ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 635–648

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:536.24

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ

© 2021 г. Р. В. Бризицкий, В. С. Быстрова, Ж. Ю. Сарицкая

Доказывается глобальная разрешимость краевых задач для уравнения реакции–диффузии–конвекции в случае, когда коэффициент реакции в уравнении и коэффициент массообмена в граничном условии нелинейно зависят от концентрации вещества. Устанавливается принцип минимума и максимума для концентрации. В общем виде доказывается разрешимость задач мультипликативного управления. В случае, когда функционалы качества и зависящие от решения коэффициенты модели дифференцируемы по Фреше, для экстремальных задач выводятся системы оптимальности и устанавливается наличие принципа bang-bang.

DOI: 10.31857/S037406412105006X

1. Введение. Разрешимость краевой задачи. Интерес к исследованию краевых задач и задач управления как для линейных, так и для нелинейных моделей массо- и теплопереноса не ослабевает на протяжении достаточно длительного периода (см., например, [1–11]). Отметим, что приложения задач управления не ограничиваются поиском эффективных механизмов управления физическими полями. В рамках оптимизационного подхода к задачам мультипликативного управления сводятся обратные коэффициентные задачи, которые заключаются в восстановлении неизвестных коэффициентов в уравнениях и граничных условиях рассматриваемых моделей по дополнительной информации о решении краевых задач (см. [9, 11]).

Настоящая работа является продолжением и обобщением некоторых результатов [10–12] по исследованию краевых и экстремальных задач для полулинейных уравнений реакции–диффузии–конвекции. В отличие от [10–12] в данной статье рассматривается случай, когда от решения краевой задачи зависят коэффициенты как в уравнении, так и в граничном условии рассматриваемой модели.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ, содержащей две части Γ_D и Γ_N, рассматривается следующая краевая задача для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции:

$$-\operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi) + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + k(\varphi,\mathbf{x})\varphi = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$\varphi = \psi \quad \text{на} \quad \Gamma_D, \qquad \lambda(\mathbf{x})(\partial\varphi/\partial n + \alpha(\varphi,\mathbf{x})\varphi) = \chi \quad \text{на} \quad \Gamma_N. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x} \in \Omega$ и физический смысл входящих в задачу (1), (2) величин следующий: искомая функция φ имеет смысл концентрации загрязняющего вещества, $\mathbf{u}$ – заданный вектор скорости, f – объёмная плотность внешних источников вещества, $\lambda(\mathbf{x})$ – коэффициент диффузии, $k(\varphi,\mathbf{x})$ – коэффициент реакции, $\alpha(\varphi,\mathbf{x})$ – коэффициент массообмена, функция χ имеет смысл плотности граничных источников. Далее задачу (1), (2) при заданных функциях λ, k, f, α, χ и ψ будем называть *задачей 1*, а задачу 1 при $\psi = 0$ – *задачей 1a*.

В работе сначала доказывается глобальная разрешимость задачи 1а и локальная единственность её решения в случае, когда коэффициенты реакции и массообмена k и α достаточно произвольно зависят от решения φ и от пространственной переменной $\mathbf{x}$. Отметим, что при $\psi = 0$ не требуется монотонность $k(\varphi,\mathbf{x})\varphi$ и $\alpha(\varphi,\mathbf{x})\varphi$, что принципиально для моделей горения (см. [13]). В случае, когда указанные слагаемые монотонны, доказывается глобальная разрешимость и нелокальная единственность решения задачи 1. Для решения задачи 1 устанавливается строгий принцип минимума и максимума.

Далее для задачи 1 формулируются задачи мультипликативного управления. При этом предполагается, что коэффициент реакции имеет вид произведения $k(\varphi,\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$. Роль управлений в рассматриваемых задачах играют функция $\beta(\mathbf{x})$ и коэффициент диффузии $\lambda(\mathbf{x})$. Разрешимость задач управления, как и разрешимость краевых задач, доказывается для коэффициентов реакции и массообмена общего вида. В случае, когда коэффициенты, зависящие от решения, а также функционалы качества дифференцируемы по Фреше, для экстремальных задач выводятся системы оптимальности. На основе анализа данных систем для оптимальных решений конкретных задач управления устанавливается справедливость стационарного аналога принципа bang-bang (см. о содержании этого термина ниже или в [7, 8]).

При анализе рассматриваемых задач будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо часть Γ_D границы Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}, |\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot\,,\cdot)_{s,Q}$ будем обозначать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Нормы и скалярные произведения в пространствах $L^2(Q)$, $L^2(\Omega)$ или $L^2(\Gamma_N)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot\,,\cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot\,,\cdot)$ или $\|\cdot\|_{\Gamma_N}$ и $(\cdot\,,\cdot)_{\Gamma_N}$. Введём нужные в дальнейшем функциональные пространства:

$$L^p_+(D) = \{k \in L^p(D) : k \geqslant 0\}, \quad p \geqslant 3/2; \quad Z = \{\mathbf{v} \in L^4(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \ \ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\};$$

$$H^s_{\lambda_0}(\Omega) = \{h \in H^s(\Omega) : h \geqslant \lambda_0 > 0 \ \text{ в } \ \Omega\}, \quad s > 3/2; \quad \mathcal{T} = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

Далее считаем, что выполняются следующие предположения:

(i) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, являющейся объединением замыканий двух непересекающихся открытых участков Γ_D и Γ_N $(\Gamma = \overline{\Gamma}_D \bigcup \overline{\Gamma}_N,\ \Gamma_D \bigcap \Gamma_N = \varnothing)$, при этом поверхностная мера $\operatorname{meas}\Gamma_D$ положительна, а граница $\partial\Gamma_D$ участка Γ_D состоит из конечного числа липшицевых кривых;

(ii) имеют место включения

$$\lambda \in H^s_{\lambda_0}(\Omega), \quad s > 3/2, \quad \mathbf{u} \in Z, \quad f \in L^2(\Omega), \quad \psi \in H^{1/2}(\Gamma_D), \quad \chi \in L^2(\Gamma_N);$$

(iii) для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ справедливо включение $k(v,\cdot) \in L^p_+(\Omega)$ для некоторого $p \geqslant 3/2$, не зависящего от v, и на любом замкнутом шаре $B_r = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\|_{1,\Omega} \leqslant r\}$ радиуса r выполняется неравенство

$$\|k(v_1,\cdot) - k(v_2,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant L_1\|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \text{для всех} \quad v_1, v_2 \in B_r,$$

константа L_1 в котором зависит от r, но не зависит от $v_1, v_2 \in B_r$;

(iv) для любой функции $w \in H^1(\Omega)$ справедливо включение $\alpha(w,\cdot) \in L^q_+(\Gamma_N)$ для некоторого $q \geqslant 2$, не зависящего от w, и на любом замкнутом шаре $S_a = \{w \in H^1(\Omega) : \|w\|_{1,\Omega} \leqslant a\}$ радиуса a выполняется неравенство

$$\|\alpha(w_1,\cdot) - \alpha(w_2,\cdot)\|_{L^q(\Gamma_N)} \leqslant L_2\|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_N)} \quad \text{для всех} \quad w_1, w_2 \in S_a,$$

константа L_2 в котором зависит от a, но не зависит от $w_1, w_2 \in S_a$.

Отметим, что условия (iii) описывают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, $p \geqslant 3/2$, и позволяющий учитывать достаточно произвольную зависимость коэффициента реакции как от концентрации φ, так и от пространственной переменной $\mathbf{x}$. Например,

$$k(\varphi,\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi^2 \ (\text{или } \ \varphi^2|\varphi|), & \text{если } \ \mathbf{x} \in Q,\\ k_0(\mathbf{x}) \in L^{3/2}_+(\Omega \setminus \overline{Q}), & \text{если } \ \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{Q}, \end{cases}$$

где Q – открытое множество в Ω.

В свою очередь, условия (iv) задают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^q(\Gamma_N)$, $q \geqslant 2$, который позволяет учитывать зависимость коэффициента α от φ и $\mathbf{x}$. Например,

$$\alpha(\varphi,\mathbf{x}) = \begin{cases} |\varphi|, & \text{если } \ \mathbf{x} \in \Gamma_0,\\ \alpha_0(\mathbf{x}) \in L^{3/2}_+(\Gamma_N \setminus \Gamma_0), & \text{если } \ \mathbf{x} \in \Gamma_N \setminus \overline{\Gamma}_0, \end{cases}$$

где Γ_0 – открытое множество в Γ_N.

Замечание 1.1. В дальнейшем для упрощения будем писать $k(\varphi)$ и $\alpha(\varphi)$ вместо $k(\varphi,\mathbf{x})$ и $\alpha(\varphi,\mathbf{x})$, за исключением тех случаев, где зависимость от $\mathbf{x}$ играет не менее важную роль, чем нелинейная зависимость данных коэффициентов от φ.

Напомним также, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s\leqslant 6$ и компактно при $s<6$ и с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)}\leqslant C_s\|\varphi\|_{1,\Omega}\quad \text{для любой}\quad \varphi\in H^1(\Omega). \tag{3}$$

Пространство $H^{1/2}(\Gamma_N)$ вкладывается в пространство $L^q(\Gamma_N)$ непрерывно при $q\leqslant 4$ и компактно при $q<4$. В силу непрерывности оператора следа $\gamma: H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\Gamma_N)$ (и его сужения $\gamma|_{\Gamma_N}$ на $\Gamma_N\subset\Gamma$) имеет место оценка

$$\|\varphi\|_{L^q(\Gamma_N)}\leqslant \tilde C_q\|\varphi\|_{1,\Omega}\quad \text{для любой}\quad \varphi\in H^1(\Omega) \tag{4}$$

с константой $\tilde C_q$, зависящей от q и Γ_N.

Справедлива следующая техническая лемма (см. [14]).

Лемма 1.1. *При выполнении предположений (i), (ii) и включений* $\mathbf{u}\in Z$, $\lambda\in H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $s>3/2$, $k_1\in L^p_+(\Omega)$, $p\geqslant 3/2$, $\alpha_1\in L^q_+(\Gamma_N)$, $q\geqslant 2$, *существуют положительные константы* C_0, δ_0, γ_1, *зависящие только от* Ω, *константа* γ_p, *зависящая только от* Ω *и* p, *и константа* γ_q, *зависящая только от* Ω, Γ_N *и* q, *с которыми справедливы следующие оценки:*

$$|(\lambda\nabla\varphi,\nabla\eta)|\leqslant C_0\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},\quad |(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\eta)|\leqslant\gamma_1\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},$$

$$|(k_1\varphi,\eta)|\leqslant\gamma_p\|k_1\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},$$

$$|(\lambda\alpha_1\varphi,\eta)|\leqslant\gamma_q\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\alpha_1\|_{L^q(\Gamma_N)}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega}\quad \text{для всех}\quad \varphi,\eta\in H^1(\Omega), \tag{5}$$

$$|(\chi,h)|\leqslant\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}\|h\|_{1,\Omega}\quad \text{для любых}\quad \chi\in L^2(\Gamma_N)\quad \text{и всех}\quad h\in H^1(\Omega),$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\varphi)=0,\quad (\lambda\nabla\varphi,\nabla\varphi)\geqslant\delta_0\|\varphi\|^2_{1,\Omega}\quad \text{для любых}\quad \varphi\in\mathcal{T},$$

$$(\lambda\nabla\varphi,\nabla\varphi)\geqslant\lambda_*\|\varphi\|^2_{1,\Omega}\quad \text{для любых}\quad \varphi\in\mathcal{T},\quad \text{где}\quad \lambda_*\equiv\delta_0\lambda_0. \tag{6}$$

Умножим уравнение (1) на $h\in\mathcal{T}$ и проинтегрируем по Ω, воспользовавшись формулой Грина. Учитывая условия (2), получаем, что выполняется соотношение

$$(\lambda\nabla\varphi,\nabla h)+(k(\varphi)\varphi,h)+(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,h)+(\lambda\alpha(\varphi)\varphi,h)_{\Gamma_N}=$$
$$=(f,h)+(\chi,h)_{\Gamma_N}\quad \text{для всех}\quad h\in\mathcal{T},\quad \text{где}\quad \varphi|_{\Gamma_D}=\psi. \tag{7}$$

Определение 1.1. Функцию $\varphi\in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую соотношению (7), назовём *слабым решением задачи 1.*

Определение 1.2. Функцию $\varphi\in\mathcal{T}$, удовлетворяющую соотношению (7) при $\psi=0$, назовём *слабым решением задачи 1а.*

Разрешимость задачи (7) при $\psi=0$ докажем с помощью теоремы Шаудера, построив отображение $G:\mathcal{T}\to\mathcal{T}$, действующее по формуле $G(w)=\varphi$, $w\in\mathcal{T}$. Здесь функция $\varphi\in\mathcal{T}$ является решением линейной задачи

$$a_w(\varphi,h)=(\lambda\nabla\varphi,\nabla h)+(k(w)\varphi,h)+(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,h)+(\lambda\alpha(w)\varphi,h)_{\Gamma_N}=$$
$$=(f,h)+(\chi,h)_{\Gamma_N}\quad \text{для всех}\quad h\in\mathcal{T}. \tag{8}$$

Поскольку $k(w)\in L^p_+(\Omega)$, $p\geqslant 3/2$, и $\alpha(w)\in L^q_+(\Gamma_N)$, $q\geqslant 2$, в силу предположений (iii) и (iv), то из леммы 1.1 вытекает, что форма $a_w:\mathcal{T}\times\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ непрерывна и коэрцитивна с константой $\lambda_* = \delta\lambda_0$, а задача (8) в силу теоремы Лакса–Мильграма имеет единственное решение $\varphi \in \mathcal{T}$, и для него справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant \tilde{M}_\varphi \equiv C_*(\|f\|_\Omega + \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}), \quad C_* = \lambda_*^{-1}. \tag{9}$$

Обозначим $B_r = \{w \in \mathcal{T} : \|w\|_{1,\Omega} \leqslant r\}$, где $r = \tilde{M}_\varphi$. Из оценки (9) следует, что введённый выше оператор G отображает шар B_r в себя. Докажем, что G непрерывен и компактен на B_r. Пусть $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ – произвольная последовательность из B_r. В силу рефлексивности пространства $\mathcal{T} \subset H^1(\Omega)$ и компактности вложения $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ существует подпоследовательность последовательности $\{w_n\}_{n=1}^\infty$, которую мы снова обозначим через $\{w_n\}_{n=1}^\infty$, и функция $w \in B_r$ такие, что $w_n \to w$ слабо в $H^1(\Omega)$, $w_n \to w$ сильно в $L^4(\Omega)$ и $w_n|_{\Gamma_N} \to$ $\to w|_{\Gamma_N}$ сильно в $L^2(\Gamma_N)$ при $n \to \infty$. Положим $\varphi_n = G(w_n)$, $\varphi = G(w)$. Эти равенства означают, что $\varphi \in \mathcal{T}$ – решение задачи (8), а $\varphi_n \in \mathcal{T}$ – решение задачи

$$(\lambda\nabla\varphi_n, \nabla h) + (k(w_n)\varphi_n, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_n, h) + (\lambda\alpha(w_n)\varphi_n, h)_{\Gamma_N} =$$
$$= (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}, \tag{10}$$

получающейся из задачи (8) заменой w на w_n. Покажем, что $\varphi_n \to \varphi$ сильно в $H^1(\Omega)$ при $n \to \infty$. Почленно вычитая равенство (8) из равенства (10), будем иметь

$$(\lambda\nabla(\varphi_n - \varphi), \nabla h) + (k(w)(\varphi_n - \varphi), h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla(\varphi_n - \varphi), h) + (\lambda\alpha(w)(\varphi_n - \varphi), h)_{\Gamma_N} =$$
$$= -((k(w_n) - k(w))\varphi_n, h) - (\lambda(\alpha(w_n) - \alpha(w))\varphi_n, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}. \tag{11}$$

Используя оценку (5) и вытекающую из (9) оценку $\|\varphi_n\|_{1,\Omega} \leqslant \tilde{M}_\varphi$, $n = 1, 2, \ldots$, выводим, что

$$|((k(w_n) - k(w))\varphi_n, h)| + |(\lambda(\alpha(w_n) - \alpha(w))\varphi_n, h)_{\Gamma_N}| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_p L_1 \tilde{M}_\varphi \|w_n - w\|_{L^4(\Omega)} \|h\|_{1,\Omega} + \gamma_q L_2 \tilde{M}_\varphi \|\lambda\|_{s,\Omega} \|w_n - w\|_{L^2(\Gamma_N)} \|h\|_{1,\Omega}. \tag{12}$$

Полагая $h = \varphi_n - \varphi$ в (11), с учётом (6) и (12) получаем оценку

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{1,\Omega} \leqslant \gamma_p L_1 \tilde{M}_\varphi \|w_n - w\|_{L^4(\Omega)} + \gamma_q L_2 \tilde{M}_\varphi \|\lambda\|_{s,\Omega} \|w_n - w\|_{L^2(\Gamma_N)},$$

из которой вытекает, что $\|\varphi_n - \varphi\|_{1,\Omega} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует непрерывность и компактность оператора G. Тогда в силу теоремы Шаудера G имеет неподвижную точку $\varphi = G(\varphi) \in \mathcal{T}$, которая и является решением задачи (7) при $\psi = 0$.

Установим достаточные условия единственности решения задачи (7) с $\psi = 0$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{T}$ – любые два её решения, разность которых $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяет соотношению

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi_2)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) + (\lambda\alpha(\varphi_2)\varphi, h)_{\Gamma_N} = -((k(\varphi_1) - k(\varphi_2))\varphi_1, h) -$$
$$- (\lambda(\alpha(\varphi_1) - \alpha(\varphi_2))\varphi_1, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}. \tag{13}$$

Рассуждая так же, как при выводе оценки (12), будем иметь

$$|((k(\varphi_1) - k(\varphi_2))\varphi_1, h)| + |(\lambda(\alpha(\varphi_1) - \alpha(\varphi_2))\varphi_1, h)_{\Gamma_N}| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_p C_4 L_1 \tilde{M}_\varphi \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} + \gamma_q \tilde{C}_2 L_2 \tilde{M}_\varphi \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega}. \tag{14}$$

Здесь C_4 – константа, входящая в (3) при $s = 4$, а $\tilde{C}_2$ – константа из (4) при $l = 2$. Полагая $h = \varphi$ в (13), с учётом (6) и (14) приходим к оценке

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant C_*(\gamma_p L_1 C_4 + \gamma_q L_2 \tilde{C}_2 \|\lambda\|_{s,\Omega}) \tilde{M}_\varphi \|\varphi\|_{1,\Omega}.$$

Пусть исходные данные f и χ задачи 1а таковы, что выполняется неравенство

$$(\gamma_p L_1 C_4 + \gamma_q L_2 \tilde{C}_2 \|\lambda\|_{s,\Omega})(\|f\|_\Omega + \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}) < \lambda_*^2. \tag{15}$$

Тогда из предыдущего неравенства следует, что $\|\varphi\|_{1,\Omega} = 0$ или $\varphi_1 = \varphi_2$. Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. *При выполнении предположений (i)–(iv) существует слабое решение $\varphi \in \mathcal{T}$ задачи 1а и справедлива оценка (9). Если, к тому же, выполняется условие (15), то слабое решение задачи 1а единственно.*

Для доказательства разрешимости задачи 1 нам потребуется следующая лемма [14].

Лемма 1.2. *Пусть выполняется предположение (i). Тогда для любой функции $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует функция $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ такая, что $\varphi_0 = \psi$ на Γ_D и с некоторой константой C_Γ, зависящей от Ω и Γ_D, справедлива оценка $\|\varphi_0\|_{1,\Omega} \leqslant C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$.*

В дополнение к предположениям (iii), (iv) далее считаем, что нелинейности $k(\varphi)\varphi$ и $\alpha(\varphi)\varphi$ являются монотонными в том смысле, что выполняются следующие неравенства:

(v) $(k(\varphi_1)\varphi_1 - k(\varphi_2)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0$ для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$;

(vi) $(\alpha(\varphi_1)\varphi_1 - \alpha(\varphi_2)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_{\Gamma_N} \geqslant 0$ для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$.

Пусть также функции $k(\varphi)$ и $\alpha(\varphi)$ ограничены в том смысле, что существуют положительные константы A_1, B_1, зависящие от k, и константы A_2, B_2, зависящие от α, такие, что справедливы оценки:

(vii) $\|k(\varphi)\|_{L^p(\Omega)} \leqslant A_1 \|\varphi\|^r_{1,\Omega} + B_1$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ при $p \geqslant 3/2$, $r \geqslant 0$;

(viii) $\|\alpha(\varphi)\|_{L^q(\Gamma_N)} \leqslant A_2 \|\varphi\|^l_{1,\Omega} + B_2$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ при $q \geqslant 2$, $l \geqslant 0$.

Решение задачи 1 ищем в виде суммы $\varphi = \tilde\varphi + \varphi_0$, где φ_0 – заданная функция из леммы 1.2, а $\tilde\varphi \in \mathcal{T}$ – неизвестная функция. Подставляя $\varphi = \tilde\varphi + \varphi_0$ в соотношение (7), будем иметь

$$(\lambda\nabla\tilde\varphi, \nabla h) + (k(\tilde\varphi + \varphi_0)(\tilde\varphi + \varphi_0), h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi, h) + (\lambda\alpha(\tilde\varphi + \varphi_0)(\tilde\varphi + \varphi_0), h)_{\Gamma_N} =$$

$$= (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} - (\lambda\nabla\tilde\varphi_0, \nabla h) - (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}. \tag{16}$$

Прибавив к обеим частям равенства (16) слагаемые $-(k(\varphi_0)\varphi_0, h)$ и $-(\lambda\alpha(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Gamma_N}$, получим, что для всех $h \in \mathcal{T}$ имеет место равенство

$$(\lambda\nabla\tilde\varphi, \nabla h) + (k(\tilde\varphi+\varphi_0)(\tilde\varphi+\varphi_0) - k(\varphi_0)\varphi_0, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi, h) + (\lambda\alpha(\tilde\varphi+\varphi_0)(\tilde\varphi+\varphi_0) - \lambda\alpha(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Gamma_N} =$$

$$= \langle l, h\rangle \equiv (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} - (\lambda\nabla\varphi_0, \nabla h) - (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) - (k(\varphi_0)\varphi_0, h) - (\lambda\alpha(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Gamma_N}. \tag{17}$$

Применив к его правой части неравенство Гёльдера, оценки из леммы 1.1, учитывая (3), свойства (vii), (viii) и лемму 1.2, нетрудно показать, что $l \in \mathcal{T}^*$ и, более того, что

$$\|l\|_{\mathcal{T}^*} \leqslant M_l \equiv C_2\|f\|_\Omega + \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N} + (C_0 C_\Gamma \|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_1 C_\Gamma \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3})\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} +$$

$$+ C_\Gamma(\gamma_p(A_1 C_\Gamma^r \|\psi\|^r_{1/2,\Gamma_D} + B_1) + \gamma_q\|\lambda\|_{s,\Omega}(A_2 C_\Gamma^l \|\psi\|^l_{1/2,\Gamma_D} + B_2))\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}. \tag{18}$$

Введём нелинейный оператор $A : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^*$ по формуле

$$\langle A(\tilde\varphi), h\rangle \equiv (\lambda\nabla\tilde\varphi, \nabla h) + (k(\tilde\varphi + \varphi_0)(\tilde\varphi + \varphi_0) - k(\varphi_0)\varphi_0, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi, h) +$$

$$+ (\lambda\alpha(\tilde\varphi + \varphi_0)(\tilde\varphi + \varphi_0) - \lambda\alpha(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}. \tag{19}$$

Для доказательства существования решения $\tilde\varphi \in \mathcal{T}$ задачи (17), эквивалентной операторному уравнению $A(\tilde\varphi) = l$, достаточно, согласно [15, с. 182], показать, что, во-первых, оператор A непрерывен и ограничен; во-вторых, оператор A монотонен, т.е. $(A(u) - A(v), u - v) \geqslant 0$ для всех $u, v \in \mathcal{T}$; и, в-третьих, оператор A является коэрцитивным на $\mathcal{T}$.

Покажем, что оператор A является непрерывным и ограниченным. Для этого вычтем соотношение (19) при $\tilde\varphi = \varphi_2$ из соотношения (19) при $\tilde\varphi = \tilde\varphi_1$. Получим, что для всех $h \in \mathcal{T}$ справедливо равенство

$$\langle A(\tilde\varphi_1) - A(\tilde\varphi_2), h\rangle = (\lambda\nabla(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2), \nabla h) + (k(\tilde\varphi_1 + \varphi_0) - k(\tilde\varphi_2 + \varphi_0), \tilde\varphi_1 h) +$$

$$+ (k(\tilde\varphi_2 + \varphi_0)(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2), h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2), h) + (\lambda(\alpha(\tilde\varphi_1 + \varphi_0) - \alpha(\tilde\varphi_2 + \varphi_0))\tilde\varphi_1, h)_{\Gamma_N} +$$

$$+ (\lambda\alpha(\tilde{\varphi}_2 + \varphi_0)(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2), h)_{\Gamma_N}. \quad (20)$$

Из этого равенства с учётом оценок из леммы 1.1, свойств (iii) и (iv), а также оценок (3) и (4) вытекает неравенство

$$|\langle A(\tilde{\varphi}_1) - A(\tilde{\varphi}_2), h\rangle| \leqslant C_0\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega} + \gamma_p L_1 C_4\|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\|_{1,\Omega}\|\tilde{\varphi}_1\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega} +$$

$$+ \gamma_p\|k(\tilde{\varphi}_2 + \varphi_0)\|_{L^p(\Omega)}\|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega} + \gamma_1\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega} +$$

$$+ \gamma_q L_2\tilde{C}_2\|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\|_{1,\Omega}\|\tilde{\varphi}_1\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega} + \gamma_q\|\alpha(\tilde{\varphi}_2 + \varphi_0)\|_{L^q(\Gamma_N)}\|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega},$$

из которого следует непрерывность и ограниченность оператора A.

Запишем равенство (20) в следующем виде:

$$\langle A(\tilde{\varphi}_1) - A(\tilde{\varphi}_2), h\rangle = (\lambda\nabla(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2), \nabla h) + (k(\tilde{\varphi}_1 + \varphi_0)(\tilde{\varphi}_1 + \varphi_0) - k(\tilde{\varphi}_2 + \varphi_0)(\tilde{\varphi}_2 + \varphi_0), h) +$$

$$+ (\mathbf{u}\cdot\nabla(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2), h) + (\lambda(\alpha(\tilde{\varphi}_1 + \varphi_0)(\tilde{\varphi}_1 + \varphi_0) - \alpha(\tilde{\varphi}_2 + \varphi_0)(\tilde{\varphi}_2 + \varphi_0)), h)_{\Gamma_N}. \quad (21)$$

Подставим $h = \tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2$ в (21), тогда, учитывая неравенство $(\lambda\nabla(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2), \nabla(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)) \geqslant 0$, равенство $(\mathbf{u}\cdot\nabla(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2), \tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2) = 0$ (см. (6)), свойства (v) и (vi), заключаем, что

$$\langle A(\tilde{\varphi}_1) - A(\tilde{\varphi}_2), \tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\rangle \geqslant 0.$$

Полагая $h = \tilde{\varphi}$ в соотношении (19), в силу леммы 1.1 и свойств (v), (vi) приходим к неравенству

$$\langle A(\tilde{\varphi}), \tilde{\varphi}\rangle = (\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + (k(\tilde{\varphi} + \varphi_0)(\tilde{\varphi} + \varphi_0) - k(\varphi_0)\varphi_0, \tilde{\varphi}) +$$

$$+ (\lambda\alpha(\tilde{\varphi} + \varphi_0)(\tilde{\varphi} + \varphi_0) - \lambda\alpha(\varphi_0)\varphi_0, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N} \geqslant \lambda_*\|\tilde{\varphi}\|^2_{1,\Omega} \quad \text{для всех} \quad \tilde{\varphi} \in \mathcal{T}, \quad (22)$$

которое означает коэрцитивность оператора A на $\mathcal{T}$.

Из сказанного выше вытекает, что существует решение $\tilde{\varphi} \in \mathcal{T}$ задачи (16). Полагая $h = \tilde{\varphi}$ в (16), вследствие неравенств (22) и (18) получаем оценку $\|\tilde{\varphi}\|_{1,\Omega} \leqslant C_*\|l\|_{\mathcal{T}^*}$, $C_* = \lambda_*^{-1}$.

Тогда функция $\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi_0$ является решением задачи 1, и имеет место

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant M_\varphi \equiv C_* M_l + C_\Gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}, \quad (23)$$

где константа M_l введена в (18), а C_Γ – константа из леммы 1.2.

Покажем, что решение задачи 1 единственно. Пусть φ_1 и $\varphi_2 \in H^1(\Omega)$ – любые два решения задачи 1. Тогда их разность $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in \mathcal{T}$ удовлетворяет соотношению

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi_1)\varphi_1 - k(\varphi_2)\varphi_2, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) +$$

$$+ (\lambda(\alpha(\varphi_1)\varphi_1 - \alpha(\varphi_2)\varphi_2), h)_{\Gamma_N} = 0 \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}.$$

Полагая здесь $h = \varphi$, в силу леммы 1.1 и свойств (v), (vi) приходим к неравенству $\lambda_*\|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant$ $\leqslant 0$, из которого вытекает, что $\varphi_1 = \varphi_2$ в Ω.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1.2. *При выполнении предположений (i)–(viii) существует единственное слабое решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ задачи 1 и для него справедлива оценка (23).*

В рамках подхода из [16, гл. 3, § 1] докажем принцип максимума и минимума для φ.

Пусть в дополнение к (i)–(viii) выполняется предположение

(ix) имеют место двойные неравенства

$$\psi_{\min} \leqslant \psi \leqslant \psi_{\max} \ \text{ п.в. на } \ \Gamma_D, \quad f_{\min} \leqslant f \leqslant f_{\max} \ \text{ п.в. в } \ \Omega,$$

$$\lambda_{\min} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\max} \ \text{ п.в. в } \ \overline{\Omega} \quad \text{и} \quad \chi_{\min} \leqslant \chi \leqslant \chi_{\max} \ \text{ п.в. на } \ \Gamma_N.$$

Здесь $\psi_{\min}$, $\psi_{\max}$, $f_{\min}$, $f_{\max}$, $\chi_{\min}$, $\chi_{\max}$ – неотрицательные, а $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ – положительные числа.

Для упрощения основного неравенства будем считать, что выполняется предположение

(x) коэффициенты реакции и массообмена имеют следующий вид: $k(\varphi,\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})k_1(\varphi)$, где $k_1(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ – непрерывная функция, $0 < a_{\min} \leqslant a(\mathbf{x}) \leqslant a_{\max} < \infty$ п.в. в Ω, при этом $[f_{\min}/a_{\max}, f_{\max}/a_{\min}] \in E(k_1(t)t)$ при $t>0$, где $E(k_1(t)t)$ – область значений функции $k_1(t)t$;

$\alpha(\varphi,\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})\alpha_1(\varphi)$, где $\alpha_1(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ – непрерывная функция, $0 < b_{\min} \leqslant b(\mathbf{x}) \leqslant b_{\max} < \infty$ п.в. на Γ_N, при этом $[\chi_{\min}/b_{\max}\lambda_{\max}, \chi_{\max}/b_{\min}\lambda_{\min}] \in E(\alpha_1(r)r)$ при $r>0$, где $E(\alpha_1(t)t)$ – область значений функции $\alpha_1(t)t$.

Лемма 1.3. *При выполнении предположений (i)–(x) для решения $\varphi\in H^1(\Omega)$ задачи 1 справедлив следующий принцип максимума и минимума:*

$$m \leqslant \varphi \leqslant M \ \text{ п.в. в } \ \Omega, \quad M = \max\{\psi_{\max}, M_1, M_2\}, \quad m = \min\{\psi_{\min}, m_1, m_2\}. \tag{24}$$

Здесь M_1 и M_2 – минимальные корни уравнений $k_1(M_1)M_1 = f_{\max}/a_{\min}$ и $\alpha_1(M_2)M_2 = \chi_{\max}/\lambda_{\min}b_{\min}$, а m_1 и m_2 – максимальные корни уравнений $k(m_1)m_1 = f_{\min}/a_{\max}$ и $\alpha(m_2)m_2 = \chi_{\min}/\lambda_{\max}b_{\max}$.

Доказательство. Сначала докажем, что $\varphi \leqslant M$ п.в. в Ω. Для этого введём функцию $\tilde\varphi = \max\{\varphi - M, 0\}$. Очевидно, что принцип максимума или оценка $\varphi\leqslant M$ п.в. в Ω выполняется тогда и только тогда, когда $\tilde\varphi = 0$ п.в. в Ω.

Через $Q_M\subset\Omega$ обозначим открытое измеримое подмножество Ω, в котором $\varphi > M$. Из [17, с. 152] и [18] вытекает, что $\nabla\tilde\varphi = \nabla\varphi$ п.в. в Q_M и $\tilde\varphi\in\mathcal{T}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\lambda\nabla\varphi,\nabla\tilde\varphi) = (\lambda\nabla\tilde\varphi,\nabla\tilde\varphi)_{Q_M} = (\lambda\nabla\tilde\varphi,\nabla\tilde\varphi) \quad \text{и} \quad (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\tilde\varphi) = (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi,\tilde\varphi) = 0.$$

С учётом этого, полагая $h=\tilde\varphi$ в равенстве (7), получаем

$$(\lambda\nabla\tilde\varphi,\nabla\tilde\varphi) + (k(\varphi,\cdot)\varphi,\tilde\varphi) + (\lambda\alpha(\varphi,\cdot)\varphi,\tilde\varphi)_{\Gamma_N} = (f,\tilde\varphi) + (\chi,\tilde\varphi)_{\Gamma_N}. \tag{25}$$

Очевидно, что

$$(k(\varphi,\cdot)\varphi,\tilde\varphi) = (k(\varphi,\cdot)\varphi,\tilde\varphi)_{Q_M} = (k(\tilde\varphi+M,\cdot)(\tilde\varphi+M),\tilde\varphi)_{Q_M}$$

и для функций $\varphi_1 = \tilde\varphi + M$ и $\varphi_2 = M$ из $H^1(\Omega)$ в силу свойств (v) справедливо неравенство

$$0 \leqslant (k(\tilde\varphi+M,\cdot)(\tilde\varphi+M) - k(M,\cdot)M,\tilde\varphi) = (k(\tilde\varphi+M,\cdot)(\tilde\varphi+M) - k(M,\cdot)M,\tilde\varphi)_{Q_M}, \tag{26}$$

поскольку $\tilde\varphi = 0$ в $\Omega\setminus\overline{Q}_M$. Пусть также на некотором участке $\Gamma_N^0\subset\Gamma_N$ выполняется неравенство $\varphi|_{\Gamma_N^0} > M$. Тогда

$$(\lambda\alpha(\varphi,\cdot)\varphi,\tilde\varphi)_{\Gamma_N} = (\lambda\alpha(\varphi,\cdot)\varphi,\tilde\varphi)_{\Gamma_N^0} = (\lambda\alpha(\tilde\varphi+M,\cdot)(\tilde\varphi+M),\tilde\varphi)_{\Gamma_N^0}. \tag{27}$$

Аналогично, для функций $\varphi_1 = \tilde\varphi + M$ и $\varphi_2 = M$ из $H^1(\Omega)$ в силу свойства (vi) верно неравенство

$$0 \leqslant (\lambda\alpha(\tilde\varphi+M,\cdot)(\tilde\varphi+M) - \lambda\alpha(M,\cdot)M,\tilde\varphi)_{\Gamma_N} = (\lambda\alpha(\tilde\varphi+M,\cdot)(\tilde\varphi+M) - \lambda\alpha(M,\cdot)M,\tilde\varphi)_{\Gamma_N^0}.$$

С учётом этого, вычитая $(k(M,\cdot)M,\tilde\varphi)$ и $(\lambda\alpha(M,\cdot)M,\tilde\varphi)_{\Gamma_N}$ из обеих частей равенства (25), получаем

$$(\lambda\nabla\tilde\varphi,\nabla\tilde\varphi) + (k(\tilde\varphi+M,\cdot)(\tilde\varphi+M) - k(M,\cdot)M,\tilde\varphi)_{Q_M} + (\lambda(\alpha(\tilde\varphi+M,\cdot)(\tilde\varphi+M) - \alpha(M,\cdot)M),\tilde\varphi)_{\Gamma_N^0} =$$

$$= (f - k(M,\cdot)M,\tilde\varphi)_{Q_M} + (\chi - \lambda\alpha(M,\cdot)M,\tilde\varphi)_{\Gamma_N^0}.$$

Отсюда в силу леммы 1.1 и (26), (27) вытекает оценка

$$\lambda_*\|\tilde\varphi\|^2_{1,\Omega} \leqslant (f - k(M,\cdot)M,\tilde\varphi)_{Q_M} + (\chi - \lambda\alpha(M,\cdot)M,\tilde\varphi)_{\Gamma_N^0},$$

из которой следует, что если для коэффициентов $k(\varphi, \mathbf{x})$ и $\alpha(\varphi, \mathbf{x})$ вида (x) постоянная M выбрана согласно условию (24), то $\tilde{\varphi} = 0$.

Для доказательства принципа минимума введём функцию $\tilde{w} = \min\{\varphi - m, 0\}$. Рассуждая так же, как для функции $\tilde{\varphi}$, заключаем, что $\tilde{w} \in \mathcal{T}$. Будем предполагать, что в измеримом открытом множестве $Q_m \subset \Omega$ и на участке $\Gamma_N^1 \subset \Gamma_N$ справедливо неравенство $\varphi < m$. Рассуждая, как и выше, приходим к равенству

$$(\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + (k(\tilde{w}+m,\cdot)(\tilde{w}+m) - k(m,\cdot)m, \tilde{w})_{Q_m} + (\lambda(\alpha(\tilde{w}+m,\cdot)(\tilde{w}+m) - \alpha(m,\cdot)m), \tilde{w})_{\Gamma_N^1} =$$
$$= (f - k(m,\cdot)m, \tilde{w})_{Q_m} + (\chi - \lambda\alpha(m,\cdot)m, \tilde{w})_{\Gamma_N^1},$$

из которого выводим оценку

$$\lambda_*\|\tilde{w}\|_{1,\Omega}^2 \leqslant (f - k(m,\cdot)m, \tilde{w})_{Q_m} + (\chi - \lambda\alpha(m,\cdot)m, \tilde{w})_{\Gamma_N^1}.$$

Из полученной оценки, как и выше, вытекает, что $\tilde{w} = 0$ для постоянной m, выбранной согласно (24).

Замечание 1.2. Для степенных коэффициентов параметры M_i, m_i, $i = 1, 2$, легко вычисляются. Например, при $k(\varphi) = \varphi^2$ и $\alpha(\varphi) = |\varphi|$ получаем, что $M_1 = f_{\max}^{1/3}$, $m_1 = f_{\min}^{1/3}$ и $M_2 = (\chi_{\max}/\lambda_{\min})^{1/2}$, $m_2 = (\chi_{\min}/\lambda_{\max})^{1/2}$.

Замечание 1.3. Условие $[f_{\min}/a_{\max}, f_{\max}/a_{\min}] \in E(k_1(t)t)$ при $t > 0$ в (x) можно заменить условием, что функциональные относительно M_1 и m_1 уравнения $k_1(M_1)M_1 = f_{\max}/a_{\min}$ и $k(m_1)m_1 = f_{\min}/a_{\max}$ имеют хотя бы по одному решению $M_1 > 0$ и $m_1 > 0$. Аналогичную альтернативу имеет условие $[\chi_{\min}/b_{\max}\lambda_{\max}, \chi_{\max}/b_{\min}\lambda_{\min}] \in E(\alpha_1(r)r)$ при $r > 0$. Если функции $k_1(t)$ и $\alpha_1(r)$ монотонны, то параметры M_1, M_2 и m_1, m_2 определяются однозначно.

2. Мультипликативная задача управления. При исследовании задач управления будем полагать, что для функции $k(\varphi, \mathbf{x})$ выполняется предположение

(xi) коэффициент реакции имеет вид $k(\varphi, \mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$, где $\beta(\mathbf{x}) \in H_+^1(\Omega)$, $k_0(\varphi) \in L_+^2(\Omega)$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$, и удовлетворяет свойству (vii) при $p > 2$; кроме того, в любом шаре $B_r = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant r\}$ радиуса r справедливо неравенство

$$\|k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2)\|_\Omega \leqslant L_3\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \text{для всех} \quad \varphi_1, \varphi_2 \in B_r. \tag{28}$$

Здесь константа L_3 зависит от радиуса r и не зависит от функций $\varphi_1, \varphi_2 \in B_r$.

Несложно показать, что условия из (xi) описывают частный случай функции $k(\varphi, \mathbf{x})$, удовлетворяющей предположению (iv). Действительно (см. также [12]),

$$\|\beta(k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2))\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leqslant \|\beta\|_{L^6(\Omega)}\|k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2)\|_\Omega \leqslant C_6\|\beta\|_{1,\Omega}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)}.$$

Для постановки задачи управления разобьём множество исходных данных задачи 1 на две группы: группу фиксированных данных, куда отнесём функции $\mathbf{u}$, $k_0(\varphi)$, $\alpha(\varphi)$, f, χ и ψ, и группу управлений, куда отнесём функции λ и β, предполагая, что они могут изменяться в некоторых множествах K_1 и K_2, удовлетворяющих условию

(j) $K_1 \subset H_{\lambda_0}^s(\Omega)$ и $K_2 \subset H_+^1(\Omega)$ – непустые выпуклые замкнутые множества.

Введём пространство $Y = \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$, положим $u = (\lambda, \beta)$, $K = K_1 \times K_2$, зададим оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \to Y$ формулами

$$\langle F_1(\varphi, u), h\rangle = (\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (\beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) + (\lambda\alpha(\varphi, \mathbf{x})\varphi, h)_{\Gamma_N} - (f, h) - (\chi, h)_{\Gamma_N},$$
$$F_2(\varphi) = \varphi|_{\Gamma_D} - \psi$$

и запишем равенство (7) в виде $F(\varphi, u) = 0$. Рассматривая это равенство как условное ограничение на состояние $\varphi \in H^1(\Omega)$ и управление $u \in K$, сформулируем следующую задачу условной минимизации:

$$J(\varphi, u) \equiv \frac{\mu_0}{2}I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2}\|\beta\|_{1,\Omega}^2 \to \inf, \quad F(\varphi, u) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K. \tag{29}$$

Здесь $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ – функционал, полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости.

Обозначим через $Z_{\text{ad}} = \{(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K : F(\varphi, u) = 0,\ J(\varphi, u) < \infty\}$ множество допустимых пар для задачи (29) и предположим, что выполняется условие

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$ и K – ограниченное множество, либо $\mu_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$I_1(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2 = \int_Q |\varphi - \varphi^d|^2 d\mathbf{x}, \quad I_2(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_{1,Q}^2. \tag{30}$$

Здесь $\varphi^d \in L^2(Q)$ (либо $\varphi^d \in H^1(Q)$) – заданная в подобласти $Q \subset \Omega$ функция.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются предположения (i)–(viii), (xi) и условия (j), (jj), функционал $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывен снизу и множество Z_{ad} не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение $(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K$ задачи (29).*

Доказательство. Пусть $(\varphi_m, u_m) \in Z_{\text{ad}}$ – минимизирующая последовательность, для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(\varphi_m, u_m) = \inf_{(\varphi,u)\in Z_{\text{ad}}} J(\varphi, u) \equiv J^*.$$

Из условия (jj) и теоремы 1.2 вытекают оценки

$$\|\lambda_m\|_{s,\Omega} \leqslant c_1, \quad \|\beta_m\|_{1,\Omega} \leqslant c_2, \quad \|\varphi_m\|_{1,\Omega} \leqslant c_3, \tag{31}$$

в которых константы c_1, c_2, c_3 не зависят от m. Из этих оценок и условия (j) вытекает, что существуют слабые пределы $\lambda^* \in K_1$, $\beta^* \in K_2$ и $\varphi^* \in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\lambda_m\}$, $\{\beta_m\}$ и $\{\varphi_m\}$. Указанные подпоследовательности обозначим также через $\{\lambda_m\}$, $\{\beta_m\}$ и $\{\varphi_m\}$ соответственно, причём в силу компактности вложений $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ при $p < 6$, $H^{1/2}(\Gamma_N) \subset L^q(\Gamma_N)$ при $q < 4$, $H^s(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ и $H^{s-1/2}(\Gamma_N) \subset L^\infty(\Gamma_N)$ при $s > 3/2$ считаем, что при $m \to \infty$ имеют место сходимости:

$$\begin{gathered}
\varphi_m \to \varphi^* \quad \text{слабо в} \quad H^1(\Omega), \quad \text{слабо в} \quad L^6(\Omega) \quad \text{и сильно в} \quad L^s(\Omega), \quad s < 6,\\
\varphi_m|_{\Gamma_N} \to \varphi^*|_{\Gamma_N} \quad \text{слабо в} \quad H^{1/2}(\Gamma_N), \quad \text{слабо в} \quad L^4(\Gamma_N) \quad \text{и сильно в} \quad L^q(\Gamma_N), \quad q < 4,\\
\beta_m \to \beta^* \quad \text{слабо в} \quad H^1(\Omega), \quad \text{слабо в} \quad L^6(\Omega) \quad \text{и сильно в} \quad L^p(\Omega), \quad p < 6,\\
\lambda_m \to \lambda^* \quad \text{слабо в} \quad H^s(\Omega) \quad \text{и сильно в} \quad L^\infty(\Omega),\\
\lambda_m|_{\Gamma_N} \to \lambda^*|_{\Gamma_N} \quad \text{слабо в} \quad H^{s-1/2}(\Gamma_N) \quad \text{и сильно в} \quad L^\infty(\Gamma_N), \quad s > 3/2.
\end{gathered} \tag{32}$$

Очевидно, что $F_2(\varphi^*) = 0$. Покажем, что $F_1(\varphi^*, u^*) = 0$, т.е. что

$$(\lambda^*\nabla\varphi^*, \nabla h) + (\beta^* k_0(\varphi^*)\varphi^*, h) + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla\varphi^*, h) + (\lambda^*\alpha(\varphi^*)\varphi^*, h)_{\Gamma_N} =$$
$$= (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}. \tag{33}$$

Для этого заметим, что пара функций (φ_m, u_m) удовлетворяет соотношению

$$(\lambda_m\nabla\varphi_m, \nabla h) + (\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) + (\mathbf{u}_m \cdot \nabla\varphi_m, h) + (\lambda_m\alpha(\varphi_m)\varphi_m, h)_{\Gamma_N} =$$
$$= (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}. \tag{34}$$

Перейдём в (34) к пределу при $m \to \infty$. Из сходимостей (32) вытекает, что все линейные слагаемые в (34) переходят в соответствующие слагаемые в (33). Исследуем поведение при $m \to \infty$ нелинейных слагаемых, начиная с $(\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h)$.

Справедливо равенство

$$(\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) - (\beta^* k_0(\varphi^*)\varphi^*, h) =$$
$$= ((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) + (\beta^*(k_0(\varphi_m)\varphi_m - k_0(\varphi^*)\varphi^*), h). \tag{35}$$

Для сходимости к нулю второго слагаемого в правой части этого равенства достаточно, чтобы $k_0(\varphi_m) \to k_0(\varphi^*)$ сильно в $L^2(\Omega)$ и $\beta^* h\varphi_m \to \beta^* h\varphi^*$ слабо в $L^2(\Omega)$ для всех $h \in \mathcal{T}$ при $m \to \infty$. Действительно, из этих свойств вытекает сильная сходимость в $L^1(\Omega)$ произведения указанных последовательностей, или

$$(k_0(\varphi_m)\varphi_m - k_0(\varphi^*)\varphi^*, \beta^* h) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}. \tag{36}$$

Сильная сходимость $k_0(\varphi_m) \to k_0(\varphi^*)$ в $L^2(\Omega)$ при $m \to \infty$ следует из предположения (x), а из (32) вытекает, что $\beta^* h\varphi_m \to \beta^* h\varphi_m$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $m \to \infty$ для всех $h \in \mathcal{T}$.

Поскольку пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно вложено в $\mathcal{T}$, то существует последовательность $\{h_n\} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, сходящаяся к h по норме $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Используя $\{h_n\}$, для первого слагаемого в (35) получаем

$$((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) = ((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h - h_n) + ((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h_n).$$

В силу равномерной ограниченности по m величин $\|\beta_m - \beta^*\|_{L^6(\Omega)}$, $\|\varphi_m\|_{L^6(\Omega)}$ и $\|k_0(\varphi_m)\|_\Omega$, вытекающей из (x), из сходимости $\|h - h_n\|_{L^6(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$ следует существование для любого $\varepsilon > 0$ такого номера $N = N(\varepsilon, h)$, что

$$|((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h - h_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \|\beta_m - \beta^*\|_{L^6(\Omega)}\|k_0(\varphi_m)\|_\Omega\|\varphi_m\|_{L^6(\Omega)}\|h - h_n\|_{L^6(\Omega)} \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N \ \text{ и } \ m \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

В силу равномерной ограниченности по m величин $\|\varphi_m\|_{L^6(\Omega)}$ и $\|k_0(\varphi_m)\|_\Omega$ из сходимости $\|\beta_m - \beta^*\|_{L^4(\Omega)} \to 0$ при $m \to \infty$ следует существование такого номера $M = M(\varepsilon, h)$, что

$$|((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \|\beta_m - \beta^*\|_{L^4(\Omega)}\|k_0(\varphi_m)\|_\Omega\|\varphi_m\|_{L^6(\Omega)}\|h_n\|_{L^8(\Omega)} \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{для всех} \quad m \geqslant M \ \text{ и } \ n \in \mathbb{N}. \tag{38}$$

Из оценок (37) и (38) вытекает, что $((\beta_m - \beta^*)k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $h \in \mathcal{T}$.

Тогда с учётом сходимости (36) получаем, что $(\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) \to (\beta^* k_0(\varphi^*)\varphi^*, h)$ при $m \to \infty$ для всех $h \in \mathcal{T}$.

Для слагаемого $(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h)$ справедливо равенство

$$(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h) - (\lambda^* \nabla\varphi^*, \nabla h) = ((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h) + (\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda^* \nabla h).$$

Поскольку $\lambda^* \nabla h \in L^2(\Omega)^3$, то в силу (32) получим, что $(\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda^* \nabla h) \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $h \in \mathcal{T}$. Применяя неравенство Гёльдера, заключаем в силу (32) и (31), что

$$|((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h)| \leqslant \|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\varphi_m\|_\Omega\|\nabla h\|_\Omega \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

В таком случае $(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h) \to (\lambda^* \nabla\varphi^*, \nabla h)$ при $m \to \infty$.

Для нелинейного слагаемого $(\lambda_m \alpha(\varphi_m)\varphi_m, h)_{\Gamma_N}$ имеем равенство

$$(\lambda_m \alpha(\varphi_m)\varphi_m, h)_{\Gamma_N} - (\lambda^* \alpha(\varphi^*)\varphi^*, h)_{\Gamma_N} =$$

$$= ((\lambda_m - \lambda^*)\alpha(\varphi_m)\varphi_m, h)_{\Gamma_N} + (\lambda^*(\alpha(\varphi_m) - \alpha(\varphi^*))\varphi_m, h)_{\Gamma_N} + (\lambda^* \alpha(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h)_{\Gamma_N}.$$

Поскольку $\lambda^* \alpha(\varphi^*)h \in L^{4/3}(\Gamma_N)$, то $(\varphi_m - \varphi^*, \lambda^* \alpha(\varphi^*)h)_{\Gamma_N} \to 0$ при $m \to \infty$ в силу (32).

Применив далее неравенство Гёльдера, в силу предположения (iv) и равномерной ограниченности по m величины $\|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)}$ получим, что

$$|(\lambda^*(\alpha(\varphi_m) - \alpha(\varphi^*))\varphi_m, h)_{\Gamma_N}| \leqslant \|\lambda^*\|_{L^\infty(\Omega)}\|\alpha(\varphi_m) - \alpha(\varphi^*)\|_\Omega\|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)}\|h\|_{L^4(\Gamma_N)} \to 0$$

при $m \to \infty$. Используя неравенство Гёльдера, в силу (32), равномерной ограниченности по m величины $\|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)}$ и вытекающей из свойства (viii) и (31) равномерной ограниченности по m величины $\|\alpha(\varphi_m)\|_\Omega$ будем иметь

$$|((\lambda_m - \lambda^*)\alpha(\varphi_m)\varphi_m, h)_{\Gamma_N}| \leqslant \|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Gamma_N)}\|\alpha(\varphi_m)\|_{\Gamma_N}\|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)}\|h\|_{L^4(\Gamma_N)} \to 0$$

при $m \to \infty$.

Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу на $H^1(\Omega) \times H^s(\Omega) \times H^1(\Omega)$, то из сказанного выше следует, что $J(\varphi^*, u^*) = J^*$.

Замечание 2.1. Функционалы в (30) удовлетворяют условиям теоремы 2.1.

Следующим этапом в исследовании экстремальной задачи (29) является вывод системы оптимальности, которая даёт ценную информацию о дополнительных свойствах оптимальных решений. На основе её анализа устанавливается, в частности, единственность и устойчивость оптимальных решений (см. детали, например, в [10–12] и [19, 20]).

Пусть, в дополнение к (i)–(xi), выполняется следующее предположение:

(xii) функции $k_0(\varphi)\varphi$ и $\alpha(\varphi)\varphi$ непрерывно дифференцируемы по Фреше и их производные удовлетворяют условиям:

$(k_0(\varphi)\varphi)' = b(\varphi)$, где $b(\varphi) \in L^2_+(\Omega)$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$;

$(\alpha(\varphi)\varphi)' = a(\varphi)$, где $a(\varphi) \in L^2_+(\Gamma_N)$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Введём сопряжённое к Y пространство $Y^* = \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$. Несложно показать, что производная Фреше от оператора $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \to Y$ по φ в каждой точке $(\hat\varphi, \hat u) = (\hat\varphi, \hat\lambda, \hat\beta)$ является линейным оператором $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u) : H^1(\Omega) \to Y$, ставящим в соответствие каждому элементу $h \in H^1(\Omega)$ элемент $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)(h) = (\hat y_1, \hat y_2) \in Y$. Здесь элементы $\hat y_1 \in \mathcal{T}^*$ и $\hat y_2 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ определяются по $\hat\varphi$ и τ соотношениями

$$\langle \hat y_1, \tau\rangle = (\hat\lambda\nabla\tau, \nabla h) + (\hat\beta b(\hat\varphi)\tau, h) + (\hat\lambda a(\hat\varphi)\tau, h)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, h) \quad \text{для всех} \quad \tau \in H^1(\Omega), \quad y_2 = h|_{\Gamma_D}.$$

Через $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)^* : Y^* \to H^1(\Omega)^*$ обозначим сопряжённый к $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)$ оператор.

Следуя общей теории гладко-выпуклых экстремальных задач [21], введём элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$, который будем называть *сопряжённым состоянием*, и введём лагранжиан $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\varphi, u, \mathbf{y}^*) = J(\varphi, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\varphi, u)\rangle_{Y^*\times Y} \equiv J(\varphi, u) + \langle F_1(\varphi, u), \theta\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} + \langle \zeta, F_2(\varphi, u)\rangle_{\Gamma_D},$$

где $\langle\zeta, \cdot\rangle_{\Gamma_D} = \langle\zeta, \cdot\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_D)^*\times H^{1/2}(\Gamma_D)}$.

Так как $\hat\beta b(\hat\varphi) \in L^{3/2}_+(\Omega)$ и $\hat\lambda a(\hat\varphi) \in L^2_+(\Gamma_N)$, то из [14] следует, что для любых функций $f \in L^2(\Omega)$ и $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует единственное решение $\tau \in H^1(\Omega)$ линейной задачи

$$(\hat\lambda\nabla\tau, \nabla h) + (\hat\beta b(\hat\varphi)\tau, h) + (\hat\lambda a(\hat\varphi)\tau, h)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, h) = (f, h) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathcal{T}, \quad \text{где} \quad \tau|_{\Gamma_D} = \psi.$$

Тогда оператор $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u) : H^1(\Omega) \times K \to Y$ – изоморфизм, а из [21] вытекает

Теорема 2.2. *Пусть выполняются предположения (i)–(viii), (xi), (xii) и условия (j), (jj), функционал $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируем по φ в точке $\hat\varphi$ и локальный минимум в задаче (29) достигается в точке $(\hat\varphi, \hat u) \in H^1(\Omega) \times K$. Тогда существует единственный множитель Лагранжа $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$ такой, что выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)^*\mathbf{y}^* = -J'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)$ в $H^1(\Omega)^*$, эквивалентное тождеству*

$$(\hat\lambda\nabla\tau, \nabla\theta) + (\hat\beta b(\hat\varphi)\tau, \theta) + (\hat\lambda a(\hat\varphi)\tau, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \theta) + \langle\zeta, \tau\rangle_{\Gamma_D} = -(\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\hat\varphi), \tau\rangle \quad \textit{для всех} \quad \tau \in H^1(\Omega), \tag{39}$$

и справедлив принцип минимума $\mathcal{L}(\hat\varphi, \hat u, \mathbf{y}^*) \leqslant \mathcal{L}(\hat\varphi, u, \mathbf{y}^*)$ для любого $u \in K$, эквивалентный неравенствам

$$\mu_1(\hat\lambda, \lambda - \hat\lambda)_{s,\Omega} + ((\lambda - \hat\lambda)\nabla\hat\varphi, \nabla\theta) + ((\lambda - \hat\lambda)\alpha(\hat\varphi)\hat\varphi, \theta)_{\Gamma_N} \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \lambda \in K_1,$$
$$\mu_2(\hat\beta, \beta - \hat\beta)_{1,\Omega} + ((\beta - \hat\beta)k_0(\hat\varphi)\hat\varphi, \theta) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \beta \in K_2. \tag{40}$$

3. Анализ однопараметрической задачи управления. Свойство bang-bang. В данном пункте работы устанавливаются дополнительные свойства оптимального решения следующей задачи управления:

$$J(\varphi) \equiv (1/2)I(\varphi) \to \inf, \quad F(\varphi,\beta)=0, \quad (\varphi,\beta)\in H^1(\Omega)\times K_3, \tag{41}$$

роль управления в которой играет функция β, тогда как λ считается заданной функцией.

Пусть выполняется условие

(jjj) $K_3 \subset L^6_+(\Omega)$ – непустое выпуклое замкнутое и ограниченное множество.

Докажем разрешимость задачи (41) в случае, когда $k_0(\varphi)=\varphi^2$. Очевидно, что для функции $\beta k_0(\varphi)$ справедливо неравенство (28), поскольку для его выполнения достаточно, чтобы $\beta{\in}L^6(\Omega)$.

Справедлива

Теорема 3.1. *Пусть выполнены предположения (i), (ii), (iv), (vi) (viii) и условие (jjj), функционал $I: H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ слабо полунепрерывен снизу и множество $Z_{\rm ad}$ не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение $(\varphi,\beta)\in H^1(\Omega)\times K_3$ задачи (41).*

Доказательство. Пусть $(\varphi_m,\beta_m)\in Z_{\rm ad}$ – минимизирующая последовательность, для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(\varphi_m) = \inf_{(\varphi,\beta)\in Z_{\rm ad}} J(\varphi) \equiv J^*, \quad F(\varphi_m,\beta_m)=0.$$

Из условия (jjj) и теоремы 1.2 вытекают следующие оценки:

$$\|\beta_m\|_{L^6(\Omega)} \leqslant c_1, \quad \|\varphi_m\|_{1,\Omega}\leqslant c_2,$$

где константы c_1, c_2 не зависят от m. Из этих оценок и условия (jjj) следует, что существуют слабые пределы $\beta^*\in K_3$ и $\varphi^*\in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\beta_m\}$ и $\{\varphi_m\}$.

Единственным отличием от доказательства теоремы 2.1 является доказательство сходимости $(\beta_m\varphi_m^3,h)\to(\beta^*(\varphi^*)^3,h)$ при $m\to\infty$ для всех $h\in\mathcal{T}$ при условии, что $\beta_m\to\beta^*$ слабо в $L^6(\Omega)$ при $m\to\infty$.

Справедливо равенство

$$(\beta_m\varphi_m^3,h)-(\beta^*(\varphi^*)^3,h)=(\beta_m-\beta^*,(\varphi^*)^3h)+(\beta_m(\varphi_m^3-(\varphi^*)^3),h).$$

Для всех $h\in\mathcal{T}$ из неравенства Гёльдера вытекает, что

$$|(\beta_m(\varphi_m^3-(\varphi^*)^3),h)|\leqslant 2\|\beta_m\|_{L^6(\Omega)}\|\varphi_m-\varphi^*\|_{L^3(\Omega)}(\|\varphi_m\|^2_{L^6(\Omega)}+\|\varphi^*\|^2_{L^6(\Omega)})\|h\|_{L^6(\Omega)}\to 0$$

при $m\to\infty$. Так как $(\varphi^*)^3h\in L^{3/2}(\Omega)$, то $(\beta_m-\beta^*,(\varphi^*)^3h)\to 0$ при $m\to\infty$.

Для задачи (41) также справедлив аналог теоремы 2.2, поскольку $\hat\beta\hat\varphi^2\in L^2_+(\Omega)$, при этом уравнение (39) и неравенство (40) принимают вид

$$(\lambda\nabla\tau,\nabla\theta)+3(\hat\beta\hat\varphi^2\tau,\theta)+(\lambda a(\hat\varphi)\tau,\theta)_{\Gamma_N}+(\mathbf{u}\cdot\nabla\tau,\theta)+\langle\zeta,\tau\rangle_{\Gamma_D}=$$

$$=-(1/2)\langle I'_\varphi(\hat\varphi),\tau\rangle \quad \text{для всех} \quad \tau\in H^1(\Omega), \tag{42}$$

$$((\beta-\hat\beta)\hat\varphi^3,\theta)\geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \beta\in K_3. \tag{43}$$

Пусть вместо условия (jjj) выполняется более жёсткое условие

(jjj$'$) $\beta_{\min}\leqslant\beta\leqslant\beta_{\max}$ п.в. в Ω для всех $\beta\in K_3$, где $\beta_{\min}$, $\beta_{\max}$ – положительные числа.

Очевидно, что условие (jjj$'$) задаёт частный случай выпуклого, ограниченного и замкнутого множества, введённого в (jjj).

Покажем, что оптимальное управление $\hat\beta(\mathbf{x})$ задачи (41) обладает свойством bang-bang, согласно которому оно принимает одно из двух значений $\beta_{\min}$ или $\beta_{\max}$ в зависимости от знака функции $\theta(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}\in\Omega$.

Следующая лемма является частным случаем теоремы 2.1 из [22, с. 67].

Лемма 3.1. *При выполнении условия (jjj′) неравенство (43) эквивалентно неравенству* $(\beta-\hat\beta)\hat\varphi^3\theta\geqslant 0$ *п.в. в* Ω *для всех* $\beta\in K_3$.

Замечание 3.1. Лемма 3.1 может быть доказана методом от противного. Предположим, что существует функция $\beta_1\in K_3$, с которой на множестве $D\subset\Omega$, $\operatorname{meas} D>0$, выполняется неравенство $(\beta_1-\hat\beta)\hat\varphi^3\theta<0$ п.в. в D. Рассмотрим функцию β_2 такую, что $\beta_2=\hat\beta$, если $\mathbf{x}\notin D$, и $\beta_2=\beta_1$, если $\mathbf{x}\in D$. Очевидно, что $\beta_2\in K_3$ и для неё справедливо неравенство

$$((\beta_2-\hat\beta)\hat\varphi^3,\theta)=((\beta_1-\hat\beta)\hat\varphi^3,\theta)_D<0,$$

противоречащее (43).

Из лемм 3.1 и 1.3 вытекает

Следствие 3.1. *Неравенство (43) эквивалентно неравенству*

$$(\beta-\hat\beta)\theta\geqslant 0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega \quad \text{для всех} \quad \beta\in K_3. \tag{44}$$

Из (44) следует, что если $\theta<0$ п.в. в $D_1\subseteq\Omega$, то $\beta\leqslant\hat\beta$ п.в. в D_1 для всех $\beta\in K_3$. Тогда $\hat\beta=\beta_{\max}$ п.в. в D_1. В свою очередь, $\hat\beta=\beta_{\min}$ п.в. в $D_2\subseteq\Omega$, если $\theta>0$ п.в. в D_2.

Обратимся к функционалам $I_i(\varphi)$, $i=1,2$, введённым равенствами (30). Очевидно, что если $I_i(\hat\varphi)>0$, то $\hat\varphi\neq\varphi^d$ в $Q_1\subseteq Q$, $\operatorname{meas} Q_1>0$. Покажем, что при этом $\theta\neq 0$ по крайней мере п.в. в Q_1.

Пусть $I(\varphi)=I_1(\varphi)$. Выбирая в соотношении (42) функцию τ из $H_0^1(\Omega)$ и рассуждая так же, как в [14], приходим к равенству

$$-(\operatorname{div}\hat\lambda\nabla\theta)+3\hat\beta\hat\varphi^2\theta-\mathbf{u}\cdot\nabla\theta=-(\hat\varphi-\varphi^d)\chi_Q \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \tag{45}$$

где χ_Q – характеристическая функция подобласти $Q\subset\Omega$. Из (45) вытекает, что $\theta\neq 0$ п.в. в Q_1. Используя (42), несложно показать, что аналогичный результат верен для функционала I_2.

Справедлива

Теорема 3.2. *Пусть выполнены предположения (i), (ii), (iv), (vi), (ix) и условие (jjj′). Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\hat\varphi,\hat\beta)\in H^1(\Omega)\times K_3$ *задачи (41), которому соответствует единственный множитель Лагранжа* $\mathbf{y}^*=(\theta,\zeta)\in Y^*$, *удовлетворяющий соотношениям (42), (43). Пусть* $I(\hat\varphi)=I_i(\hat\varphi)>0$, $i=1,2$. *Тогда* $\hat\beta=\beta_{\min}$, *если* $\theta>0$, *и* $\hat\beta=\beta_{\max}$, *если* $\theta<0$.

Следствие 3.2. Если $I(\hat\varphi)=I_i(\hat\varphi)>0$, $i=1,2$, то оптимальное управление $\hat\beta$ задачи (41) не может быть внутренней точкой множества K_3.

Замечание 3.2. Если существует подмножество $D_0\subset\Omega$, $\operatorname{meas} D_0>0$, на котором $\theta=0$, то в этом подмножестве управление $\hat\beta$ принимает значение $\beta_{\max}$ или $\beta_{\min}$, а свойство bang-bang для задачи (41) является *не строгим.* Если $\theta\neq 0$ п.в. в Ω, то свойство bang-bang для задачи (41) называют *строгим*, так как не нужно уточнять поведение $\hat\beta$ при $\theta=0$ (см. [8]). Например, если $I(\varphi)=(1/2)\|\varphi-\varphi^d\|_\Omega^2$ и вместо $I(\hat\varphi)>0$ выполняется более жёсткое условие $\hat\varphi\neq\varphi^d$ п.в. в Ω, то из равенства (45) вытекает, что $\theta\neq 0$ п.в. в Ω.

Заключение. Отметим, что интерес к свойству bang-bang вызван исследованием задач управления, в которых из практических соображений не используется регуляризация. В частности, такая постановка задач управления используется при исследовании прикладных задач тепловой и электромагнитной маскировки (см., например, работу [23] и приведённые в ней ссылки).

Исследования Бризицкого Р.В. и Сарицкой Ж.Ю. выполнены в рамках государственного задания Института прикладной математики ДВО РАН (тема 075-01095-20-00), исследования Быстровой В.С. – при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 075-15-2019-1878).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ito K., Kunish K.* Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // Inverse Probl. 1997. V. 14. P. 995–1013.
2. *Nguyen P.A., Raymond J.-P.* Control problems for convection-diffusion equations with control localized on manifolds // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Var. 2001. V. 6. P. 467–488.
3. *Короткий А.И., Ковтунов Д.А.* Оптимальное граничное управление системой, описывающей тепловую конвекцию // Тр. Ин-та математики и механики УРО РАН. 2006. Т. 16. № 1. С. 76–101.
4. *Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А.* Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. механика и техн. физика. 2008. № 4. С. 24–35.
5. *Nguyen P.A., Raymond J.-P.* Pointwise control of the Boussinesq system // Systems Contr. Lett. 2011. V. 60. P. 249–255.
6. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Двухпараметрические экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1645–1664.
7. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1590–1597.
8. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. P. 678–689.
9. *Алексеев Г.В., Левин В.А.* Оптимизационный метод в задачах тепловой маскировки материальных тел // Докл. РАН. 2016. Т. 471. № 1. С. 32–36.
10. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Об устойчивости решений задач управления для уравнения конвекции-диффузии-реакции с сильной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 493–504.
11. *Brizitskii R.V., Saritskaya Zh.Yu.* Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. V. 26. № 6. P. 821–833.
12. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции-диффузии-реакции // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 17–33.
13. *Belyakov N.S., Babushok V.I., Minaev S.S.* Influence of water mist on propagation and suppression of laminar premixed // Combustion Theory and Modeling. 2018. V. 22. № 2. P. 394–409.
14. *Алексеев Г.В., Вахитов И.С., Соболева О.В.* Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диффузии-реакции // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2012. Т. 52. № 12. С. 2190–2205.
15. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
16. *Ладыженская О.Н., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1964.
17. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
18. *Berninger H.* Non-overlapping domain decomposition for the Richards equation via superposition operators // Domain Decomposition Methods in Sci. and Engineering XVIII. Jerusalem, 2009. P. 169–176.
19. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Оценки устойчивости решений задач управления для уравнений Максвелла при смешанных граничных условиях // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 8. С. 993–1004.
20. *Алексеев Г.В.* Оценки устойчивости в задаче маскировки материальных тел для уравнений Максвелла // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 12. С. 1863–1878.
21. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
22. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
23. *Alekseev G.V., Tereshko D.A.* Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2019. V. 135. P. 1269–1277.

Институт прикладной математики ДВО РАН,
г. Владивосток,
Дальневосточный федеральный университет,
г. Владивосток

Поступила в редакцию 09.04.2020 г.
После доработки 08.02.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.