ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 655–672

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226+517.925.7

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЯДОВ ПУАССОНА В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕРЕГУЛЯРНО ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2021 г. Д. П. Емельянов, И. С. Ломов

Рассматривается краевая задача для заданного в прямоугольнике вырождающегося по одной из переменных эллиптического дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами. С использованием метода спектрального выделения особенностей построено решение этой задачи в виде ряда Пуассона – ряда по собственным функциям предельного линейного обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с аналитическими коэффициентами. Получены оценки функций фундаментальной системы решений и функций Грина соответствующей этому оператору последовательности граничных задач, что позволило ослабить известные ранее условия сходимости построенного для решения ряда, в том числе в случае наличия логарифмических особенностей.

DOI: 10.31857/S0374064121050083

Введение. Рассмотрим следующую краевую задачу (задачу E согласно терминологии М.В. Келдыша [1]) для нерегулярно вырождающегося эллиптического уравнения в прямоугольнике $D=\{(x,y): 0<x<1,\ \ 0<y<b\}\equiv(0,1)\times(0,b)$:

$$u''_{xx}+y^2u''_{yy}+c(y)u'_y-a(y)u=f(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

$$u(0,y)=u(1,y)=u(x,b)=0,\quad |u(x,0)|<+\infty. \tag{1}$$

Коэффициенты $a(z)$, $c(z)$ дифференциального оператора при $z\in\mathbb{C}$ считаем аналитическими функциями в круге $U=\{z\in\mathbb{C}: |z|<R\}$, $R>b$ $(y=\operatorname{Re}z)$. Кроме того, функции $a(y)$ и $c(y)$ неотрицательны при $y\in[0,b]$, $c(0)=0$, правая часть уравнения $f(x,y)$ при каждом фиксированном x аналитична по y при $y\in[0,b]$ и непрерывна по совокупности переменных в $\overline{D}$.

Однородная задача (1) $(f\equiv 0)$ для области с гладкой границей была поставлена М.В. Келдышем в [1; 2, с. 299–301], им доказаны существование и единственность её классического решения. Явного вида решения приведено не было. Рассмотрены другие задачи с коэффициентом y^m при производной u_{yy}, указаны условия корректной разрешимости краевых задач в терминах показателя m и знаков коэффициентов уравнения задачи (1). Эти задачи исследовались и другими авторами. Отметим работы А.И. Янушаускаса [3, гл. 4], М.М. Смирнова [4, с. 88–94] $(0<m<2)$, Е.И. Моисеева [5, с. 73–88] (y^m – при производной u_{xx}, $m>0$), В.М. Ивакина [6] $(m>2)$, И.М. Петрушко [7] $(m=1)$ и др. Решения этих задач получены либо в виде интегралов (метод функций Грина), либо в виде биортогональных рядов; изучалось также асимптотическое поведение решений при $y\to 0$.

В [8; 9; 10, гл. X] предложен новый метод исследования таких задач – метод спектрального выделения особенностей, позволяющий построить решение задачи в виде ряда Пуассона по собственным функциям предельного оператора $(y=0)$ и указать, каким образом наличие вырождения уравнения сказывается на решении и каким образом аналитичность коэффициентов уравнения наследуется решением задачи (обобщение теоремы Коши–Ковалевской). Исследован случай задачи (1) с нулевым коэффициентом $c(y)$. В [11] изучена задача (1) с ненулевым коэффициентом $c(y)$.

В данной работе продолжается изучение задачи (1). Применяется метод функции Грина для вспомогательных задач для вырождающихся обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка. Это позволило снять некоторые ограничения на коэффициенты уравнения (снимается условие на “малые знаменатели”).

От задачи (1) переходим к расширенной (регуляризованной) задаче, решение которой ищем в виде ряда Пуассона

$$v(x,y,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}[\tau_k\varphi_k(y)+\eta_k(y)]\psi_k(x),$$

где φ_k, η_k – аналитические функции, представимые на $[0,b]$ рядами по степеням y, а $\psi_k(x) = \sin(\pi kx)$ – собственные функции “предельного” оператора

$$L:\ lw(x)\equiv -w''(x)+a(0)w(x),\quad x\in(0,1),\quad w(0)=w(1)=0,$$

отвечающие собственным значениям $\lambda_k=-k^2\pi^2-a(0)$. Расширенная задача получается из исходной задачи (1) после перехода в пространство бесконечной размерности (по аналогии с методом регуляризации сингулярных возмущений [10, гл. 1, § 2]), $\tau=(\tau_1,\tau_2,\ldots)$ – новые независимые переменные, τ_k отвечает своему собственному значению λ_k, $k=1,2,\ldots$ При $\tau_k = (y/b)^{r_k}$ (r_k записаны ниже) решение расширенной задачи переходит в решение задачи (1). Новые переменные позволяют описать особенности решения, связанные с вырождением эллиптического оператора.

Для нахождения функций φ_k, η_k приходим к необходимости решить серию задач следующего вида (далее обозначаем неизвестную функцию буквой $y=y(x)$ с нижними индексами):

$$\begin{gathered} x^2y_k''+c(x)y_k'-(a(x)+\pi^2k^2)y_k=f_k(x),\quad x\in(0,b),\\ |y_k(0)|<+\infty,\quad y_k(b)=0, \end{gathered}\tag{2}$$

где $k\in\mathbb{N}$, а $f_k(t)$ – коэффициенты спектрального разложения $f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\psi_k(x)$.

В п. 1 исследуются задачи (2). Для задачи (2) получены оценки функции Грина и её производной (через параметр k). Исследованы функции из фундаментальной системы решений задачи (2), для которых также получены необходимые оценки. Подобные результаты для функции Грина в самосопряжённом случае для ОДУ без вырождения следуют, например, из результатов [12, гл. I]. Общие результаты для задачи Коши для систем ОДУ без вырождения изложены в [13, гл. VI].

Вернёмся к задаче (1). Установлено (в [8; 9; 10, гл. X] при $c(y)=0$ и [11]), что при выполнении условия (условие на “малые знаменатели”)

$$\min_{n\in\mathbb{N}_0}|n(n-1)+nc'(0)-\pi^2k^2-a(0)|\geqslant \mathrm{const}\times\pi^2k^2q_0^{\pi k},\quad q_0>b/R,\quad k\in\mathbb{N},$$

и некоторых требованиях на правую часть $f(x,y)$ (например, аналитичность в $\overline{D}$) классическое решение задачи (1) существует и представляется рядом

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(\eta_k(y)+(y/b)^{r_k}\varphi_k(y))\sin(\pi kx),\tag{3}$$

функции $\eta_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ в котором являются аналитическими в круге U. Ряд сходится равномерно в $\overline{D}$ и допускает двукратное почленное дифференцирование по x и по y в области D.

Условие на малые знаменатели выполняется, если, например, значения $a(0)$ и $c'(0)$ рациональны. Это условие не является устойчивым относительно малых возмущений коэффициентов уравнения. В данной работе приведённый результат будет доказан без использования условия на малые знаменатели.

Результат работы можно трактовать как обобщение теоремы Коши–Ковалевской на вырождающиеся эллиптические уравнения рассматриваемого вида – предложенная форма решения указывает, каким образом аналитичность коэффициентов уравнения наследуется решением задачи.

В п. 2 результаты, установленные в п. 1, применены для построения решения задачи (1).

1. Оценки функции Грина краевой задачи для квадратично вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения.

1.1. Свойства решений дифференциального уравнения с произвольным вырождением. Установим ряд свойств решений однородных уравнений более общего вида. Данные свойства будут полезны нам в дальнейшем. Рассмотрим уравнения

$$x^m y_k'' + c(x)y_k' - (a(x) + \pi^2k^2)y_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где m – произвольное положительное число.

Лемма 1. *Решение уравнения (4) при* $a(x)+\pi^2k^2 > 0$ *не может иметь положительного максимума или отрицательного минимума во внутренней точке никакого отрезка* $T \subset \subset [0,b]$.

Доказательство. Докажем утверждение для положительного максимума. Случай минимума доказывается аналогично. Пусть $\xi \in T \setminus \partial T$ – точка положительного максимума. Так как решение y_k уравнения (4) аналитично в точке ξ в силу аналитичности коэффициентов дифференциального оператора, то выполняются необходимые условия максимума: $y_k'(\xi) = 0,$ $y_k''(\xi) \leqslant 0.$ Тогда для решения y_k в точке ξ в силу уравнения получаем

$$\xi^m y_k''(\xi) = (a(\xi) + \pi^2k^2)y_k(\xi) > 0,$$

поскольку $y_k(\xi) > 0$ по предположению. Следовательно, так как $\xi^m > 0,$ выполняется неравенство $y_k''(\xi) > 0$ – противоречие. Лемма доказана.

Отметим, что проведённое доказательство верно и для любого вещественного показателя m.

Лемма 2. *Каждое нетривиальное решение уравнения (4) при* $a(x) + \pi^2k^2 > 0$ *имеет на отрезке* $[0,b]$ *не более одного нуля. Если этот нуль отличен от точки* $x = 0,$ *то он является простым.*

Доказательство. Предположим, что решение y_k обращается в нуль в точках ξ_1 и ξ_2 отрезка $[0,b]$. Рассмотрим его на $T = [\xi_1, \xi_2]$. В силу леммы 1 $y_k \equiv 0$ на $T,$ а в силу теоремы единственности аналитических функций $y_k \equiv 0$ и на $[0,b],$ что противоречит условию леммы. Таким образом, произвольное решение y_k обращается в нуль не более чем в одной точке.

Пусть $y_k(\xi) = 0,$ $\xi \neq 0.$ Если кратность данного нуля больше единицы, то в силу теоремы о единственности решения задачи Коши $y_k \equiv 0.$ Лемма доказана.

Лемма 3. *Существует номер* $k_0 \in \mathbb{N}$ *такой, что при каждом* $k \geqslant k_0$ *всякое нетривиальное решение уравнения (4), обращающееся в нуль на одном из концов отрезка* $[0,b],$ *будет строго монотонным.*

Доказательство. Используя уравнение (4), выразим решение y_k через его производные:

$$y_k = \frac{x^m y_k'' + c(x)y_k'}{a(x) + \pi^2k^2} \equiv A_k(x)y_k'' + C_k(x)y_k'. \tag{5}$$

Отметим, что функции $a(x),$ $c(x),$ $A_k(x)$ и $C_k(x)$ являются ограниченными функциями в следующем смысле:

$$\|a\|_{C^1[0,b]}, \|c\|_{C^1[0,b]}, \|A_k\|_{C[0,b]}, \|C_k\|_{C[0,b]} \leqslant M = \text{const}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Дифференцируя уравнение (4) по $x,$ получаем

$$x^m y_k''' + mx^{m-1}y_k'' + c(x)y_k'' + c'(x)y_k' - [a(x) + \pi^2k^2]y_k' - a'(x)y_k = 0. \tag{6}$$

Подставив выражение для $y_k(x)$ из представления (5) в уравнение (6), получим следующее дифференциальное соотношение для $y_k'(x)$:

$$x^m(y_k')'' + [mx^{m-1} + c(x) - a'(x)A_k(x)](y_k')' - [a(x) - c'(x) + a'(x)C_k(x) + \pi^2k^2](y_k') = 0.$$

В силу равномерной ограниченности коэффициентов последнего уравнения выберем номер k_0 таким, чтобы имело место неравенство

$$a(x) - c'(x) + a'(x)C_k(x) + \pi^2k^2 > 0, \quad x \in [0,b], \quad k \geqslant k_0.$$

Тогда для последнего уравнения выполнены все условия леммы 2, следовательно, y_k' может обращаться в нуль на $[0, b]$ не более чем в одной точке. Если это граничная точка, то $y_k'(x)$ не обращается в нуль на интервале $(0, b)$, а значит, сохраняет на нём знак, из чего следует строгая монотонность решения y_k.

Предположим, что $y_k'(\xi) = 0$, $\xi \in (0, b)$. Не ограничивая общности, пусть $y_k(\xi) > 0$. Если $y_k''(\xi) < 0$, то ξ – точка локального положительного максимума функции $y_k(x)$, что противоречит лемме 1. Следовательно, $y_k''(\xi) > 0$. По условию леммы $y_k(\eta) = 0$ при $\eta = 0$ или $\eta = b$, а тогда существует точка $\zeta \in (\xi, \eta)$ такая, что $y_k(\zeta) > y_k(\xi) > 0 = y_k(\eta)$, но это также противоречит лемме 1. Поэтому $y_k'(x) \neq 0$, $x \in (0, b)$. Но тогда $y_k'(x)$ сохраняет знак, а значит, $y_k(x)$ строго монотонна. Лемма доказана.

1.2. Ограниченные решения однородной задачи. Далее будем считать, что $m = 2$.

Исследуем решения следующих задач (однородные уравнения задачи (2) с её краевым условием в точке нуль, $k \in \mathbb{N}$):

$$x^2 y_k'' + c(x) y_k' - a(x) y_k - \pi^2 k^2 y_k = 0, \quad x \in [0, b],$$

$$|y_k(0)| < +\infty. \tag{7}$$

Разложим коэффициенты задачи в ряды Маклорена

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n. \tag{8}$$

Отметим, что при рассматриваемой постановке задачи (1) коэффициент c_1 неотрицателен.

В соответствии с [9, 11] проведём “регуляризацию” уравнения задачи (7). Оставим только главные члены из разложений в ряды Маклорена коэффициентов уравнения:

$$x^2 y_k'' + x c_1 y_k' - (a_0 + \pi^2 k^2) y_k = 0.$$

Для полученного дифференциального уравнения его “характеристическое уравнение”

$$r(r-1) + c_1 r - a_0 - \pi^2 k^2 = r^2 + (c_1 - 1) r - a_0 - \pi^2 k^2 = 0$$

имеет 2 корня. Введём для них обозначения:

$$r_k = \frac{1 - c_1 + \sqrt{(1-c_1)^2 + 4a_0 + 4\pi^2 k^2}}{2}, \quad r_k^- = \frac{1 - c_1 - \sqrt{(1-c_1)^2 + 4a_0 + 4\pi^2 k^2}}{2}.$$

Далее будет показано, что числа r_k соответствуют ограниченным решениям однородного уравнения (2), а числа r_k^- – неограниченным.

Решение задачи (7) будем искать в виде $y_k = (x/b)^r \varphi_k$, где φ_k – новая неизвестная функция, а постоянный показатель r пока не фиксируем. Подставляя это выражение в уравнение и сокращая затем на $(x/b)^r$, получаем

$$x^2 \varphi_k'' + 2rx\varphi_k' + r(r-1)\varphi_k + c(x)\varphi_k' + rc(x)x^{-1}\varphi_k - (a(x) + \pi^2 k^2)\varphi_k = 0.$$

Положим $r = r_k$, тогда

$$x^2 \varphi_k'' + 2r_k x \varphi_k' + c(x)\varphi_k' + r_k \overline{c}(x) x^{-1} \varphi_k - \overline{a}(x)\varphi_k = 0, \tag{9}$$

где $\overline{a}(x) \equiv a(x) - a_0$, $\overline{c}(x) \equiv c(x) - xc_1$.

Теорема 1. *Для любого номера k в классе $A(U)$ существует нетривиальное решение $\varphi_k(x)$ уравнения (9). Это решение не может обращаться в нуль в точке $x = b$. При дополнительном условии $\varphi_k(0) = 1$ решение единственно и равномерно ограничено по $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0, b]$ вместе с первой и второй производными.*

Доказательство. Пусть решение $\varphi_k(x)$ уравнения (9) в классе $A(U)$ существует. Представим его в виде ряда

$$\varphi_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{kn}x^n, \quad x\in[0,b], \tag{10}$$

подставим этот ряд и разложения (8) в уравнение (9):

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\varphi_{kn}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}2r_kn\varphi_{kn}x^n+\sum_{m=1}^{\infty}c_mx^m\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varphi_{k,n+1}x^n+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}r_kc_{m+1}x^m\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{kn}x^n-\sum_{m=1}^{\infty}a_mx^m\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{kn}x^n=0.$$

Пользуясь абсолютной сходимостью рядов внутри области сходимости, перемножим их почленно:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n+2r_k-1)\varphi_{kn}x^n+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_m(n+1)\varphi_{k,n+1}x^{n+m}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}r_kc_{m+1}\varphi_{kn}x^{n+m}-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_m\varphi_{kn}x^{n+m}=0.$$

Изменим порядок суммирования. Введём новый индекс суммирования $l=n+m$. Тогда выражение в левой части примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n+2r_k-1)\varphi_{kn}x^n+\sum_{l=1}^{\infty}\biggl(\sum_{m=1}^{l}c_m(l-m+1)\varphi_{k,l-m+1}\biggr)x^l+$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\biggl(\sum_{m=1}^{l}r_kc_{m+1}\varphi_{k,l-m}\biggr)x^l-\sum_{l=1}^{\infty}\biggl(\sum_{m=1}^{l}a_m\varphi_{k,l-m}\biggr)x^l=0.$$

Наконец, переобозначая $l=n$ и пользуясь единственностью разложения аналитической функции в ряд Тейлора, приходим к тождествам:

$$n(n+2r_k-1)\varphi_{kn}+\sum_{m=1}^{n}c_m(n-m+1)\varphi_{k,n-m+1}+r_k\sum_{m=1}^{n}c_{m+1}\varphi_{k,n-m}-\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_{k,n-m}=0, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Выберем $\varphi_{k,0}=1$. Тогда для остальных коэффициентов получим рекуррентные формулы:

$$\varphi_{kn}=-\frac{1}{n(n+2r_k-1+c_1)}\times$$

$$\times\biggl(\sum_{2\leqslant m\leqslant n}c_m(n-m+1)\varphi_{k,n-m+1}+r_k\sum_{1\leqslant m\leqslant n}c_{m+1}\varphi_{k,n-m}-\sum_{1\leqslant m\leqslant n}a_m\varphi_{k,n-m}\biggr), \quad n\in\mathbb{N},$$

где первая сумма при $n=1$ не содержит слагаемых. Единственность решения уравнения (9) доказана.

Докажем сходимость ряда для $\varphi_k(x)$ в U. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\vartheta'-d(x)\vartheta=0, \quad x\in[0,b], \quad \vartheta(0)=1,$$

где $d(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(|c_{n+2}|+|a_{n+1}|)x^n$. Её решение $\vartheta(x)=\exp\int_0^x d(\zeta)\,d\zeta$ является аналитической функцией в U. Найдём его в виде степенного ряда

$$\vartheta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_nx^n.$$

Подставим этот ряд в уравнение задачи и приравняем в получившемся равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\vartheta_{n+1}x^n-\sum_{m=0}^{\infty}(|c_{m+2}|+|a_{m+1}|)x^m\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_n x^n=0,$$

$$(n+1)\vartheta_{n+1}=\sum_{m=0}^{n}(|c_{m+2}|+|a_{m+1}|)\vartheta_{n-m},\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Так как $\vartheta(0)=1,$ то $\vartheta_0=1,$ и тогда для коэффициентов ряда получаем рекуррентные соотношения

$$\vartheta_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}(|c_{m+2}|+|a_{m+1}|)\vartheta_{n-m},\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Радиус сходимости R' полученного ряда определяется областью аналитичности функции $d(x)$ (см., например, [13, с. 102]). Функция $d(x)$ по построению аналитична в $U,$ следовательно, радиус R' не меньше $R.$

Вернёмся к ряду (10) для $\varphi_k(x).$ Очевидно, что $1=|\varphi_{k0}|\leqslant\vartheta_0=1.$ Пусть $|\varphi_{k,m}|\leqslant\vartheta_m,$ $m=\overline{0,n}.$ Докажем эту оценку для $n+1,$ имеем

$$|\varphi_{k,n+1}|\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2r_k+c_1)}\bigg(\sum_{m=2}^{n+1}|c_m|(n-m+2)|\varphi_{k,n-m+2}|+r_k\sum_{m=1}^{n+1}|c_{m+1}||\varphi_{k,n+1-m}|+$$

$$+\sum_{m=1}^{n+1}|a_m||\varphi_{k,n+1-m}|\bigg)\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2r_k+c_1)}\bigg(\sum_{m=2}^{n+2}|c_m|(n-m+2+r_k)\vartheta_{n-m+2}+$$

$$+\sum_{m=2}^{n+2}|a_{m-1}|\vartheta_{n-m+2}\bigg)\leqslant\frac{1}{n+1}\bigg(\sum_{m=2}^{n+2}|c_m|\vartheta_{n-m+2}+\sum_{m=2}^{n+2}|a_{m-1}|\vartheta_{n-m+2}\bigg)=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}(|c_{m+2}|+|a_{m+1}|)\vartheta_{n-m}=\vartheta_{n+1}.$$

В силу принципа математической индукции $|\varphi_{k,n}|\leqslant\vartheta_n,$ $n\in\mathbb{N}_0,$ $k\in\mathbb{N}.$

Применив к ряду (10) признак Вейерштрасса, установим его равномерную сходимость в U к решению уравнения (9). Выше было доказано, что при $\varphi_k(0)=1$ справедливы оценки

$$|\varphi_k(x)|\leqslant\vartheta(x),\quad x\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N}.$$

Аналогично получаем оценки

$$|\varphi_k'(x)|\leqslant\vartheta'(x),\quad |\varphi_k''(x)|\leqslant\vartheta''(x),\quad x\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N}.$$

Поскольку функции $\vartheta(x),$ $\vartheta'(x)$ и $\vartheta''(x)$ непрерывны на $[0,b],$ то отсюда следует равномерная ограниченность семейства функций $\varphi_k(x),$ $k\in\mathbb{N},$ вместе с их производными первого и второго порядков.

Наконец, решение задачи (7) имеет вид

$$y_k(x)=(x/b)^{r_k}\varphi_k(x),\quad y_k(0)=0,$$

следовательно, в силу леммы 2 имеем $y_k(b)=\varphi_k(b)\neq 0,$ как утверждается в теореме. Теорема доказана.

В дальнейшем условимся понимать под $\varphi_k(x)$ то решение уравнения (9), для которого $\varphi_k(0)=1.$

Теорема 2. *Существуют постоянные C_1 и C_2, не зависящие от k, такие, что*

$$0 < C_1 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant C_2, \quad y \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и признака равностепенной непрерывности каждое из множеств $\{\varphi_k\}$ и $\{\varphi_k'\}$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. Поэтому, как следует из теоремы Арцела, множество $\{\varphi_k\}$ предкомпактно в пространстве $C^1[0,b]$. Пусть $\mathring{\varphi}$ – какая-либо предельная точка этого множества в $C^1[0,b]$. Поделим уравнение (9) на r_k и затем перейдём в нём к пределу по той содержащейся в множестве $\{\varphi_k\}$ последовательности, которая равномерно на $[0,b]$ сходится к функции $\mathring{\varphi}$, а последовательность её производных – к функции $\mathring{\varphi}'$. Пользуясь ограниченностью коэффициентов уравнения, получаем предельную задачу Коши

$$\mathring{\varphi}' + \frac{\overline{c}(x)}{2x^2}\,\mathring{\varphi} = 0, \quad x \in [0,b], \quad \mathring{\varphi}(0) = 1.$$

Решение этой задачи единственно. Следовательно, множество $\{\varphi_k\}$ имеет единственную предельную точку в $C^1[0,b]$, и эта точка является решением данной задачи Коши. Так как

$$\mathring{\varphi}(x) = \exp\biggl(-\int\limits_0^x \frac{\overline{c}(\xi)}{2\xi^2}\,d\xi\biggr),$$

то найдутся постоянные A_1 и A_2 такие, что $0 < A_1 \leqslant \mathring{\varphi}(x) \leqslant A_2$. Так как $\varphi_k \xrightarrow{C[0,b]} \mathring{\varphi}$, то

$$0 < A_1/2 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant 2A_2, \quad x \in [0,b], \quad k \geqslant k_0.$$

Поскольку функция $y_k(x) = (x/b)^{r_k}\varphi_k(x)$ является решением однородного уравнения (7), $y_k(0) = 0$, то из этого заключаем, что $\varphi_k(x) > 0$ при $x \in [0,b]$, $k \in \mathbb{N}$ (лемма 2). Тогда для всех $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0,b]$ справедливы оценки

$$0 < C_1 = \min_{x\in[0,b]}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{k_0-1}(x), A_1/2) \leqslant \varphi_k(x) \leqslant C_2 = \max_{x\in[0,b]}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{k_0-1}(x), 2A_2).$$

Теорема доказана.

Обозначим построенные ограниченные решения задач (7) через $Y_k^0(x)$, т.е.

$$Y_k^0(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{r_k}\varphi_k(x).$$

Заметим, что при $k \geqslant k_0$ выполняется неравенство

$$\frac{dY_k^0}{dx}(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{r_k}\varphi_k'(x) + \frac{r_k}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k-1}\varphi_k(x) \geqslant \mathrm{const}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k}\left(\frac{r_k}{x} - \|\varphi_k'\|_{C[0,b]}\right), \quad x \in [0,b].$$

Теоремы 1 и 2 позволяют сделать заключение об оценках решений задач (7) при $k \geqslant k_0$, именно:

$$\tilde{C}_1\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k} \leqslant Y_k^0(x) \leqslant \tilde{C}_2\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k}, \quad \tilde{C}_1\frac{r_k}{x}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k} \leqslant \left|\frac{dY_k^0}{dx}(x)\right| \leqslant \tilde{C}_2\frac{r_k}{x}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k},$$

$$\left|\frac{d^2Y_k^0}{dx^2}(x)\right| \leqslant \tilde{C}_2\frac{r_k^2}{x^2}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k}, \quad x \in [0,b], \tag{12}$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ – положительные постоянные.

1.3. Неограниченные решения однородной задачи. Для анализа функции Грина задачи (2) установим аналогичные полученным в п. 1.2 соотношения для решений задач

$$x^2y_k''+c(x)y_k'-a(x)y_k-\pi^2k^2y_k=0,\quad x\in(0,b],$$
$$y_k(b)=0,$$

где $k\in\mathbb{N}$.

Проведя регуляризацию при $r=r_k^-$, будем искать неограниченное решение в виде

$$Y_k^b(x)\stackrel{\text{def}}{=}(x/b)^{r_k^-}\psi_k(x),$$

где ψ_k – новая неизвестная функция. В силу известного следствия из формулы Остроградского–Лиувилля это решение можно записать в виде следующего интеграла:

$$Y_k^b(x)=-Y_k^0(x)\int\limits_b^x\frac{1}{(Y_k^0(\xi))^2}\exp\biggl(-\int\limits_b^\xi\frac{c(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta\biggr)\,d\xi.$$

Несложно видеть, что условие $Y_k^b(b)=0$ выполнено. Подставляя в это представление решения выражения для функций $Y_k^0(x)$ и $Y_k^b(x)$, будем иметь

$$\psi_k(x)=-\biggl(\frac{x}{b}\biggr)^{r_k-r_k^-}\varphi_k(x)\int\limits_b^x\biggl(\frac{\xi}{b}\biggr)^{-2r_k}\frac{1}{(\varphi_k(\xi))^2}\exp\biggl(-\int\limits_b^\xi\frac{c_1}{\zeta}\,d\zeta-\int\limits_b^\xi\frac{\overline{c}(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta\biggr)\,d\xi,$$

или

$$\psi_k(x)=-\biggl(\frac{x}{b}\biggr)^{r_k-r_k^-}\varphi_k(x)\int\limits_b^x\biggl(\frac{\xi}{b}\biggr)^{-2r_k-c_1}\theta_k(\xi)\,d\xi,\tag{13}$$

где

$$\theta_k(\xi)=\exp\biggl(-\int\limits_b^\xi\frac{\overline{c}(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta\biggr)(\varphi_k(\xi))^{-2},\quad 0<\Theta_1\leqslant\theta_k(\xi)\leqslant\Theta_2,\quad \xi\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N},\tag{14}$$

где Θ_1, Θ_2 – постоянные.

Далее равенство (13) понимаем как определение функций $\psi_k(x)$.

Теорема 3. *Существуют положительные постоянные Ψ_1 и Ψ_2, не зависящие от k, такие, что равномерно по $x\in(0,b]$, $k\in\mathbb{N}$ выполняются оценки*

$$|\psi_k(x)|\leqslant\frac{\Psi_2}{k},\quad |\psi_k'(x)|\leqslant\frac{\Psi_2}{x},\quad |\psi_k''(x)|\leqslant\frac{k\Psi_2}{x^2},$$

и равномерно по $x\in(0,3b/4]$, $k\geqslant k_0$ – оценка

$$0<\frac{\Psi_1}{k}\leqslant|\psi_k(x)|.$$

Доказательство. Пользуясь определением (13) функций $\psi_k(x)$ и оценками (12) и (14) функций $\varphi_k(x)$ и $\theta_k(x)$, а также асимптотикой $r_k\sim\pi k$ и соотношением $r_k+r_k^-=1-c_1$, получаем при $x\in[0,b]$ неравенства

$$|\psi_k(x)|\leqslant C_2\Theta_2\biggl(\frac{x}{b}\biggr)^{r_k-r_k^-}\int\limits_x^b\biggl(\frac{\xi}{b}\biggr)^{-2r_k-c_1}d\xi\leqslant\frac{C}{k}\biggl(\frac{x}{b}\biggr)^{r_k-r_k^-}\biggl[\frac{1}{b}+b\biggl(\frac{x}{b}\biggr)^{1-2r_k-c_1}\biggr]=$$
$$=\frac{C}{k}\biggl(b+\frac{1}{b}\biggr)=\frac{\Psi_2}{k},$$

здесь и в дальнейшем C – некоторая положительная постоянная, не обязательно одна и та же в разных оценках.

Аналогично при $x \in [0,b]$ имеем

$$|\psi_k(x)| \geqslant C_1\Theta_1\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k-r_k^-}\int\limits_x^b \left(\frac{\xi}{b}\right)^{-2r_k-c_1} d\xi \geqslant \frac{C}{k}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k-r_k^-} b^{2r_k+c_1}(x^{1-2r_k-c_1}-b^{1-2r_k-c_1}) =$$

$$= \frac{C}{k}\left(b-\frac{x^{r_k-r_k^-}}{b^{r_k-r_k^- -2r_k-c_1-1+2r_k+c_1}}\right) = \frac{C}{k}\left(b-b\frac{x^{r_k-r_k^-}}{b^{r_k-r_k^-}}\right) = \frac{C}{k}\frac{b^{r_k-r_k^-}-x^{r_k-r_k^-}}{b^{r_k-r_k^-}}.$$

Обозначим $b^{r_k-r_k^-}-x^{r_k-r_k^-}=h(x)$. При $x \leqslant x_0 = b\exp(-\ln 2/(r_k-r_k^-))$ справедлива оценка $h(x) \geqslant b^{r_k-r_k^-}/2$. Используя неравенство $\exp(\ln 2/(r_k-r_k^-)) \leqslant 4/3$, верное при достаточно больших k, получаем, что $x_0 \geqslant 3b/4$, т.е. указанная оценка функции $h(x)$ имеет место на отрезке $[0,3b/4]$. Окончательно заключаем, что

$$|\psi_k(x)| \geqslant \frac{C}{k}\frac{b^{r_k-r_k^-}}{2b^{r_k-r_k^-}} = \frac{\Psi_1}{k}, \quad x \in [0,3b/4], \quad k \geqslant k_0.$$

Получим оценки на производные:

$$\psi_k'(x) = \frac{r_k-r_k^-}{x}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k-r_k^-}\varphi_k(x)\int\limits_b^x\left(\frac{\xi}{b}\right)^{-2r_k-c_1}\theta_k(\xi)\,d\xi +$$

$$+\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k-r_k^-}\varphi_k'(x)\int\limits_b^x\left(\frac{\xi}{b}\right)^{-2r_k-c_1}\theta_k(\xi)\,d\xi + \left(\frac{x}{b}\right)^{r_k-r_k^-}\varphi_k(x)\left(\frac{x}{b}\right)^{-2r_k-c_1}\theta_k(x),$$

$$|\psi_k'(x)| \leqslant \frac{r_k-r_k^-}{x}\frac{C(b+1/b)}{k}+\frac{C(b+1/b)}{k}+C\left(\frac{x}{b}\right)^{-1} \leqslant \frac{\Psi_2}{x}, \quad x\in(0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Аналогично доказывается оценка для $|\psi_k''(x)|$, $x\in(0,b]$, $k\in\mathbb{N}$. Теорема доказана.

Возвращаясь к функции $Y_k^b(x)$, получаем в силу теоремы 3 при $k\in\mathbb{N}$ следующие оценки:

$$Y_k^b(x) \leqslant \frac{C_4}{k}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k^-}, \quad x\in[0,b], \quad \frac{C_3}{k}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k^-} \leqslant Y_k^b(x), \quad x \in (0,3b/4],$$

$$\left|\frac{dY_k^b}{dx}(x)\right| \leqslant \frac{C_4}{x}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k^-}, \quad \left|\frac{d^2Y_k^b}{dx^2}(x)\right| \leqslant \frac{kC_4}{x^2}\left(\frac{x}{b}\right)^{r_k^-}, \quad x\in(0,b], \tag{15}$$

где C_3, C_4 – некоторые положительные постоянные.

1.4. Построение функции Грина. Построим функции Грина $G_k(x,\xi)$ задач (2). Пусть

$$G_k(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{Y_k^0(x)Y_k^b(\xi)}{w_k(\xi)\xi^2}, & \text{если } x<\xi, \\ \dfrac{Y_k^0(\xi)Y_k^b(x)}{w_k(\xi)\xi^2}, & \text{если } \xi<x, \end{cases}$$

где $x,\xi \in (0,b)$, $k\in\mathbb{N}$, здесь $w_k(x)$ – определитель Вронского фундаментальной системы решений (ФСР)

$$w_k(x) = \det\begin{pmatrix} Y_k^0(x) & Y_k^b(x) \\ \dfrac{dY_k^0}{dx}(x) & \dfrac{dY_k^b}{dx}(x)\end{pmatrix}.$$

Лемма 4. *Существует постоянная* $W > 0$ *такая, что*

$$w_k(x) \leqslant -Wx^{-c_1} < 0$$

равномерно по $x \in (0, b)$, $k \geqslant k_0$, $c_1 = c'(0)$.

Доказательство. Воспользовавшись формулой Остроградского–Лиувилля, получим равенство

$$w_k(x) = w_k\left(\frac{b}{2}\right)\exp\left(-\int\limits_{b/2}^{x} \frac{c(\xi)}{\xi^2}\,d\xi\right) = w_k\left(\frac{b}{2}\right)x^{-c_1}P(x), \quad x \in (0, b),$$

где $P(x) \geqslant \mathrm{const} = P > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Оценим величину $w_k(b/2)$ сверху (по модулю – снизу). В силу леммы 3 при достаточно больших k элементы ФСР будут монотонными функциями. Несложно видеть, что выполняются неравенства

$$Y_k^0(x) > 0, \quad Y_k^{0\,\prime}(x) > 0, \quad Y_k^b(x) > 0, \quad Y_k^{b\,\prime}(x) < 0.$$

Тогда

$$w_k\left(\frac{b}{2}\right) = Y_k^0\left(\frac{b}{2}\right)Y_k^{b\,\prime}\left(\frac{b}{2}\right) - Y_k^b\left(\frac{b}{2}\right)Y_k^{0\,\prime}\left(\frac{b}{2}\right) \leqslant -Y_k^b\left(\frac{b}{2}\right)Y_k^{0\,\prime}\left(\frac{b}{2}\right).$$

Применив нужные из оценок (11) и (15), будем иметь

$$w_k\left(\frac{b}{2}\right) \leqslant -\frac{C_3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{r_k^-}\tilde{C}_1\frac{2r_k}{b}\left(\frac{1}{2}\right)^{r_k} \leqslant -\frac{\pi\tilde{C}_1C_3}{b}\cdot 2^{-(r_k+r_k^-)} = -\frac{2^{c_1-1}\pi\tilde{C}_1C_3}{b} \equiv -\mathrm{V}.$$

Таким образом,

$$w_k(x) \leqslant -\mathrm{V}x^{-c_1}P = -Wx^{-c_1}, \quad x \in (0, b), \quad k \geqslant k_0.$$

Лемма доказана.

Полученные в пп. 1.2, 1.3 и лемме 4 результаты позволяют легко найти равномерные оценки функции Грина задачи (2) и её производных. Мы же докажем оценку интеграла по ξ от модуля $|G_k(x,\xi)|$ функции Грина, что, например, при условии равномерной ограниченности правых частей задач (2) позволит перейти к асимптотике решений $y_k(x)$ при $k \to +\infty$.

Введём обозначение

$$\|f(x,\xi)\|_{L_1^\xi[0,b]} = \int\limits_0^b |f(x,\xi)|\,d\xi.$$

Теорема 4. *Существует постоянная* $M > 0$, *при которой*

$$\|G_k(x,\xi)\|_{L_1^\xi[0,b]} \leqslant \frac{M}{k^2}$$

равномерно по $x \in [0, b]$, $k \in \mathbb{N}$. *Для любого компакта* $K \subset (0, b]$ *найдётся постоянная* $M_K > 0$ *такая, что*

$$\left\|\frac{\partial G_k}{\partial x}(x,\xi)\right\|_{L_1^\xi[0,b]} \leqslant \frac{M_K}{k}$$

равномерно по $x \in K$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. В силу определения (11) имеем

$$\|G_k(x,\xi)\|_{L_1^\xi[0,b]}(x) = \int\limits_0^b |G_k(x,\xi)|\,d\xi = \int\limits_0^x \left|\frac{Y_k^0(\xi)Y_k^b(x)}{w_k(\xi)\xi^2}\right|d\xi + \int\limits_x^b \left|\frac{Y_k^b(\xi)Y_k^0(x)}{w_k(\xi)\xi^2}\right|d\xi.$$

Воспользовавшись для оценок функций Y_k^0 и Y_k^b первыми из оценок (11) и (15) и оценкой снизу для определителя Вронского из леммы 4, получим

$$\|G_k(x,\xi)\|_{L_1^\xi[0,b]}(x) \leqslant \frac{\tilde{C}_2 C_4}{kW}\biggl[b^{-(r_k+r_k^-)}x^{r_k^-}\int\limits_0^x \xi^{r_k+c_1-2}\,d\xi + b^{-(r_k+r_k^-)}x^{r_k}\int\limits_x^b \xi^{r_k^-+c_1-2}\,d\xi\biggr] =$$

$$= \frac{\tilde{C}_2 C_4 b^{c_1-1}}{kW}\biggl[\frac{x^{r_k^-+r_k+c_1-1}}{r_k+c_1-1} - \frac{x^{r_k+r_k^-+c_1-1}}{r_k^-+c_1-1} + \frac{x^{r_k}}{r_k^-+c_1-1}b^{r_k^-+c_1-1}\biggr].$$

Учтём соотношения $(r_k+r_k^-)+(c_1-1)=(1-c_1)+(c_1-1)=0$. Тогда $r_k^-+c_1-1=-r_k$. Поэтому, продолжая оценку, будем иметь

$$\|G_k(x,\xi)\|_{L_1^\xi[0,b]}(x) \leqslant \frac{\tilde{C}_2 C_4 b^{c_1-1}}{kW}\biggl[\frac{1}{r_k+c_1-1} - \frac{1}{r_k^-+c_1-1} + \frac{1}{r_k^-+c_1-1}\Bigl(\frac{x}{b}\Bigr)^{r_k}\biggr] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tilde{C}_2 C_4 b^{c_1-1}}{kW}\biggl(\frac{1}{r_k+c_1-1} - \frac{1}{r_k^-+c_1-1}\biggr) = \frac{\tilde{C}_2 C_4 b^{c_1-1}}{kW}\biggl(\frac{1}{-r_k^-} - \frac{1}{-r_k}\biggr).$$

Несложно видеть, что в последнем выражении множитель в скобках не превосходит $4/(\pi k)$ при достаточно больших k, значит,

$$\|G_k(x,\xi)\|_{L_1^\xi[0,b]}(x) \leqslant \frac{4\tilde{C}_2 C_4 b^{c_1-1}}{\pi W}\frac{1}{k^2}, \quad x\in[0,b].$$

Первая оценка доказана. Докажем вторую оценку теоремы 4. Зафиксируем произвольное $\varepsilon\in(0,b)$ и положим $x\in K=[\varepsilon,b]$. Повторяя уже проведённые преобразования, применяя оценки производных ФСР и учитывая, что $x\geqslant\varepsilon$, получаем следующие оценки:

$$\biggl\|\frac{\partial G_k}{\partial x}(x,\xi)\biggr\|_{L_1^\xi[0,b]} \leqslant \frac{4\tilde{C}_2 C_4 b^{c_1-1}}{\pi W}\frac{1}{\varepsilon}\frac{k}{k^2} \leqslant \frac{\widetilde{M}_K}{k}, \quad \widetilde{M}_K=\widetilde{M}_K(\varepsilon)=\frac{\mathrm{const}}{\varepsilon}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

2. Решение задачи для эллиптического уравнения.

2.1. Использование функции Грина для построения решения. Теорема сходимости. Пользуясь полученными в п. 1 результатами, докажем, что справедлива

Лемма 5. *Пусть функции $f_k(y)$ имеют вторые производные, равномерно ограниченные по $k\in\mathbb{N}$, $y\in[0,b]$. Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta = O\Bigl(\frac{1}{k^2}\Bigr), \quad k\in\mathbb{N}, \tag{16}$$

равномерно по $y\in[0,b]$,

$$\frac{d^m}{dy^m}\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta = -\frac{f_k^{(m)}(y)}{\pi^2k^2} + O\Bigl(\frac{1}{k^{4-m}}\Bigr), \quad k\in\mathbb{N}, \tag{17}$$

равномерно по $y\in[\varepsilon,b-\varepsilon]$ для любого фиксированного $\varepsilon\in(0,b/2)$, $m=0,1,2$.

Доказательство. Пусть

$$Y_k(y) \equiv \int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta = -\frac{f_k(y)}{\pi^2k^2} + R_k(y), \quad y\in[0,b], \quad k\in\mathbb{N}, \tag{18}$$

где $R_k(y)$ – некоторая функция. Получим оценки для $R_k(y)$. Рассмотрим дифференциальную операцию

$$L_k \equiv y^2\frac{d^2}{dy^2}+c(y)\frac{d}{dy}-(a(y)+\pi^2k^2), \quad y\in[0,b].$$

Так как $Y_k(y)$ – решение задачи (2), то $L_kY_k(y)=f_k(y)$. Применяя к левой и правой частям равенства (18) операцию L_k, получаем тождество

$$L_kY_k(y)=f_k(y)=-y^2\frac{f_k''(y)}{\pi^2k^2}-c(y)\frac{f_k'(y)}{\pi^2k^2}+a(y)\frac{f_k(y)}{\pi^2k^2}+f_k(y)+L_kR_k(y), \quad y\in(0,b), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Выразив отсюда $L_kR_k(y)$, будем иметь

$$L_kR_k(y)=y^2\frac{f_k''(y)}{\pi^2k^2}+c(y)\frac{f_k'(y)}{\pi^2k^2}-a(y)\frac{f_k(y)}{\pi^2k^2}\equiv\frac{F_k(y)}{\pi^2k^2}, \quad y\in(0,b), \quad k\in\mathbb{N}, \tag{19}$$

где $F_k(y)\equiv y^2f_k''(y)+c(y)f_k'(y)-a(y)f_k(y)$, а $R_k(b)=f_k(b)/(\pi^2k^2)$. Используя функции Грина, для $R_k(y)$ получаем следующее выражение:

$$R_k(y)=\frac{1}{\pi^2k^2}\left[\frac{f_k(b)}{Y_k^0(b)}Y_k^0(y)+\int\limits_0^b G_k(y,\eta)F_k(\eta)\,d\eta\right], \quad y\in[0,b], \quad k\in\mathbb{N}. \tag{20}$$

В силу теоремы 4 и оценок (11) функций $Y_k^0(y)$ выражение в квадратных скобках в равенстве (20) равномерно ограничено по $y\in[0,b]$, $k\in\mathbb{N}$. Пусть M – точная верхняя грань его модуля. Тогда

$$|R_k(y)|\leqslant\frac{M}{\pi^2k^2}, \quad y\in[0,b], \quad k\in\mathbb{N}.$$

Учитывая эту оценку в равенстве (18), получаем соотношение (16).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon\in(0,b/2)$ и $m=0,1$. Продифференцируем равенства (18) и (20) по y m раз и рассмотрим их при $y\in K=[\varepsilon,b-\varepsilon]$. Пользуясь теми же оценками, что и в первой части доказательства леммы, приходим к неравенству

$$\left|\frac{d^mR_k}{dy^m}(y)\right|\leqslant\frac{1}{\pi^2k^2}\left[\left|\frac{f_k(b)}{Y_k^0(b)}\right|C_2\left(\frac{r_k}{b}\right)^m\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k-m}+\|F_k(y)\|_{C[0,b]}\frac{M_K}{k^{2-m}}\right], \quad y\in K, \quad k\in\mathbb{N}, \quad m=0,1.$$

Так как $y/b<(b-\varepsilon)/b\equiv q<1$, то $(y/b)^{r_k-m}\leqslant(y/b)^{r_k-1}\leqslant q^{\mathrm{const}\times k}$. Для каждого фиксированного ε найдётся постоянная Q_K такая, что $(y/b)^{r_k-m}\leqslant Q_K/k^4$ при всех $y\in K$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\left|\frac{d^mR_k}{dy^m}(y)\right|\leqslant\frac{1}{\pi^2k^2}\left[C\times(\pi k)^m\frac{Q_K}{k^4}+\frac{C}{k^{2-m}}\right]\leqslant\frac{C}{k^{4-m}}, \quad y\in K, \quad k\in\mathbb{N}, \quad m=0,1.$$

Учитывая эти оценки в равенстве (18), получаем соотношение (17) при $m=0,1$.

Для $R_k''(y)$ в силу (19) имеем

$$R_k''(y)=y^{-2}\left[\frac{F_k(y)}{\pi^2k^2}+(a(y)+\pi^2k^2)R_k(y)-c(y)R_k'(y)\right], \quad y\in K, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Для $R_k''(y)$, применяя установленные выше оценки функций $R_k(y)$ и $R_k'(y)$, получаем

$$|R_k''(y)|\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{C}{k^2}+(C+\pi^2k^2)\frac{C}{k^4}+\frac{C}{k^3}\right]\leqslant\frac{C}{k^2}, \quad y\in K, \quad k\in\mathbb{N},$$

что доказывает соотношение (17) при $m=2$. Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть правая часть $f(x,y)$ задачи (1) имеет вторую непрерывную производную по y в $\overline{D}$, а функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ принадлежат классу Гёльдера по $x\in[0,1]$ при любом $y\in(0,b)$. Тогда классическое решение задачи (1) существует, единственно и представляется рядом*

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta\,\sin(\pi kx),\quad (x,y)\in\overline{D}. \tag{21}$$

Доказательство. Докажем непрерывность определённой рядом (21) функции $u(x,y)$ в $\overline{D}$. Оценим общий член этого ряда:

$$\Bigg|\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta\,\sin(\pi kx)\Bigg|\leqslant\|f_k(y)\|_{C[0,b]}\|G_k(y,\eta)\|_{L_1^\eta[0,b]}\leqslant 4\|f(x,y)\|_{C(\overline{D})}\frac{M}{k^2},\quad k\in\mathbb{N},$$

здесь мы использовали оценки теоремы 4. Поэтому, согласно признаку Вейерштрасса, ряд (21) сходится равномерно в $\overline{D}$. Каждый его член непрерывен в $\overline{D}$, следовательно, функция $u(x,y)$ также непрерывна в $\overline{D}$. Выполнение для функции $u(x,y)$ краевых условий задачи (1) вытекает из вида общего члена ряда (21).

Применяя лемму 5, покажем, что ряд (21) можно дважды дифференцировать под знаком суммы внутри D. Фиксируем любой компакт $K\subset D$, и пусть $(x,y)\in K$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta\,\sin(\pi kx)=-\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta\,\pi^2k^2\sin(\pi kx)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\bigg(f_k(y)+O\bigg(\frac{1}{k^2}\bigg)\bigg)\sin(\pi kx)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(y)\sin(\pi kx)\;+\;\sum_{k=1}^{\infty}O\bigg(\frac{1}{k^2}\bigg)\sin(\pi kx),\quad (x,y)\in K.$$

Так как x отделён от 0 и 1, то в силу принадлежности функции $f(x,y)$ классу Гёльдера по x первый ряд сходится при любом фиксированном y равномерно по x, $(x,y)\in K$, второй ряд сходится равномерно в силу признака Вейерштрасса.

Используя лемму 5 и неравенство $2ab\leqslant a^2+b^2$, получаем следующую оценку:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigg|\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta\,\sin(\pi kx)\bigg|=\sum_{k=1}^{\infty}\bigg|\bigg(\frac{f_k(y)}{\pi k}+O\bigg(\frac{1}{k^3}\bigg)\bigg)\cos(\pi kx)\bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(f_k(y))^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2k^2}+\sum_{k=1}^{\infty}O\bigg(\frac{1}{k^3}\bigg),\quad (x,y)\in K.$$

Сходимость первого ряда в правой части этого неравенства следует из тождества Парсеваля. Второй и третий ряды сходятся равномерно по $(x,y)\in K$ в силу признака Вейерштрасса. Используя полученные соотношения и то, что компакт K может быть выбран произвольным, получаем, что ряд (21) допускает двукратное почленное дифференцирование по x внутри D.

Аналогично, при $(x,y)\in K$ в силу леммы 5 имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^i}{\partial y^i}\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta\,\sin(\pi kx)=\sum_{k=1}^{\infty}\bigg(-\frac{f_k^{(i)}(y)}{\pi^2k^2}+O\bigg(\frac{1}{k^{4-i}}\bigg)\bigg)\sin(\pi kx),\quad (x,y)\in K,\quad i=1,2.$$

Так как функция $f''_{yy}(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$, то её коэффициенты разложения $f''_k(y)$ и $f'_k(y)$ равномерно ограничены по $k\in\mathbb{N}$ и по $(x,y)\in K$. Следовательно, указанные ряды сходятся равномерно по $(x,y)\in K$ и, аналогично, ряд (21) допускает двукратное почленное дифференцирование по y внутри D. Точно так же получаем

$$\Bigl|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta\,\sin(\pi kx)\Bigr|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl|\Bigl(-\frac{f_k'(y)}{\pi k}+O\Bigl(\frac{1}{k^2}\Bigr)\Bigr)\cos(\pi kx)\Bigr|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(f_k'(y))^2+\sum_{k=1}^{\infty}O\Bigl(\frac{1}{k^2}\Bigr),\quad (x,y)\in K.$$

Следовательно, ряд из смешанных производных также сходится равномерно внутри D. Таким образом, функция $u(x,y)\in C^2(D)$ является классическим решением задачи (1).

Докажем единственность классического решения задачи (1). Пусть $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ – два её классических решения. Тогда функция $v(x,y)\equiv u_1(x,y)-u_2(x,y)$ является решением задачи (1) с нулевой правой частью. В силу результатов [1] функция $v(x,y)$ является тождественным нулём. Теорема доказана.

2.2. Построение решения методом спектрального выделения особенностей. Далее будем предполагать, что коэффициенты $f_k(y)$ разложения правой части $f(x,y)$ задачи (1) являются аналитическими функциями в круге U. Построим решение этой задачи в явном виде. Пользуясь аналитичностью функции $f_k(y)$, разложим её в ряд Маклорена:

$$f_k(y)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{kn}y^n,\quad y\in U,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Будем искать частное ограниченное решение $\eta_k(y)$ уравнения (2) (меняем в (2) обозначения: x на y и y_k на η_k) в виде

$$\eta_k(y)=\eta_k^A(y)+\ln y\cdot\eta_k^S(y),$$

где η_k^A и η_k^S – аналитические функции в U. Разложим их также в ряды Маклорена:

$$\eta_k^A(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{kn}^A y^n,\quad \eta_k^S(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{kn}^S y^n,\quad y\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N}. \tag{23}$$

Для производных функции $\eta_k(y)$ имеют место следующие формулы:

$$\eta_k'(y)=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)\eta_{k,n+1}^A+\eta_{k,n+1}^S]y^n+\ln y\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\eta_{k,n+1}^S y^n,\quad y\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N},$$

$$y^2\eta_k''(y)=\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)\eta_{k,n}^A+(2n-1)\eta_{k,n}^S]y^n+\ln y\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\eta_{k,n}^S y^n,\quad y\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (2), получим тождества

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)\eta_{k,n}^A+(2n-1)\eta_{k,n}^S]y^n+\ln y\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\eta_{k,n}^S y^n+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}c_m y^m\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)\eta_{k,n+1}^A+\eta_{k,n+1}^S]y^n+\ln y\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\eta_{k,n+1}^S y^n\Bigr)-$$

$$-\Bigl(\sum_{m=0}^{\infty}a_m y^m+\pi^2k^2\Bigr)\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{kn}^A y^n+\ln y\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{kn}^S y^n\Bigr)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{kn}y^n,\quad y\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N}.$$

Аналогично доказательству теоремы 1, приравняв коэффициенты при y^n и $\ln y \cdot y^n$, придём к системе равенств для коэффициентов рядов (23):

$$\nu(n,k)\eta^A_{k,n} + (2n-1+c_1)\eta^S_{k,n} =$$

$$= f_{kn} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n-1} a_{n-m}\eta^A_{km} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n-2} c_{n-m}[(m+1)\eta^A_{k,m+1} + \eta^S_{k,m+1}], \quad n\in\mathbb{N}_0, \quad k\in\mathbb{N},$$

$$\nu(n,k)\eta^S_{k,n} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n-2} c_{n-m}(m+1)\eta^S_{k,m+1} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n-1} a_{n-m}\eta^S_{km} = 0, \quad n\in\mathbb{N}_0, \quad k\in\mathbb{N};$$

здесь и ниже принято обозначение

$$\nu(n,k) = n(n+c_1-1) - \pi^2k^2 - a_0$$

(т.е. через $\nu(n,k)$ обозначено выражение, стоящее под знаком минимума в неравенстве (3)).

I. Пусть при фиксированном $k\in\mathbb{N}$ для любого $n\in\mathbb{N}_0$ величина $\nu(n,k)$ отлична от нуля. Тогда положим $\eta^S_{k,0}=0$, учитывая условие ограниченности решения. Как следствие, $\eta^S_{kn}=0$ для всех $n\in\mathbb{N}_0$, т.е. $\eta_k\in A(U)$. Для "аналитической" компоненты $\eta^A_k(y)$ получим

$$\nu(n,k)\eta^A_{k,n} = f_{kn} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n-1} a_{n-m}\eta^A_{km} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n-2} (m+1)c_{n-m}\eta^A_{k,m+1}, \quad n\in\mathbb{N}_0,$$

следовательно,

$$\eta^A_{kn} = \frac{1}{\nu(n,k)}\bigg(f_{kn} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n-1} a_{n-m}\eta^A_{km} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n-2} (m+1)c_{n-m}\eta^A_{k,m+1}\bigg), \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Полученная формула совпадает с формулой из работы [11].

II. Пусть при некотором $k\in\mathbb{N}$ найдётся номер $n_0\in\mathbb{N}$ такой, что $\nu(n_0,k)=0$ (нетрудно видеть, что такой номер единственен). Данное условие выполняется тогда и только тогда, когда квадратное относительно n_0 уравнение

$$n_0^2 + (c_1-1)n_0 - (\pi^2k^2+a_0) = 0$$

имеет положительный целый корень, или, иначе говоря, $r_k\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\eta^A_{kn} = \frac{1}{\nu(n,k)}\bigg(f_{kn} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n-1} a_{n-m}\eta^A_{km} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n-2} (m+1)c_{n-m}\eta^A_{k,m+1}\bigg), \quad n=\overline{0,n_0-1},$$

$$\eta^S_{kn} = 0, \quad n=\overline{0,n_0-1}.$$

При $n=n_0$ получаем соотношение $0\cdot\eta^S_{k,n_0}=0$, что позволяет выбрать любое η^S_{k,n_0}. Одновременно имеем

$$0\cdot\eta^A_{k,n_0} + (2n_0-1+c_1)\eta^S_{k,n_0} = f_{k,n_0} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n_0-1} a_{n_0-m}\eta^A_{km} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n_0-2} (m+1)c_{n_0-m}\eta^A_{k,m+1}.$$

Выберем $\eta^A_{k,n_0}=0$. Тогда

$$\eta^S_{k,n_0} = \frac{1}{2n_0-1+c_1}\bigg(f_{k,n_0} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n_0-1} a_{n_0-m}\eta^A_{km} - \sum_{0\leqslant m\leqslant n_0-2} (m+1)c_{n_0-m}\eta^A_{k,m+1}\bigg).$$

Наконец, для оставшихся коэффициентов при всех $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots,$ получим рекуррентные формулы:

$$\eta^S_{kn} = \frac{1}{\nu(n,k)}\left(\sum_{m=0}^{n-1} a_{n-m}\eta^S_{km} - \sum_{m=0}^{n-2} c_{n-m}(m+1)\eta^S_{k,m+1}\right),$$

$$\eta^A_{kn} = \frac{1}{\nu(n,k)}\left(f_{kn} + \sum_{m=0}^{n-1} a_{n-m}\eta^A_{km} - \sum_{m=0}^{n-2} c_{n-m}[(m+1)\eta^A_{k,m+1} + \eta^S_{k,m+1}] - (2n-1+c_1)\eta^S_{kn}\right).$$

Докажем теперь сходимость построенных рядов (23) в U вне зависимости от того, какой из случаев I или II имеет место.

Теорема 6. *Ряды (23) имеют радиусы сходимости не меньше R при всех $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Фиксируем номер $k \in \mathbb{N}$. Так как функции $a(y)$, $c(y)$ и $f_k(y)$ являются аналитическими в круге U, то в силу теоремы Коши–Адамара для любого $R_1 \in (0, R)$ существует число $M > 0$ такое, что $|a_n|, |f_{kn}| \leqslant M/R_1^n$, $|c_n| \leqslant MR_1/R_1^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ (см. разложения (8) и (22)).

Поскольку $\nu(n,k) \sim n^2$ при любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$, то для любой постоянной $M_1 \geqslant 1$ (её мы выберем позже) и для любого числа $M > 1$ найдётся номер N такой (считаем $N > n_0$), что при $n \geqslant N$ будет выполнено неравенство $\nu(n,k) \geqslant nMM_1$. Выберем также число $p > 2$ такое, что

$$|\eta^A_{kn}|, |\eta^S_{kn}| \leqslant p^n/R_1^n, \quad n = \overline{0, N-1}$$

(см. разложения (17)). Методом математической индукции докажем, что последние неравенства верны при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Пусть неравенства выполнены для всех номеров $m = \overline{0, n-1}$. Докажем их для номера n. Имеем

$$|\eta^S_{kn}| \leqslant \left(\left|\sum_{m=0}^{n-1} a_{n-m}\eta^S_{km}\right| + \left|\sum_{m=0}^{n-2} c_{n-m}(m+1)\eta^S_{k,m+1}\right|\right)(nMM_1)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{M}{R_1^{n-m}}\frac{p^m}{R_1^m} + \sum_{m=0}^{n-2}(m+1)\frac{MR_1}{R_1^{n-m}}\frac{p^{m+1}}{R_1^{m+1}}\right)(nMM_1)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{m=0}^{n-1} p^m\frac{1}{R_1^n} + \sum_{m=0}^{n-2} p^{m+1}\frac{1}{R_1^n}\right)M_1^{-1} \leqslant \frac{2}{M_1R_1^n}\sum_{m=0}^{n-1} p^m = \frac{2}{M_1R_1^n}\frac{p^n-1}{p-1} \leqslant \frac{2p^n}{M_1R_1^n}.$$

Если предположить, что $M_1 \geqslant 2$, то получим $|\eta^S_{kn}| \leqslant p^n/R_1^n$.

Аналогично для η^A_{kn}:

$$|\eta^A_{kn}| \leqslant \left(\frac{M}{R_1^n} + \sum_{m=0}^{n-1}\frac{M}{R_1^{n-m}}\frac{p^m}{R_1^m} + n\sum_{m=0}^{n-2}\frac{MR_1}{R_1^{n-m}}\left[\frac{p^{m+1}}{R_1^{m+1}} + \frac{p^{m+1}}{R_1^{m+1}}\right] + 2n\frac{p^n}{R_1^n} + (M+1)\frac{p^n}{R_1^n}\right)(nMM_1)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{M}{R_1^n} + \sum_{m=0}^{n-1}\frac{Mp^m}{R_1^n} + 2\sum_{m=0}^{n-2}\frac{Mp^{m+1}}{R_1^n} + 2\frac{p^n}{R_1^n} + 2M\frac{p^n}{R_1^n}\right)(MM_1)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{M_1R_1^n}\left(1 + \sum_{m=0}^{n-1} p^m + 2\sum_{m=0}^{n-2} p^{m+1} + 2p^n + 2p^n\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{M_1R_1^n}\left(5p^n + 3\sum_{m=0}^{n-1} p^m\right) = \frac{1}{M_1R_1^n}\left(5p^n + 3\frac{p^n-1}{p-1}\right) \leqslant \frac{1}{M_1R_1^n}(5p^n + 3p^n) = \frac{8p^n}{M_1R_1^n}.$$

Окончательно положим $M_1 = 8$. Тогда, согласно методу математической индукции, неравенства $|\eta_{kn}^A|, |\eta_{kn}^S| \leqslant p^n/R_1^n$ справедливы при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, пользуясь теоремой Коши–Адамара, заключаем, что радиусы сходимости рядов (23) не меньше, чем $R_2 = R_1/p > 0$.

Покажем, что радиусы сходимости рядов (23) на самом деле не меньше, чем R. Подставим функцию $\eta_k(y) \equiv \eta_k^A(y) + \ln y \cdot \eta_k^S(y)$ в уравнение (2). Используя формулы производных функции $\eta_k(y)$:

$$\eta_k'(y) = \eta_k^{A\,\prime}(y) + \frac{\eta_k^S(y)}{y} + \ln y \cdot \eta_k^{S\,\prime}(y),$$

$$\eta_k''(y) = \eta_k^{A\,\prime\prime}(y) - \eta_k^S(y)y^{-2} + 2\eta_k^{S\,\prime}(y)y^{-1} + \ln y \cdot \eta_k^{S\,\prime\prime}(y),$$

получаем дифференциальные уравнения для функций $\eta_k^S(y)$ и $\eta_k^A(y)$:

$$y^2\eta_k^{S\,\prime\prime}(y) + c(y)\eta_k^{S\,\prime}(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\eta_k^S(y) = 0, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} y^2\eta_k^{A\,\prime\prime}(y) + c(y)\eta_k^{A\,\prime}(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\eta_k^A(y) = \\ = f_k(y) - c(y)\eta_k^S(y)y^{-1} + \eta_k^S(y) - 2y\eta_k^{S\,\prime}(y), \end{aligned} \tag{25}$$

где $y \in U$, $k \in \mathbb{N}$. Уравнение (24) – линейное дифференциальное уравнение относительно $\eta_k^S(y)$ с аналитическими в U коэффициентами и нулевой правой частью. Поэтому аналитическое в $U_2 = \{y \in \mathbb{C} : |y| < R_2\}$ решение этого уравнения может быть единственным образом аналитически продолжено в большую область U (см., например, [13, с. 102]). Из этого следует сходимость ряда $\eta_{k,0}^S + \eta_{k,1}^S y + \eta_{k,2}^S y^2 + \ldots$ в области U.

Такие же рассуждения справедливы для функции $\eta_k^A(y)$ и уравнения (25). Таким образом, ряды (23) сходятся равномерно внутри области U. Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть правая часть $f(x,y)$ задачи (1) имеет вторую непрерывную производную по y в $\overline{D}$, все коэффициенты $f_k(y)$ её разложения в ряд по системе $\{\sin(\pi kx) : k \in \mathbb{N}\}$ аналитичны в U, а функции $f(x,y)$ и $f_y'(x,y)$ принадлежат классу Гёльдера по $x \in [0,1]$ при любом $y \in (0,b)$. Тогда классическое решение задачи (1) существует, единственно и представляется рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\eta_k^A(y) + \ln y \cdot \eta_k^S(y) - \frac{\eta_k^A(b) + \ln b \cdot \eta_k^S(b)}{\varphi_k(b)} \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \varphi_k(y)\right] \sin(\pi kx), \quad (x,y) \in \overline{D},$$

где функции $\eta_k^A(y)$, $\eta_k^S(y)$ и $\varphi_k(y)$ являются аналитическими в круге U. Если при некотором номере $k \in \mathbb{N}$ показатель $r_k \notin \mathbb{N}$, то соответствующая функция $\eta_k^S(y)$ является тождественным нулём.

Доказательство. В силу преобразований, проведённых в данном пункте, выражение в квадратных скобках является решением соответствующей задачи (2). Таким образом, данный ряд совпадает с рядом (21) и по теореме 5 является единственным классическим решением задачи (1). Свойство аналитичности коэффициентов последнего ряда следует из результатов данного пункта и п. 1.2. Теорема доказана.

Отметим, что при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ и $y \to 0+0$ имеют место асимптотические соотношения $\eta_k^A(y) \sim -f_k(y)/(\pi^2k^2 + a(0))$, $\eta_k^S(y) \sim \mathrm{const} \times y^{r_k}$.

Работа выполнена при содействии Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
2. *Келдыш М.В.* Избранные труды. Математика. М., 1985.

3. *Янушаускас А.И.* Аналитическая теория эллиптических уравнений. Новосибирск, 1979.
4. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М., 1985.
5. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
6. *Ивакин В.М.* Видоизмененная задача Дирихле для вырождающихся на границе эллиптических уравнений и систем // Аналитические методы в теории эллиптических уравнений. Новосибирск, 1982. С. 12–21.
7. *Петрушко И.М.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 103. Краевые задачи для дифференциальных уравнений. 1968. С. 181–200.
8. *Ломов И.С.* Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2079–2089.
9. *Ломов И.С.* Метод спектрального разделения переменных для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 5. С. 593–596.
10. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
11. *Емельянов Д.П., Ломов И.С.* Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 1. С. 45–58.
12. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию (самосопряжённые обыкновенные дифференциальные операторы). М., 1970.
13. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 09.02.2021 г.
После доработки 09.02.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.