ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 649–654

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:532.5

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ МЕРЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТРЁХОСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ–СЖАТИЯ ВЯЗКОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

© 2021 г. Д. В. Георгиевский

Рассматривается нестационарное трёхосное растяжение–сжатие движущегося и изменяющего в процессе движения линейные размеры (при постоянном объёме) параллелепипеда, заполненного ньютоновской вязкой жидкостью. Приводится постановка линеаризованной задачи в терминах трёхмерных возмущений, наложенных на основной процесс. Для исследования этой задачи применяется метод интегральных соотношений, основанный на использовании вариационных неравенств для оценок квадратичных функционалов. Данные оценки приводят к достаточным интегральным признакам устойчивости по энергетической мере при малых возмущениях – к признакам устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости. Выводится система линейных неравенств, включающих два характерных числа Рейнольдса, при выполнении которой начальная трёхмерная картина возмущений заведомо экспоненциально устойчива.

DOI: 10.31857/S0374064121050071

1. Кинематика трёхосного растяжения–сжатия пространства. Рассмотрим течение несжимаемой однородной ньютоновской жидкости с плотностью ρ и динамической вязкостью μ во всём трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$ на полубесконечном интервале времени $t > 0$. Положим, что при эйлеровом описании движения компоненты вектора (v_1, v_2, v_3) скорости являются следующими функциями $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и t:

$$v_1 = -k(t)x_1, \quad v_2 = -m(t)x_2, \quad v_3 = (k+m)(t)x_3, \tag{1.1}$$

где $k(t)$ и $m(t)$ – заданные при $t > 0$ непрерывно-дифференцируемые функции. Как видим, поле скорости (1.1) обеспечивает несжимаемость и соответствует нестационарному трёхосному растяжению–сжатию сплошной среды в $\mathbb{R}^3$.

Из уравнений (1.1) при начальных условиях $x_j|_{t=0} = \xi_j$, $j = 1, 2, 3$, следует лагранжев закон движения:

$$x_1 = \xi_1 \exp\biggl(-\int\limits_0^t k(\tau)\,d\tau\biggr), \quad x_2 = \xi_2 \exp\biggl(-\int\limits_0^t m(\tau)\,d\tau\biggr), \quad x_3 = \xi_3 \exp\biggl(\int\limits_0^t (k+m)(\tau)\,d\tau\biggr).$$

Плоскости, состоящие из лагранжевых частиц и параллельные в начальный момент координатным плоскостям, движутся параллельно самим себе. Следовательно, материальные частицы, принадлежащие при $t = 0$ параллелепипеду

$$\Omega_0 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : a_{10} < \xi_1 < a_{20}, \ \ b_{10} < \xi_2 < b_{20}, \ \ c_{10} < \xi_3 < c_{20}\}, \tag{1.2}$$

где a_{i0}, b_{i0}, c_{i0} – вещественные постоянные, $i = 1, 2$, остаются при $t > 0$ принадлежащими параллелепипеду

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : a_1(t) < x_1 < a_2(t), \ \ b_1(t) < x_2 < b_2(t), \ \ c_1(t) < x_3 < c_2(t)\}, \tag{1.3}$$

при этом

$$a_i(t) = a_{i0} \exp\biggl(-\int\limits_0^t k(\tau)\,d\tau\biggr), \quad b_i(t) = b_{i0} \exp\biggl(-\int\limits_0^t m(\tau)\,d\tau\biggr), \quad c_i(t) = c_{i0} \exp\biggl(\int\limits_0^t (k+m)(\tau)\,d\tau\biggr),$$

где $i = 1, 2$. В силу несжимаемости жидкости объём параллелепипеда Ω не зависит от времени:
$$(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1) \equiv (a_{20} - a_{10})(b_{20} - b_{10})(c_{20} - c_{10}).$$

Найдём напряжённое состояние, соответствующее в вязкой среде кинематике (1.1). Ненулевые компоненты тензора напряжений Коши $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ равны
$$\sigma_{11} = -p - 2\mu k, \quad \sigma_{22} = -p - 2\mu m, \quad \sigma_{33} = -p + 2(k + m), \tag{1.4}$$
где $p(\mathbf{x}, t)$ – давление в несжимаемой среде, удовлетворяющее трём уравнениям Навье–Стокса:
$$p_{,1} = \rho(\dot{k} - k^2)x_1, \quad p_{,2} = \rho(\dot{m} - m^2)x_2, \quad p_{,3} = -\rho(\dot{k} + \dot{m} + (k + m)^2)x_3, \tag{1.5}$$
здесь запятые в индексе означают частное дифференцирование по соответствующей координате или по времени. Интегралом уравнений (1.5) служит функция
$$p = \frac{\rho}{2}[(\dot{k} - k^2)x_1^2 + (\dot{m} - m^2)x_2^2 - (\dot{k} + \dot{m} + (k + m)^2)x_3^2] + p_0(t), \tag{1.6}$$
содержащая в качестве слагаемого произвольное давление $p_0(t)$, которое по смыслу представляет собой давление в начале координат.

Сузим далее область, занимаемую вязкой средой, со всего трёхмерного пространства до параллелепипеда Ω (см. (1.3)), тем самым переходя к анализу процесса трёхосного растяжения–сжатия параллелепипеда. В такого рода процессах, важных в технологии обработки материалов [1, 2], функции $k(t)$ и $m(t)$ обычно периодичны с соизмеримыми между собой периодами. В дальнейшем для общности изложения условия периодичности налагать не будем.

2. Линеаризованная задача в возмущениях и её анализ методом интегральных соотношений. Положим, что рассмотренный выше процесс, характеризуемый скоростями (1.1) и напряжениями (1.4), (1.6), является *основным*, или *невозмущённым*. Наложим на него трёхмерную картину возмущений $\delta v_i(\mathbf{x}, t)$, $\delta\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $i, j = 1, 2, 3$. Функции времени a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, k и m, а следовательно, и границы параллелепипеда Ω (см. (1.3)) не претерпевают изменений в возмущённом движении по сравнению с основным процессом. Начальные значения $\delta v_i(\mathbf{x}, 0)$ считаются известными во всей области Ω_0 (см. (1.2)).

Запишем замкнутую линеаризованную систему четырёх уравнений относительно четырёх неизвестных функций $\delta v_i(\mathbf{x}, t)$ и $\delta p(\mathbf{x}, t)$. Для упрощения будем опускать знаки вариаций δ:
$$\begin{gathered}
-p_{,1} + \mu\Delta v_1 = \rho(v_{1,t} - kv_1 - kx_1 v_{1,1} - mx_2 v_{1,2} + (k + m)x_3 v_{1,3}),\\
-p_{,2} + \mu\Delta v_2 = \rho(v_{2,t} - mv_2 - kx_1 v_{2,1} - mx_2 v_{2,2} + (k + m)x_3 v_{2,3}),\\
-p_{,3} + \mu\Delta v_3 = \rho(v_{3,t} + (k + m)v_3 - kx_1 v_{3,1} - mx_2 v_{3,2} + (k + m)x_3 v_{3,3}),\\
v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = 0,
\end{gathered} \tag{2.1}$$
где Δ – трёхмерный оператор Лапласа.

Однородные кинематические граничные условия заданы на шести движущихся плоских гранях параллелепипеда Ω:
$$\mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0: \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0, \tag{2.2}$$
и означают, что в возмущённом движении распределение скоростей на этих гранях такое же, как и в основном, т.е. описывается эйлеровым законом (1.1).

Для аналитического исследования задачи (2.1), (2.2) воспользуемся методом интегральных соотношений [3], оперирующим с квадратичными функционалами, построенными на векторном поле $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t), v_3(\mathbf{x}, t))$. Введём обозначения для некоторых таких зависящих от t функционалов:
$$J_1^2(t) = \int\limits_\Omega (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(\mathbf{x}, t)\, d\Omega \equiv \int\limits_\Omega |\mathbf{v}|^2(\mathbf{x}, t)\, d\Omega, \tag{2.3}$$

$$J_2^2(t) = \int\limits_\Omega (v_{j,i}v_{j,i})(\mathbf{x},t)\,d\Omega \equiv \int\limits_\Omega (|\mathbf{v}_{,1}|^2 + |\mathbf{v}_{,2}|^2 + |\mathbf{v}_{,3}|^2)(\mathbf{x},t)\,d\Omega.$$

По повторяющимся два раза индексам, обозначенным малыми латинскими буквами, производится суммирование от 1 до 3.

Умножим первое уравнение в системе (2.1) на v_1, второе на v_2, третье на v_3, затем сложим полученные равенства и проинтегрируем по Ω в предположении, что все интегралы существуют. Примем во внимание равенство

$$\int\limits_\Omega p_{,i}v_i\,d\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} pv_in_i\,d\Sigma - \int\limits_\Omega pv_{i,i}\,d\Omega, \tag{2.4}$$

справедливое в силу четвёртого уравнения системы (2.1) и однородных граничных условий (2.2) (n_i – компоненты единичной внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$), а также равенство

$$\int\limits_\Omega v_{i,t}v_i\,d\Omega = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (|\mathbf{v}|^2)_{,t}\,(\mathbf{x},t)\,d\Omega = \frac{1}{2}\frac{dJ_1^2}{dt}, \tag{2.5}$$

которое имеет место в силу формулы дифференцирования по времени интеграла с зависящими от t пределами:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega f(\mathbf{x},t)\,d\Omega = \int\limits_{c_1}^{c_2}\int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 +$$

$$+\,\dot c_2\int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x_1,x_2,c_2(t),t)\,dx_1\,dx_2 - \dot c_1\int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x_1,x_2,c_1(t),t)\,dx_1\,dx_2 +$$

$$+\,\dot b_2\int\limits_{c_1}^{c_2}\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x_1,b_2(t),x_3,t)\,dx_1\,dx_3 - \dot b_1\int\limits_{c_1}^{c_2}\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x_1,b_1(t),x_3,t)\,dx_1\,dx_3 +$$

$$+\,\dot a_2\int\limits_{c_1}^{c_2}\int\limits_{b_1}^{b_2} f(a_2(t),x_2,x_3,t)\,dx_2\,dx_3 - \dot a_1\int\limits_{c_1}^{c_2}\int\limits_{b_1}^{b_2} f(a_1(t),x_2,x_3,t)\,dx_2\,dx_3. \tag{2.6}$$

В качестве f в (2.5) выступает функция $|\mathbf{v}|^2$, равная нулю на всех шести гранях параллелепипеда Ω. Поэтому подынтегральные функции в шести двукратных интегралах в (2.6) нулевые. Кроме того, выполняется равенство

$$\int\limits_\Omega (v_1\Delta v_1 + v_2\Delta v_2 + v_3\Delta v_3)\,d\Omega = -J_2^2, \tag{2.7}$$

опять же на основании однородных граничных условий (2.2).

С учётом равенств (2.4), (2.5) и (2.7) из системы (2.1) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{dJ_1^2}{dt} = K - \nu J_2^2, \tag{2.8}$$

где ν – кинематическая вязкость ньютоновской среды, а зависящий от t квадратичный функционал K имеет вид

$$K = \int\limits_\Omega (kv_1^2 + mv_2^2 - (k+m)v_3^2 + kx_1v_{i,1}v_i + mx_2v_{i,2}v_i - (k+m)x_3v_{i,3}v_i)\,d\Omega.$$

Воспользуемся теперь [4, с. 29–30] неравенством Коши–Буняковского для функций из пространства $L_2(\Omega)$:

$$K \leqslant MJ_1^2 + |k|l_1\|v_{i,1}\|\|v_i\| + |m|l_2\|v_{i,2}\|\|v_i\| + |k+m|l_3\|v_{i,3}\|\|v_i\|, \tag{2.9}$$

где

$$M(t) = \max\{|k(t)|, |m(t)|, |(k+m)(t)|\}, \quad l_\alpha(t) = \sup_\Omega |x_\alpha|,$$

$$l(t) = \max_{\alpha=1,2,3} l_\alpha = \max\{|a_1(t)|, |a_2(t)|, |b_1(t)|, |b_2(t)|, |c_1(t)|, |c_2(t)|\}. \tag{2.10}$$

В неравенстве (2.9) и всюду далее имеется в виду норма пространства $L_2(\Omega)$.

Так как произведение не превосходит полусуммы квадратов, верхнюю оценку (2.9) функционала K можно продолжить следующим образом:

$$K \leqslant MJ_1^2 + \frac{|k|}{2}(l_1^2\|v_{1,1}\|^2 + \|v_1\|^2 + l_1^2\|v_{2,1}\|^2 + \|v_2\|^2 + l_1^2\|v_{3,1}\|^2 + \|v_3\|^2) +$$

$$+ \frac{|m|}{2}(l_2^2\|v_{1,2}\|^2 + \|v_1\|^2 + l_2^2\|v_{2,2}\|^2 + \|v_2\|^2 + l_3^2\|v_{3,2}\|^2 + \|v_3\|^2) +$$

$$+ \frac{|k+m|}{2}(l_3^2\|v_{1,3}\|^2 + \|v_1\|^2 + l_3^2\|v_{2,3}\|^2 + \|v_2\|^2 + l_3^2\|v_{3,3}\|^2 + \|v_3\|^2). \tag{2.11}$$

Пусть далее $\Lambda^2(t)$ – минимизирующий множитель в неравенстве Фридрихса

$$J_2^2(\mathbf{v}) \geqslant \Lambda^2(t) J_1^2(\mathbf{v}) \tag{2.12}$$

для всех векторных полей $\mathbf{v}$ с компонентами $v_i \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющими условиям (2.2). На явном нахождении функции $\Lambda^2(t)$ остановимся позже.

Из неравенств (2.11), (2.12) следует, что при выполнении условия

$$2\nu > Ml^2, \quad t > 0, \tag{2.13}$$

левая часть равенства (2.8) допускает оценку

$$\frac{dJ_1^2}{dt} \leqslant G(t)J_1^2, \quad G = 5M - \Lambda^2(2\nu - Ml^2). \tag{2.14}$$

Неравенство (2.13), принадлежащее эвлюционному типу, приводит к окончательной искомой оценке изменения во времени функционала $J_1^2(t)$:

$$J_1^2(t) \leqslant J_1^2(0) \exp\left(\int\limits_0^t G(\tau)\, d\tau\right). \tag{2.15}$$

Из определения (2.3) видим, что с точностью до множителя $\rho/2$ этот квадратичный функционал имеет смысл кинетической энергии объёма Ω, построенной по полю возмущений $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ вектора скорости. В связи с этим неравенство (2.15) является энергетической, или интегральной по мере L_2, оценкой развития возмущений, наложенных на основной процесс растяжения–сжатия (1.1). Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Ограниченность при $t \to \infty$ экспоненты в неравенстве (2.15), в котором функция $G(t)$ имеет вид (2.14), в совокупности с оценкой (2.13) служит достаточным условием устойчивости по Ляпунову в смысле энергетической меры (2.3) трёхмерной картины возмущений основного процесса, описываемого кинематикой (1.1).*

Стремление к нулю при $t \to \infty$ экспоненты в (2.15) в совокупности с оценкой (2.13) служит достаточным условием асимптотической устойчивости в смысле энергетической меры (2.3) этой трёхмерной картины.

3. Нахождение минимизирующего множителя $\boldsymbol{\Lambda^2(t)}$. Поскольку каждая из функций $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяет граничным условиям (2.2), имеют место неравенства Фридрихса [5, § 4.1] (следующие ниже девять неравенств слева) и их следствия для интегралов по всей области Ω (девять неравенств справа):

$$\int_{a_1}^{a_2} v_{i,1}^2\, dx_1 \geqslant \frac{\pi^2}{(a_2 - a_1)^2} \int_{a_1}^{a_2} v_i^2\, dx_1 \Longrightarrow \int_{\Omega} v_{i,1}^2\, d\Omega \geqslant \frac{\pi^2}{(a_2 - a_1)^2} \int_{\Omega} v_i^2\, d\Omega, \tag{3.1}$$

$$\int_{b_1}^{b_2} v_{i,2}^2\, dx_2 \geqslant \frac{\pi^2}{(b_2 - b_1)^2} \int_{b_1}^{b_2} v_i^2\, dx_2 \Longrightarrow \int_{\Omega} v_{i,2}^2\, d\Omega \geqslant \frac{\pi^2}{(b_2 - b_1)^2} \int_{\Omega} v_i^2\, d\Omega, \tag{3.2}$$

$$\int_{c_1}^{c_2} v_{i,3}^2\, dx_3 \geqslant \frac{\pi^2}{(c_2 - c_1)^2} \int_{c_1}^{c_2} v_i^2\, dx_3 \Longrightarrow \int_{\Omega} v_{i,3}^2\, d\Omega \geqslant \frac{\pi^2}{(c_2 - c_1)^2} \int_{\Omega} v_i^2\, d\Omega. \tag{3.3}$$

Суммируя девять неравенств справа в импликациях (3.1)–(3.3), убеждаемся, что в неравенстве (2.12) можно положить

$$\Lambda^2(t) = \pi^2((a_2 - a_1)^{-2} + (b_2 - b_1)^{-2} + (c_2 - c_1)^{-2}). \tag{3.4}$$

Итак, функция времени $G(t)$ полностью определена. В неё в оценке (2.14) помимо постоянной кинематической вязкости ν входят функции $M(t)$, $l(t)$ и $\Lambda^2(t)$, определяемые в (2.10) и (3.4) лишь основным движением.

4. Экспоненциальные оценки устойчивости по энергетической мере. Оценку (2.15), хотя в неё и входит экспонента, в полной мере экспоненциальной назвать нельзя, поскольку $G(t)$ может быть произвольной функцией. Если же существует $G_0 = \mathrm{const}$, такая что $G(t) \leqslant G_0$ при $t > 0$, то в силу (2.14) получаем

$$\frac{dJ_1^2}{dt} \leqslant G_0 J_1^2.$$

Это неравенство даёт уже экспоненциальную оценку

$$J_1^2(t) \leqslant J_1^2(0)\mathrm{e}^{G_0 t},$$

так что в случае $G_0 < 0$ и, разумеется, при выполнении требования (2.13) имеет место экспоненциальная устойчивость основного процесса по энергетической мере.

Пусть существуют следующие верхние и нижние грани функций:

$$\sup_{t>0} M(t) = M_0, \quad \sup_{t>0} l(t) = l_0, \quad \inf_{t>0} \Lambda^2(t) = \Lambda_0^2.$$

Тогда в силу (2.13) и (2.14) в качестве постоянной G_0 можно взять величину

$$G_0 = 5M_0 - \Lambda_0^2(2\nu - M_0 l_0^2).$$

Образуем два безразмерных числа $\mathsf{R}_1 = M_0 l_0^2/\nu$ и $\mathsf{R}_2 = M_0/(\Lambda_0^2 \nu)$, по сути являющиеся числами Рейнольдса, построенными по двум характерным длинам l_0 и $1/\Lambda_0$. Доказана

Теорема 2. *Выполнения системы неравенств* $\mathsf{R}_1 < 2$, $\mathsf{R}_2 < (2 - \mathsf{R}_1)/5$ *достаточно для экспоненциальной устойчивости в смысле энергетической меры (2.3) трёхмерной картины возмущений основного процесса, описываемого кинематикой (1.1).*

Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, относящиеся к оценкам развития возмущений, наложенных на другие характерные в приложениях существенно нестационарные течения сплошной среды, сформулированы в недавних работах [6–9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-29-10085мк и 19-01-00016а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U.* Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. Berlin; Heidelberg; New York, 2001.
2. *Чумаченко Е.Н., Смирнов О.М., Цепин М.А.* Сверхпластичность: материалы, теория, технологии. М., 2009.
3. *Козырев О.Р., Степаньянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техн. Сер. Механика жидкости и газа. 1991. Т. 25. С. 3–89.
4. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985.
5. *Кравчук А.С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М., 1997.
6. *Георгиевский Д.В.* Постановки линеаризованных краевых задач механики сплошной среды со спектральным параметром в граничных условиях // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 683–690.
7. *Георгиевский Д.В.* Малые возмущения диффузионно-вихревых течений ньютоновской жидкости в полуплоскости // Прикл. математика и механика. 2020. Т. 84. № 2. С. 151–157.
8. *Georgievskii D.V., Putkaradze V.G.* Evolution of perturbations imposed on 1D nonsteady shear in viscous half-plane with oscillating boundary // Rus. J. Math. Phys. 2020. V. 27. № 2. P. 212–217.
9. *Георгиевский Д.В.* Оценки экспоненциального затухания возмущений, наложенных на продольные гармонические колебания вязкого слоя // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1366–1375.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики, г. Москва,
Научный центр мирового уровня
“Сверхзвук – МГУ”, г. Москва

Поступила в редакцию 19.02.2021 г.
После доработки 19.02.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.