(|\Delta t|^{1/2}).$$

Поэтому существует вектор-функция $f(x,t) \equiv \partial_t h(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \tau - \varepsilon]$. Заметим, что f непрерывна на $\mathbb{R} \times [0, \tau - \varepsilon]$. В самом деле, достаточно проверить, что

$$\lim_{(x,t)\to(g(t_0),t_0)} f(x,t) = f(g(t_0), t_0) = 0, \quad (x,t) \in \Omega, \quad t_0 \in [0, \tau - \varepsilon]. \tag{21}$$

По теореме о среднем в силу условий на гладкость вектор-функции u и соотношений (7), (16)–(19) получаем при x, достаточно близких к $g(t)$, неравенства

$$|[\partial_t \hat{G}(x,t)]u(x,t)| = |\partial_t \hat{G}(x,t)||u(x,t) - u(g(t),t)| \leqslant C(\varepsilon)\|u\|\omega_4(d(x,t)), \quad t \in [0, \tau - \varepsilon],$$

$$|\hat{G}(x,t)\partial_t u(x,t)| = |\hat{G}(x,t) - \hat{G}(g(t),t)||\partial_t u(x,t)| \leqslant C(\varepsilon)\|u\|\omega(d(x,t)), \quad t \in [0, \tau - \varepsilon].$$

Следовательно, $f(x,t) \to 0 = f(g(t),t)$ при $x \to g(t) + 0$ для любого $t \in [0, \tau - \varepsilon]$. Отсюда и из равенства $f(x,t) - f(g(t_0), t_0) = f(x,t) - f(g(t),t)$ вытекает соотношение (21). Поэтому $f \in C\{[-2M, 2M] \times [0, \tau - \varepsilon]\}$. Тогда

$$P(\varepsilon, M) = \int\limits_0^{\tau-\varepsilon} dt \int\limits_{-2M}^{2M} f(x,t)\,dx = \int\limits_0^{\tau-\varepsilon} dt \int\limits_{-2M}^{2M} \partial_t h(x,t)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\tau-\varepsilon} dt\{\partial_t \int\limits_{-2M}^{2M} h(x,t)\,dx\} = \int\limits_{-2M}^{2M} h(x, \tau - \varepsilon)\,dx - \int\limits_{-2M}^{2M} h(x,0)\,dx = \int\limits_{-2M}^{2M} h(x, \tau-\varepsilon)\,dx.$$

Положим $\hat{u}(x,t) = u(x,t)$, если $x \geqslant g(t)$, и $\hat{u}(x,t) = 0$, если $x < g(t)$. Тогда при $M \to +\infty$ получаем, что

$$P(\varepsilon, M) = \int\limits_{-2M}^{2M} \hat{G}(x, \tau-\varepsilon)\hat{u}(x, \tau-\varepsilon)\,dx \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}(x, \tau-\varepsilon)\hat{u}(x, \tau-\varepsilon)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\Gamma(\xi, \tau; x, \tau - \varepsilon) - (v^*)^{\mathrm{T}}(x, \tau-\varepsilon)]\hat{u}(x, \tau-\varepsilon)\,dx.$$

При $\varepsilon \to +0$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\xi, \tau; x, \tau-\varepsilon)\hat{u}(x, \tau-\varepsilon)\,dx \to \hat{u}(\xi, \tau) = u(\xi, \tau),$$

и в силу условий на гладкость вектор-функции u и оценок (18)

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (v^*)^{\mathrm{T}}(x, \tau-\varepsilon)\hat{u}(x, \tau-\varepsilon)\,dx\right| \leqslant C\|u\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-c\frac{(x-g(t))^2}{\varepsilon}\right\}dx = C\|u\|\sqrt{\varepsilon} \to 0,$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{M\to+\infty} P(\varepsilon, M) = u(\xi, \tau). \tag{22}$$

Рассмотрим вектор-функцию $Q(\varepsilon, M)$. Для неё справедливо равенство

$$Q(\varepsilon, M) = \int\limits_0^{\tau-\varepsilon} [\hat{G}(2M,t)A_2(2M,t)\partial_x u(2M,t) - (\partial_x \hat{G}(2M,t))A_2(2M,t)u(2M,t) -$$

$$- \hat{G}(2M,t)(\partial_x A_2(2M,t))u(2M,t) + \hat{G}(2M,t)A_1(2M,t)u(2M,t)]\,dt.$$

Из оценок (2), (18) и условий на гладкость вектор-функции u следует, что

$$|Q(\varepsilon, M)| \leqslant C\|u\| \int\limits_0^{\tau-\varepsilon} \sum_{l=0}^{1} [|\partial_x^l \Gamma(2M, t; \xi, \tau)| + |\partial_x^l v^*(2M, t)|]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C(\varepsilon)\|u\| \int\limits_0^{\tau-\varepsilon} \exp\left\{-c\frac{M^2}{T}\right\} dt \to 0$$

при $M \to +\infty$, а значит,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{M\to+\infty} Q(\varepsilon, M) = 0. \tag{23}$$

Из соотношений (20), (22), (23) вытекает нужное равенство

$$0 = \lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{M\to+\infty} [P(\varepsilon, M) - Q(\varepsilon, M)] = u(\xi, \tau).$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. A. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
2. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3 (105). С. 3–146.
3. *Камынин Л.И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. № 4. С. 806–834.
4. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Мат. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4 (12). С. 458–480.
5. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 83. С. 3–163.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
7. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
8. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
9. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2020. Т. 494. № 1. С. 5–8.
10. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболических систем на плоскости в модельном случае // Докл. РАН. 2018. Т. 483. № 3. С. 247–249.
11. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения первой начально краевой задачи для параболических систем с постоянными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 673–682.
12. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Uniqueness of a solution in a Hölder class to the first initial boundary value problem for a parabolic system in a bounded nonsmooth domain in the plane // J. of Math. Sci. 2020. V. 251. № 5. P. 557–572.
13. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
14. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Задача Дирихле для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами на плоскости // Докл. РАН. 2017. Т. 476. № 1. С. 7–10.
15. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Appl. Anal. 2019. https://doi.org/10.1080/00036811.2019.1698733.

16. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальная регулярность (в смысле Липшица) решений параболического уравнения 2-го порядка вблизи боковой части параболической границы // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 4. С. 785–788.
17. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16. № 6. С. 1172–1187.
18. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
19. *Камынин Л.И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гельдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
20. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294–В92.
21. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Smoothness in the Dini space of a single layer potential for a parabolic system in the plane // J. Math. Sci. 2018. V. 235. № 2. P. 154–167.
22. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 02.03.2021 г.
После доработки 02.03.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.