УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.223+517.575

ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧ НАВЬЕ И РИКЬЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

© 2021 г. В. В. Карачик

Строятся функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в единичном шаре и приводятся интегральные представления решения этих задач.

DOI: 10.31857/S0374064121050095

Введение. Одним из эффективных методов представления решений краевых задач для эллиптических уравнений является метод, основанный на построении функции Грина задачи. Построению функции Грина в явном виде для различных классических краевых задач посвящено достаточно много работ. Функции Грина для бигармонических задач Дирихле, Неймана, Робина и др. в двумерном диске построены в [1] с помощью гармонических функций Грина задачи Дирихле, а в [2, 3] найдено явное представление гармонической функции Робина. Явная форма функции Грина в секторе для бигармонического и тригармонического уравнений приведена в работах [4, 5]. Статьи [6, 7] посвящены построению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре, а в работе [8] для бигармонического уравнения в единичном шаре найден оператор Грина задачи Дирихле при полиномиальных данных. В [9] дано явное представление функции Грина задачи Робина для уравнения Пуассона, а в [10] приведён явный вид функции Грина для тригармонического уравнения в единичном шаре.

В работе [1] построены функции Грина ряда задач для бигармонического уравнения в двумерном диске и приведены условия их разрешимости. Условия разрешимости некоторых вариантов задач для бигармонического уравнения в шаре, исследованных в [1], были получены также в работах [11, 12], но без предоставления функций Грина. В работе [13] исследована фредгольмовость и индекс обобщённой задачи Неймана, содержащей степени нормальных производных в граничных условиях.

Хорошо известно (см., например, [14, с. 53]), что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре $S=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<1\}$ при $n\geqslant 2$ имеет вид

$$G_2(x,\xi)=E(x,\xi)-E(x/|x|,|x|\xi), \tag{1}$$

где

$$E(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-2}|x-\xi|^{2-n}, & n>2,\\ -\ln|x-\xi|, & n=2,\end{cases}$$

– элементарное решение уравнения Лапласа. По аналогии с этим решением в работе [15] было определено элементарное решение

$$E_4(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(n-2)(n-4)}|x-\xi|^{4-n}, & n>4, \quad n=3,\\ -\dfrac{1}{4}\ln|x-\xi|, & n=4,\\ \dfrac{|x-\xi|^2}{4}(\ln|x-\xi|-1), & n=2,\end{cases} \tag{2}$$

бигармонического уравнения и доказано, что при $n\geqslant 3$ функция вида

$$G_4(x,\xi)=E_4(x,\xi)-E_4\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right)-\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E\left(\frac{x}{|x|},|x|\xi\right)$$

представляет собой функцию Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре S. Эта функция удовлетворяет граничным условиям $G_4(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = \partial G_4(x,\xi)/\partial\nu|_{\xi\in\partial S} = 0$ при $x\in S$ и является симметричной, $G_4(x,\xi)=G_4(\xi,x)$ при $x\neq\xi\in S$.

В настоящей работе в теореме 1 приводится интегральное представление функций класса $u\in C^4(D)\bigcap C^3(\overline{D})$. Затем в теореме 2 определяется функция Грина задачи Навье [16] и в следствии 1 даётся интегральное представление решения этой задачи. Далее исследуется задача Рикье–Неймана [17]. В теореме 4 определяется функция Грина задачи Рикье–Неймана, а в теореме 5 находится интегральное представление решения этой задачи. Даются два примера решения рассмотренных однородных задач при полиномиальной правой части уравнения.

1. Интегральное представление. Приведём интегральное представление функции класса $u\in C^4(D)\bigcap C^3(\overline{D})$, где $D\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂D.

Теорема 1. *Для функции* $u\in C^4(D)\bigcap C^3(\overline{D})$ *имеет место следующее интегральное представление:*

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\biggl(-\int\limits_{\partial D}E_4(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\,ds_\xi+\int\limits_{\partial D}\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta u\,ds_\xi-$$

$$-\int\limits_{\partial D}\Delta_\xi E_4(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds_\xi+\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\Delta_\xi E_4(x,\xi)}{\partial\nu}u(\xi)\,ds_\xi+\int\limits_{D}E_4(x,\xi)\Delta^2u(\xi)\,d\xi\biggr),\tag{3}$$

где $\omega_n=|\partial S|$ *– площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$, ν *– внешняя единичная нормаль к* ∂D.

Доказательство. Рассмотрим функции $u,v\in C^2(D)\bigcap C^1(\overline{D})$. Нетрудно видеть, что для них в области D верно тождество $v\Delta u-u\Delta v=\operatorname{div}(v\nabla u)-\operatorname{div}(u\nabla v)$. Проинтегрировав это тождество по области D и воспользовавшись формулой Гаусса–Остроградского, придём к равенству

$$\int\limits_D(v\Delta u-u\Delta v)\,d\xi=\int\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds_\xi,$$

заменив в котором u на Δu и v на Δv, получим соответственно

$$\int\limits_D(v\Delta^2u-\Delta u\Delta v)\,d\xi=\int\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}-\Delta u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds_\xi,$$

$$\int\limits_D(\Delta v\Delta u-u\Delta^2v)\,d\xi=\int\limits_{\partial D}\left(\Delta v\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Delta v}{\partial\nu}\right)ds_\xi.$$

Почленно складывая два последних равенства, будем иметь

$$\int\limits_D(v\Delta^2u-u\Delta^2v)\,d\xi=\int\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}-\Delta u\frac{\partial v}{\partial\nu}+\Delta v\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Delta v}{\partial\nu}\right)ds_\xi.\tag{4}$$

Очевидно, что полученная формула (4) верна для $u,v\in C^4(D)\bigcap C^3(\overline{D})$. Отметим точку $x\in D$ и выделим в области D содержащийся в ней замкнутый шар $|\xi-x|\leqslant\delta$ с центром в этой точке некоторого радиуса $\delta>0$. Оставшуюся часть области D обозначим через D_δ. Очевидно, что $\partial D_\delta=\partial D\bigcup\{\xi\in\mathbb{R}^n:|\xi-x|=\delta\}$. Применим формулу (4) для области $D=D_\delta$ в случае, когда $v(\xi)=E_4(x,\xi)$, и при этом учтём, что $\Delta_\xi^2E_4(x,\xi)=0$ и $\Delta_\xi E_4(x,\xi)=-E(x,\xi)$ при $x\neq\xi\in D$; в результате получим

$$\int\limits_{D_\delta}E_4(x,\xi)\Delta^2u(\xi)\,d\xi=\int\limits_{\partial D}\left(E_4(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}-\Delta u\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}-E(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu}+u\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial\nu}\right)ds_\xi-$$

$$-\int\limits_{|\xi-x|=\varepsilon}\left(E_4(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}-\Delta u\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}-E(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu}+u\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial\nu}\right)ds_\xi. \qquad (5)$$

Знак минус возник из-за того, что вместо внутренней нормали к части границы области D_δ – сфере $|\xi-x|=\delta$ – в формуле Гаусса–Остроградского взята внешняя нормаль. Вычислим второй интеграл в правой части равенства (5); для этого запишем его в виде суммы четырёх интегралов от слагаемых подынтегральной функции и обозначим эти интегралы I_1^δ, I_2^δ, I_3^δ, I_4^δ в соответствии с порядком следования подынтегральных слагаемых.

Пусть $n>4$ или $n=3$. В силу формулы (2) $E_4(x,\xi)|_{|x-\xi|=\delta}=\delta^{4-n}/(2(n-2)(n-4))$ и, значит,

$$|I_1^\delta|\leqslant\int\limits_{|\xi-x|=\delta}|E_4(x,\xi)|\left|\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\right|ds_\xi\leqslant\delta^{4-n}\max_{\xi\in\overline{D}}\|\nabla\Delta u\|\omega_n\delta^{n-1}/(2(n-2)|n-4|)\leqslant\mathrm{const}\,\delta^3.$$

Если $n=4$, то $E_4(x,\xi)|_{|x-\xi|=\delta}=-(1/4)\ln\delta$, и тогда аналогично предыдущему

$$|I_1^\delta|\leqslant|\ln\delta|\max_{\xi\in\overline{D}}\|\nabla\Delta u\|\omega_4\delta^3/4\leqslant\mathrm{const}\,|\ln\delta|\delta^3.$$

Если $n=2$, то $E_4(x,\xi)|_{|x-\xi|=\delta}=\delta^2|\ln\delta-1|/4$, и поэтому

$$|I_1^\delta|\leqslant\delta^2|\ln\delta-1|\max_{\xi\in\overline{D}}\|\nabla\Delta u\|\omega_2\delta/4\leqslant\mathrm{const}\,|\ln\delta-1|\delta^3.$$

Рассмотрим интеграл I_2^δ при $n>4$ или $n=3$. Учитывая, что

$$\left.\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}\right|_{|x-\xi|=\delta}=-\frac{1}{2(n-2)}\sum_{i=1}^n\frac{\xi_i-x_i}{|x-\xi|}\frac{\xi_i-x_i}{|x-\xi|^{n-2}}=-\frac{\delta^{3-n}}{2(n-2)},$$

будем иметь

$$|I_2^\delta|\leqslant\int\limits_{|\xi-x|=\delta}\left|\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}\right||\Delta u|\,ds_\xi\leqslant\delta^{3-n}\max_{\xi\in\overline{D}}|\Delta u|\omega_n\delta^{n-1}/(2(n-2))\leqslant\mathrm{const}\,\delta^2.$$

Если $n=4$, то

$$\left.\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}\right|_{|x-\xi|=\delta}=-\frac14\sum_{i=1}^n\frac{\xi_i-x_i}{|x-\xi|}\frac{\xi_i-x_i}{|x-\xi|^2}=-\frac{1}{4\delta},$$

что совпадает с предыдущим случаем при $n=4$, и, значит, получаем аналогичную оценку $|I_2^\delta|\leqslant\mathrm{const}\,\delta^2$.

Если $n=2$, то

$$\left.\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}\right|_{|x-\xi|=\delta}=\frac14\sum_{i=1}^n2\frac{\xi_i-x_i}{|x-\xi|}(\xi_i-x_i)(\ln|x-\xi|-1)+\frac14|x-\xi|=$$

$$=\frac{|x-\xi|}{4}(2\ln|x-\xi|-1)=\frac{\delta}{4}(2\ln\delta-1),$$

и тогда

$$|I_2^\delta|\leqslant\delta|2\ln\delta-1|\max_{\xi\in\overline{D}}|\Delta u|\omega_2\delta/4\leqslant\mathrm{const}\,\delta^2|2\ln\delta-1|.$$

Рассмотрим интеграл I_3^δ при $n>2$. Учитывая, что $E(x,\xi)|_{|x-\xi|=\delta}=\delta^{2-n}/(n-2)$, получаем

$$|I_3^\delta|\leqslant\int\limits_{|\xi-x|=\delta}|E(x,\xi)|\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|ds_\xi\leqslant\delta^{2-n}\max_{\xi\in\overline{D}}\|\nabla u\|\omega_n\delta^{n-1}/(n-2)\leqslant\operatorname{const}\delta.$$

Если $n=2$, то поскольку $E(x,\xi)|_{|x-\xi|=\delta}=-\ln\delta$, будем иметь

$$|I_3^\delta|\leqslant|\ln\delta|\max_{\xi\in\overline{D}}\|\nabla u\|\omega_2\delta\leqslant\operatorname{const}\delta|\ln\delta|.$$

Во всех рассмотренных случаях $I_i^\delta\underset{x\in D}{\rightrightarrows}0$ при $\delta\to0$, $i=1,2,3$.

Исследуем последний интеграл I_4^δ. Поскольку при $n\geqslant2$ справедливо равенство

$$\left.\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial\nu}\right|_{|x-\xi|=\delta}=-\sum_{i=1}^n\frac{\xi_i-x_i}{|\xi-x|}\frac{\xi_i-x_i}{|\xi-x|^n}=-\delta^{1-n},$$

то

$$\left|I_4^\delta-u(x)\int\limits_{|\xi-x|=\delta}\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial\nu}\,ds_\xi\right|\leqslant\int\limits_{|\xi-x|=\delta}|u(\xi)-u(x)|\left|\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial\nu}\right|ds_\xi\leqslant$$

$$\leqslant\delta^{1-n}\max_{|\xi-x|\leqslant\delta}|u(\xi)-u(x)|\omega_n\delta^{n-1}=\omega_u(\delta)\omega_n,$$

где $\omega_u(\delta)$ – модуль непрерывности функции u. По теореме Кантора $\omega_u(\delta)\to0$ при $\delta\to0$, а значит,

$$I_4^\delta=\left(I_4^\delta-u(x)\int\limits_{|\xi-x|=\delta}\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial\nu}\,ds_\xi\right)+u(x)\frac{\omega_n\delta^{n-1}}{\delta^{n-1}}\to\omega_nu(x)\quad\text{при}\quad\delta\to0.$$

Перейдём к пределу при $\delta\to0$ в равенстве (5). В силу интегрируемой особенности в объёмном интеграле слева имеет место сходимость

$$\lim_{\delta\to0}\int\limits_{D_\delta}E_4(x,\xi)f(\xi)\,d\xi=\int\limits_DE_4(x,\xi)f(\xi)\,d\xi,$$

вследствие которой и найденных выше пределов при $\delta\to0$ интегралов I_i^δ, $i=\overline{1,4}$, получаем

$$\int\limits_DE_4(x,\xi)\Delta^2u(\xi)\,d\xi=\int\limits_{\partial D}\left(E_4(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}-\Delta u\frac{\partial E_4(x,\xi)}{\partial\nu}-E(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu}+u(\xi)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial\nu}\right)ds_\xi+\omega_nu(x).$$

Перенося интеграл из правой части этого равенства в левую, деля на ω_n и учитывая тождество $\Delta_\xi E_4(x,\xi)=-E(x,\xi)$, приходим к формуле (3). Теорема доказана.

2. Функция Грина задачи Навье. Далее граничные задачи будем рассматривать в шаре S. Задача Навье [16] (в работе [1] она называется также задачей Дирихле-2) заключается в нахождении функции $u\in C^4(S)\bigcap C^3(\overline{S})$, являющейся решением следующей граничной задачи для неоднородного бигармонического уравнения:

$$\Delta^2u(x)=f(x),\quad x\in S,$$

$$u|_{\partial S}=\varphi_0(\xi),\quad\Delta u|_{\partial S}=\varphi_1(\xi),\quad\xi\in\partial S.\tag{6}$$

Рассмотрим функцию вида

$$G_4^r(x,\xi) = E_4(x,\xi) + g_4^r(x,\xi), \tag{7}$$

где $g_4^r(x,\xi) \in C_\xi^3(\overline{S})$ – бигармоническая функция по переменным $x,\xi \in S$ такая, что

$$G_4^r(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = \Delta_\xi G_4^r(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = 0$$

при $x \in S.$ Назовём функцию $G_4^r(x,\xi)$ *функцией Грина задачи Навье* (6). Обозначим также

$$E_4^r(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S E(x,y)E(y,\xi)\,dy.$$

Теорема 2. *Функция Грина $G_4^r(x,\xi)$ задачи Навье (6) находится по формуле*

$$G_4^r(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y)G_2(y,\xi)\,dy, \tag{8}$$

где функция $G_2(x,y)$ определена равенством (1).

Доказательство. Сначала докажем, что функция (8) представима в виде (7). Для этого установим, что функция $g_0(x,\xi) = E_4^r(x,\xi) - E_4(x,\xi)$ является гармонической по $\xi \neq x \in S,$ где функция $E_4(x,y)$ определена равенством (2). Пусть $x \neq \xi \in S.$ Обозначим $S_\delta = S\setminus\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leqslant \delta\}$ и возьмём $\delta > 0$ настолько малым, чтобы $\xi \in S_\delta,$ т.е. $|x-\xi| > \delta$ и $\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leqslant \delta\} \subset S.$ Тогда

$$E_4^r(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n}\biggl(\int\limits_{S_\delta} + \int\limits_{|x-y|\leqslant\delta}\biggr)E(x,y)E(y,\xi)\,dy.$$

Поскольку $\xi \in S_\delta$ и $x \notin S_\delta,$ то, согласно свойству объёмного потенциала, имеем

$$\Delta_\xi \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S_\delta} E(x,y)E(y,\xi)\,dy = -E(x,\xi). \tag{9}$$

Пусть $n > 4$ или $n = 3.$ Другие случаи рассматриваются аналогично. Обозначим

$$F(x,\xi) = \int\limits_{|x-y|\leqslant\delta} E(x,y)E(y,\xi)\,dy = \frac{1}{(n-2)^2}\int\limits_{|\eta|\leqslant\delta}|\eta|^{2-n}|x-\xi-\eta|^{2-n}\,d\eta.$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле имеет особенность только в нуле $(|x-\xi-\eta| \geqslant |x-\xi|-\delta > 0),$ и поэтому операцию дифференцирования по ξ этого интеграла можно внести под знак интеграла, а значит, $F(x,\xi)$ – гармоническая функция по $\xi.$ Следовательно, в силу свойств функции $E_4(x,\xi)$ получаем, что

$$\Delta_\xi g_0(x,\xi) = \Delta_\xi(E_4^r(x,\xi) - E_4(x,\xi)) = -E(x,\xi) - (-E(x,\xi)) = 0$$

при $x \neq \xi.$ Функция $E_4(x,\xi)$ при $\xi = x$ имеет особенность $\mathrm{O}(|x-\xi|^{4-n}),$ если $n > 4.$ Далее,

$$E_4^r(x,\xi) = C\int\limits_{|\xi+\eta|<1}|x-\xi-\eta|^{n-2}|\eta|^{n-2}\,d\eta \leqslant C\int\limits_{|\eta|<2}|z-\eta|^{2-n}|\eta|^{2-n}\,d\eta =$$

$$= C\biggl(\int\limits_{|z|<|\eta|<2} + \int\limits_{|\eta|<|z|}\biggr)|z-\eta|^{2-n}|\eta|^{2-n}\,d\eta \equiv I_1 + I_2,$$

где $z = x - \xi$. Для интеграла I_1 справедлива оценка

$$I_1 \leqslant C|z|^{3-n} \int\limits_{|\eta|<2} |z-\eta|^{2-n}|\eta|^{-1}\, d\eta = \mathrm{O}(|z|^{3-n}),$$

так как, согласно [18, с. 27], интеграл в правой части неравенства ограничен. Кроме того,

$$I_2 = C|z|^{2-n}|z|^n \int\limits_{|\theta|z||<|z|} |z-\theta|z||^{2-n}|\theta|^{2-n}\, d\theta = C|z|^{4-n} \int\limits_{|\theta|<1} |\hat{z}-\theta|^{2-n}|\theta|^{2-n}\, d\theta,$$

где $\hat{z} = z/|z|$. Поскольку интеграл непрерывен по $\hat{z} \in \partial S$ [18, с. 27], то $I_2 = \mathrm{O}(|x-\xi|^{4-n})$. Значит, $g_0(x,\xi) = \mathrm{O}(|z|^{3-n})$ и по теореме о стирании особенностей [18, с. 368] функция $g_0(x,\xi)$ гармоническая в S.

Каждая из функций $E_4^r(x,\xi)$ и $E_4(x,\xi)$ симметрична, поэтому функция $g_0(x,\xi)$ является гармонической и по x. Теперь преобразуем функцию G_4^r. Согласно доказанному выше имеем

$$G_4^r(x,\xi) = E_4(x,\xi) + g_0(x,\xi) + \frac{1}{\omega_n}\bigg(\int\limits_S E(x,y) g^d(y,\xi)\, dy +$$

$$+ \int\limits_S g^d(x,y) E(y,\xi)\, dy + \int\limits_S g^d(x,y) g^d(y,\xi)\, dy\bigg) \equiv E_4(x,\xi) + g_4^r(x,\xi), \tag{10}$$

где $g^d(x,\xi) = -E(x/|x|, |x|\xi)$. Первый и третий интегралы в полученном равенстве – гармонические функции по ξ, поскольку особенность в первом интеграле интегрируемая, а дифференцирование эту особенность не усиливает. Второй интеграл в силу свойств объёмного потенциала – бигармоническая функция по ξ, так как функция $g^d(x,y) = -E(x/|x|, |x|y)$ имеет ограниченные производные по y в $\overline{S}$ при $x \in S$ [14, с. 58].

Проверим граничные условия для функции G_4^r. Вследствие свойств функции Грина $G_2(x,\xi)$ и непрерывности объёмного потенциала получаем

$$G_4^r(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y) G_2(y,\xi)|_{\xi\in\partial S}\, dy = 0,$$

где $x \in S$. С помощью (10) в силу свойств объёмного потенциала при $x \in S$ найдём, что

$$\Delta_\xi G_4^r(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = (-E(x,\xi) - g^d(x,\xi))|_{\xi\in\partial S} = -G_2(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = 0.$$

Поскольку каждая из функций $E_4(x,\xi)$ и $g^d(x,y)$ симметрична, то функция $G_4^r(x,\xi)$ из (8) также симметрична. Из равенства (10) следует, что $g_4^r(x,\xi) \in C_\xi^3(\overline{S})$ при $x \in S$, так как такими являются функции $g^d(x,\xi)$ и $g_0(x,\xi)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Функция $u \in C^4(S) \bigcap C^3(\overline{S})$, являющаяся решением задачи Навье (6), может быть представлена в виде*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \frac{\partial \Delta_\xi G_4^r(x,\xi)}{\partial\nu}\varphi_0(\xi)\, ds_\xi + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \frac{\partial G_4^r(x,\xi)}{\partial\nu}\varphi_1(\xi)\, ds_\xi + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^r(x,\xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{11}$$

Если $\varphi_0 \in C(\partial S)$, $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ и $f \in C^1(\overline{S})$, то функция $u(x)$, определённая равенством (11), является решением задачи Навье (6).

Доказательство. Пусть $u \in C^4(S) \bigcap C^3(\overline{S})$ – решение задачи Навье (6). Воспользовавшись формулой (3) и аналогично выводимой формулой

$$0 = \int\limits_{\partial S} \bigg(-g_4^r(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} + \frac{\partial g_4^r(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta u - \Delta_\xi g_4^r(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu} + \frac{\partial\Delta_\xi g_4^r(x,\xi)}{\partial\nu}u(\xi)\bigg)\, ds_\xi +$$

$$+\int\limits_S g_4^r(x,\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{12}$$

придём к равенству

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\bigg(-G_4^r(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}+\frac{\partial G_4^r(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta u-$$

$$-\Delta_\xi G_4^r(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu}+\frac{\partial\Delta_\xi G_4^r(x,\xi)}{\partial\nu}u(\xi)\bigg)\,ds_\xi+\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^r(x,\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Из него, так как $G_4^r(x,\xi)|_{\xi\in\partial S}=\Delta_\xi G_4^r(x,\xi)|_{\xi\in\partial S}=0$ при $x\in S,$ вытекает представление (11).

Проверим, что функция $u(x),$ определяемая равенством (11), является решением задачи Навье (6) при $\varphi_0\in C(\partial S),$ $\varphi_1\in C^1(\partial S)$ и $f\in C^1(\overline{S}).$ Обозначим первый, второй и третий интегралы из (11) через $u_1,$ u_2 и u_3 соответственно. Поскольку $\Delta_\xi G_4^r(x,\xi)=-G_2(x,\xi)$ при $x\ne\xi$ (доказывается аналогично (9)), то, как известно, функция

$$u_1(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\frac{\partial G_2(x,\xi)}{\partial\nu}\varphi_0(\xi)\,ds_\xi\equiv w_{\varphi_0}(x)$$

является таким решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре $S,$ что его сужение на ∂S совпадает с функцией $\varphi_0.$ Далее, по теореме Фубини получаем

$$u_2(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y)\bigg(\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\frac{\partial G_2(y,\xi)}{\partial\nu}\varphi_1(\xi)\,ds_\xi\bigg)\,dy=-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y)w_{\varphi_1}(y)\,dy,$$

а значит, $\Delta_x u_2(x)=w_{\varphi_1}(x)$ и $u_2(x)|_{\partial S}=0.$ При этом от функции $w_{\varphi_1}(x)$ нужно требовать, чтобы имело место включение $w_{\varphi_1}\in C^1(\overline{S}),$ а оно выполнено, если $\varphi_1\in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ [19, лемма 2.7]. Итак, бигармоническая функция $u_1(x)+u_2(x)$ – решение задачи Навье (6) для однородного бигармонического уравнения. Наконец, в силу свойств функции $G_2(x,\xi)$ имеем

$$\Delta^2u_3(x)=-\frac{1}{\omega_n}\Delta\int\limits_S G_2(x,\xi)f(\xi)\,d\xi=f(x)$$

и $u_3(x)|_{\partial S}=\Delta u_3(x)|_{\partial S}=0.$ Следствие доказано.

Отметим, что задача Навье в шаре S безусловно разрешима [20].

3. Задача Рикье–Неймана. Задача Рикье–Неймана [17] (в [1] она называется задачей Неймана-2) заключается в нахождении функции $u\in C^4(S)\bigcap C^3(\overline{S}),$ являющейся решением следующей граничной задачи для неоднородного бигармонического уравнения:

$$\Delta^2u(x)=f(x),\quad x\in S,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial S}=\varphi_0(\xi),\quad \frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial S}=\varphi_1(\xi),\quad \xi\in\partial S. \tag{13}$$

Сначала сделаем несколько замечаний по задаче Неймана. В работе [20] построена функция Грина $\mathcal{N}(x,\xi)=E(x,\xi)-E_0(x,\xi)$ задачи Неймана для уравнения Пуассона в шаре $S,$ где гармоническая функция $E_0(x,\xi)$ записывается в виде

$$E_0(x,\xi)=\int\limits_0^1\bigg(\hat{E}\bigg(\frac{x}{|x|},t|x|\xi\bigg)+1\bigg)\frac{dt}{t}$$

и $\hat{E}(x,\xi)=\Lambda_xE(x,\xi).$ Здесь $\Lambda_xu=\sum_{i=1}^n x_iu_{x_i}.$ Очевидно, что функция $\mathcal{N}(x,\xi)$ симметрична.

Теорема 3. *Пусть* $f \in C^1(\overline{S})$ *и* $\psi \in C(\partial S)$. *Тогда решение задачи Неймана*

$$\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial S} = \psi$$

при условии

$$\int\limits_{\partial S} \psi(\xi)\, ds_\xi = \int\limits_S f(\xi)\, d\xi \tag{14}$$

с точностью до константы можно записать в виде

$$v_\psi(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \mathcal{N}(x,\xi)\psi(\xi)\, ds_\xi - \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{15}$$

Доказательство. Сначала заметим, что $\Lambda u = \partial u/\partial \nu$ на ∂S. В работе [20, теорема 2] установлено, что второй интеграл в представлении (15) является решением неоднородного уравнения Пуассона с $f \in C^1(\overline{S})$ в правой части и что

$$\Lambda_x \int\limits_S \mathcal{N}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi\bigg|_{x\in\partial S} = -\int\limits_S f(\xi)\, d\xi. \tag{16}$$

Рассмотрим первый интеграл в условии (14). Очевидно, что функция $\mathcal{N}(x,\xi)$ в силу её определения является гармонической в S. Используя симметричность функции $G_2(x,\xi)$, нетрудно подсчитать, что при $\xi \in \partial S$ справедливы равенства

$$\Lambda_x \mathcal{N}(x,\xi) = \Lambda_x E(x,\xi) - \hat{E}\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) - 1 = -\Lambda_\xi G_2(x,\xi) - 1 = -\frac{\partial G_2(x,\xi)}{\partial \nu} - 1,$$

а поэтому по свойству функции Грина $G_2(x,\xi)$ (см. (1)) задачи Дирихле в S имеем

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \Lambda_x \mathcal{N}(x,\xi)\psi(\xi)\, ds_\xi|_{x\in\partial S} = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \frac{\partial G_2(x,\xi)}{\partial \nu}\psi(\xi)\, ds_\xi\bigg|_{x\in\partial S} - \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \psi(\xi)\, ds_\xi =$$

$$= \psi(x) - \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \psi(\xi)\, ds_\xi.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial v_\psi(x)}{\partial \nu}|_{x\in\partial S} = \psi(x) - \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \psi(\xi)\, ds_\xi + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S f(\xi)\, d\xi.$$

Теперь, воспользовавшись условием (14), заключаем, что гармоническая в S функция $v_\psi(x)$ удовлетворяет также и граничному условию задачи Неймана. Теорема доказана.

В доказательстве теоремы 3 для любой функции $\varphi \in C(\partial S)$ получена следующая формула:

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \frac{\partial \mathcal{N}(x,\xi)}{\partial \nu_x}\varphi(\xi)\, ds_\xi\bigg|_{x\in\partial S} = \varphi(x) - \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{17}$$

Вернёмся к задаче Рикье–Неймана (13). Рассмотрим функцию вида

$$G_4^{rn}(x,\xi) = E_4(x,\xi) + g_4^{rn}(x,\xi), \tag{18}$$

где $g_4^{rn}(x,\xi) \in C^4(S)\bigcap C^3(\overline{S})$ – бигармоническая функция по переменным $x,\xi \in S$ такая, что

$$\frac{\partial G_4^{rn}(x,\xi)}{\partial \nu}\bigg|_{\xi\in\partial S} = 0, \quad \frac{\partial \Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi)}{\partial \nu}\bigg|_{\xi\in\partial S} = 1 \tag{19}$$

при $x \in S.$ Назовём функцию $G_4^{rn}(x,\xi)$ *функцией Грина задачи Рикье–Неймана* (13).

Теорема 4. *Функцию Грина $G_4^{rn}(x,\xi)$ задачи Рикье–Неймана (13) можно представить в виде*

$$G_4^{rn}(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n}\bigg(\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\mathcal{N}(y,\xi)\,dy - \frac{1}{\tau_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy \int\limits_S \mathcal{N}(y,\xi)\,dy\bigg), \tag{20}$$

где $\tau_n = |S|$ – объём шара $S.$ Функция Грина $G_4^{rn}(x,\xi)$ является симметричной функцией.

Доказательство. Сначала докажем, что функция (20) представима в виде (18). Нетрудно видеть, что имеет место равенство

$$G_4^{rn}(x,\xi) = E_4^n(x,\xi) - \frac{1}{\omega_n}\bigg(\int\limits_S E(x,y)E_0(y,\xi)\,dy + \int\limits_S E_0(x,y)E(y,\xi)\,dy -$$

$$-\int\limits_S E_0(x,y)E_0(y,\xi)\,dy + \frac{1}{\tau_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy\int\limits_S \mathcal{N}(y,\xi)\,dy\bigg) \equiv E_4(x,\xi) + g_4^{rn}(x,\xi),$$

которое аналогично равенству $E_4^r(x,\xi) = E_4(x,\xi) + g_0(x,\xi)$ из теоремы 2. Первый и третий интегралы в полученном выше равенстве – гармонические функции по $\xi,$ так как особенность в первом интеграле интегрируемая, а дифференцирование эту особенность не усиливает. Второй интеграл в силу свойств объёмного потенциала – бигармоническая функция по $\xi,$ поскольку функция $E_0(x,\xi)$ имеет ограниченные производные по ξ в $\overline{S}$ при $x \in S.$

Проверим граничные условия для функции $G_4^{rn}(x,\xi).$ По свойству (16) функции Грина $\mathcal{N}(x,\xi)$ и непрерывной дифференцируемости объёмного потенциала при $x \in S$ имеем

$$\frac{\partial G_4^{rn}(x,\xi)}{\partial \nu}\bigg|_{\xi\in\partial S} = \frac{1}{\omega_n}\bigg(-\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy + \frac{1}{\tau_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy\,\tau_n\bigg) = 0.$$

В работе [20] установлено, что $\Lambda_\xi \mathcal{N}(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = -1,$ и так как

$$\Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi) = -\mathcal{N}(x,\xi) + \frac{1}{|S|}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy$$

при $x \neq \xi$ (доказывается аналогично (9)), то при $x \in S$ выполняется равенство

$$\frac{\partial \Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi)}{\partial \nu}\bigg|_{\xi\in\partial S} = 1.$$

Симметричность функции $G_4^{rn}(x,\xi)$ вытекает из симметричности функции $\mathcal{N}(x,\xi).$ Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть функция $u \in C^4(S)\bigcap C^3(\overline{S})$ является решением задачи Рикье–Неймана (13). Тогда эта функция может быть представлена в виде*

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} \Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi)\varphi_0(\xi)\,ds_\xi - \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S} G_4^{rn}(x,\xi)\varphi_1(\xi)\,ds_\xi +$$

$$+\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^{rn}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi + C, \tag{21}$$

где C – некоторая постоянная.

Если $\varphi_0 \in C(\partial S)$, $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ и $f \in C^1(\overline{S})$, то функция $u(x)$, определённая равенством (21), является решением задачи Рикье–Неймана (13) при условии

$$\int\limits_{\partial S} \varphi_1(\xi)\,ds_\xi = \int\limits_S f(\xi)\,d\xi. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение задачи Рикье–Неймана (13). Аналогично доказательству следствия 1, воспользовавшись формулами (3) и (12) при $g_4^r(x,\xi) = g_4^{rn}(x,\xi)$, придём к равенству

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\biggl(-G_4^{rn}(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} + \frac{\partial G_4^{rn}(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta u -$$

$$- \Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu} + \frac{\partial\Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi)}{\partial\nu}u(\xi)\biggr)\,ds_\xi + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^{rn}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi,$$

учитывая в котором равенство (19), получаем представление (21) при $C = \int_{\partial S} u(\xi)\,ds_\xi/\omega_n$.

Проверим, что функция $u(x)$, заданная равенством (21), – решение задачи Навье при $\varphi_0 \in \in C(\partial S)$, $\varphi_1 \in C^1(\partial S)$ и $f \in C^1(\overline{S})$. Обозначим первый, второй и третий интегралы из (21) через v_1, v_2 и v_3 соответственно. Поскольку при $x \ne \xi$ справедливо равенство

$$\Delta_\xi G_4^{rn}(x,\xi) = -\mathcal{N}(x,\xi) + \frac{1}{\tau_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy,$$

то в силу представления (15) функция

$$v_1(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\mathcal{N}(x,\xi)\varphi_0(\xi)\,ds_\xi - \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\biggl(\frac{1}{\tau_n}\int\limits_{\partial S}\varphi_0(\xi)\,ds_\xi\biggr)\,dy$$

является решением задачи Неймана для уравнения Лапласа в S с функцией φ_0 на границе и значением $\int_{\partial S}\varphi_0(\xi)\,ds_\xi/\tau_n$ в правой части уравнения (требуемое условие равенства интегралов выполнено). Значит, $v_1(x)$ – бигармоническая функция, удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial v_1}{\partial\nu}\bigg|_{\partial S} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial\Delta v_1}{\partial\nu}\bigg|_{\partial S} = 0.$$

Далее, в силу теоремы Фубини будем иметь

$$v_2(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\biggl(\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\mathcal{N}(y,\xi)\varphi_1(\xi)\,ds_\xi - \int\limits_{\partial S}\frac{1}{\tau_n}\int\limits_S \mathcal{N}(z,\xi)\,dz\,\varphi_1(\xi)\,ds_\xi\biggr)\,dy,$$

откуда в силу (15) (интеграл по y от выражения в скобках равен нулю) получаем

$$\Delta_x v_2(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\mathcal{N}(x,\xi)\varphi_1(\xi)\,ds_\xi - \int\limits_{\partial S}\frac{1}{\tau_n}\int\limits_S \mathcal{N}(z,\xi)\,dz\,\varphi_1(\xi)\,ds_\xi \equiv v_{\varphi_1;0}(x) - C$$

и $\partial v_2/\partial\nu|_{\partial S} = 0$. Кроме того, $\Delta_x^2 v_2(x) = 0$ и, согласно формуле (17),

$$\frac{\partial\Delta v_2}{\partial\nu}|_{\partial S} = \varphi_1(x) - \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\varphi_1(\xi)\,d\xi.$$

Для вычисления $\Delta_x v_2(x)$ нужно требовать, чтобы имело место включение $v_{\varphi_1;0} \in C^1(\overline{S})$, а оно выполнено, если $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ [19]. Наконец, в силу свойств функций $G_4^{rn}(x,\xi)$ и $\mathcal{N}(x,\xi)$ имеем

$$\Delta^2 v_3(x) = -\frac{1}{\omega_n}\Delta \int\limits_S \mathcal{N}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = f(x)$$

при $f \in C^1(\overline{S})$. Теперь, воспользовавшись тем, что в этом равенстве производную можно внести под знак объёмного потенциала, и равенством $\Lambda_x \mathcal{N}(x,\xi)|_{x\in\partial S} = -1$, получаем

$$\frac{\partial v_3}{\partial \nu}|_{x\in\partial S} = 0, \quad \frac{\partial \Delta v_3}{\partial \nu}|_{x\in\partial S} = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S f(\xi)\, d\xi.$$

Таким образом, функция $u(x) = v_1(x) + v_2(x) + v_3(x)$ является решением следующей задачи Рикье–Неймана:

$$\Delta^2 u(x) = 0 + 0 + f(x) = f(x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{x\in\partial S} = \varphi_0(x) + 0 + 0 = \varphi_0(x),$$
$$\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\bigg|_{x\in\partial S} = 0 + \varphi_1(x) - \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial S}\varphi_1(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S f(\xi)\, d\xi.$$

Поэтому, если выполнены условия (22), то функция $u(x)$, определённая равенством (21), является решением задачи (13). Теорема доказана.

Замечание. Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Рикье–Неймана для полигармонического уравнения получено в работе [17], и это условие (22).

4. Примеры. Пусть $\{H_k^{(i)}(x) : i = \overline{1, h_k},\ \ k \in \mathbb{N}_0\}$ – полная система однородных степени $k \in \mathbb{N}_0$ и ортогональных на ∂S сферических гармоник (см., например, [21]), нормированных так, что $\int_{\partial S}(H_k^{(i)}(\xi))^2\, ds_\xi = \omega_n$, и

$$h_k = \frac{2k+n-2}{n-2}\binom{k+n-3}{n-3}$$

при $n > 2$ ($h_k = 2$ при $n = 2$) – размерность базиса однородных гармонических многочленов степени k.

Найдём решения рассмотренных выше однородных задач (нулевые значения на границе) для неоднородного бигармонического уравнения в шаре при $f(x) = |x|^{2l} H_m^{(j)}(x)$, $l \in \mathbb{N}_0$.

4.1. Задача Навье. По теореме 2 функция Грина задачи Навье $G_4^r(x,\xi)$ имеет вид

$$G_4^r(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y) G_2(y,\xi)\, dy.$$

Функция $G_2(x,\xi)$ симметрична и из работы [15, лемма 3.2] следует, что при $n > 2$ и $|x| > |\xi|$ справедливо представление

$$G_2(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(2k+n-2)} - 1}{2k+n-2} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi).$$

Вычислим следующий интеграл:

$$I(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^1 \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1} G_2(x,\rho\xi) f(\rho\xi)\, ds_\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\int\limits_0^{|x|-\varepsilon} + \int\limits_{|x|+\varepsilon}^{1}\Bigg)\rho^{n-1}d\rho\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1} G_2(x,\rho\xi)f(\rho\xi)\,ds_\xi \equiv \lim_{\varepsilon\to+0}(I_1^\varepsilon(x)+I_2^\varepsilon(x)).$$

Если $x=0,$ то интеграл $I_1^\varepsilon(x)$ нужно опустить. Вычислим интеграл $I_1^\varepsilon(x).$ Так как $|\xi| < |x|-\varepsilon \equiv a < |x|,$ то, согласно [15, лемма 3.1], следующий ниже ряд сходится равномерно по ξ и поэтому суммирование и интегрирование можно поменять местами:

$$I_1^\varepsilon(x) = \int\limits_0^{|x|-\varepsilon} \rho^{2l+m+n-1+k}\,d\rho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{-(2k+n-2)}-1}{2k+n-2}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1} H_k^{(i)}(\xi)H_m^{(j)}(\xi)\,ds_\xi.$$

Вследствие ортогональности системы $\{H_k^{(i)}(x) : i=\overline{1,h_k},\ \ k\in\mathbb{N}_0\}$ находим, что

$$I_1^\varepsilon(x) = \frac{|x|^{-(2m+n-2)}-1}{2m+n-2}\frac{(|x|-\varepsilon)^{2l+2m+n}}{2l+2m+n}H_m^{(j)}(x).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to+0,$ получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0} I_1^\varepsilon(x) = \frac{|x|^{2l+2}-|x|^{2l+2m+n}}{(2m+n-2)(2l+2m+n)}H_m^{(j)}(x).$$

Аналогично, используя симметричность функции $G_2(x,\xi),$ найдём, что

$$I_2^\varepsilon(x) = \int\limits_{|x|+\varepsilon}^{1} \rho^{2l+2m+n-1}\frac{\rho^{-(2m+n-2)}-1}{2m+n-2}\,d\rho\,H_m^{(j)}(x) =$$

$$= \frac{1}{2m+n-2}\left(\frac{1}{2l+2}-\frac{1}{2l+2m+n}-\frac{(|x|+\varepsilon)^{2l+2}}{2l+2}+\frac{(|x|+\varepsilon)^{2l+2m+n}}{2l+2m+n}\right)H_m^{(j)}(x).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to+0,$ получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0} I_2^\varepsilon(x) = \frac{1}{2m+n-2}\left(\frac{1-|x|^{2l+2}}{2l+2}-\frac{1-|x|^{2l+2m+n}}{2l+2m+n}\right)H_m^{(j)}(x).$$

Таким образом, будем иметь

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,\xi)|\xi|^{2l}H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi = I_1^0(x)+I_2^0(x) = \frac{1}{C_{l,m}}(1-|x|^{2l+2})H_m^{(j)}(x),$$

где обозначено $C_{l,m}=(2l+2)(2l+2m+n).$ Следовательно, в силу теоремы Фубини

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^r(x,\xi)|\xi|^{2l}H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y)\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(y,\xi)|\xi|^{2l}H_m^{(j)}(\xi)\,d\xi\,dy =$$

$$= \frac{1}{C_{l,m}}\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_2(x,y)(1-|y|^{2l+2})H_m^{(j)}(y)\,dy = \left(\frac{|x|^{2l+4}-1}{C_{l,m}C_{l+1,m}}+\frac{1-|x|^2}{C_{l,m}C_{0,m}}\right)H_m^{(j)}(x). \tag{23}$$

4.2. Задача Рикье–Неймана. По теореме 4 функция Грина $G_4^{rn}(x,\xi)$ имеет вид

$$G_4^{rn}(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n}\left(\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\mathcal{N}(y,\xi)\,dy - \frac{n}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\,dy\int\limits_S \mathcal{N}(y,\xi)\,dy\right).$$

Условие разрешимости однородной задачи Рикье–Неймана при $f(x) = |x|^{2l} H_m^{(j)}(x)$ даётся равенством $\int_S |\xi|^{2l} H_m^{(j)}(\xi)\, d\xi = 0$, которое возможно только при $m > 0$, поскольку при таких m верно равенство $\int_{\partial S} H_m^{(j)}(\xi)\, ds_\xi = 0$. В работе [20, замечание 2] доказана формула

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,\xi)|\xi|^{2l} H_m^{(j)}(\xi)\, d\xi = -\frac{|x|^{2l+2} - (2l+2+m)/m}{C_{l,m}} H_m^{(j)}(x). \tag{24}$$

В силу теоремы Фубини имеем

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^{rn}(x,\xi)|\xi|^{2l} H_m^{(j)}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(y,\xi) f(\xi)\, d\xi\, dy -$$

$$-\frac{n}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\, dy\, \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \left(\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(y,\xi)\, dy\right)|\xi|^{2l} H_m^{(j)}(\xi)\, d\xi \equiv J_1(x) + J_2(x).$$

Вычислим интеграл $J_1(x)$. В силу формулы (24) получаем

$$J_1(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,y)\frac{|y|^{2l+2} - (2l+2+m)/m}{C_{l,m}} H_m^{(j)}(y)\, dy =$$

$$= \left(\frac{|x|^{2l+4} - (2l+4+m)/m}{C_{l,m}C_{l+1,m}} - \frac{2l+2+m}{mC_{l,m}}\frac{|x|^2 - (m+2)/m}{C_{0,m}}\right) H_m^{(j)}(x).$$

Из результатов работы [20, теорема 1] при $|\xi| > |x|$ следует представление

$$\mathcal{N}(x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi|^{-(2k+n-2)} + (k+n-2)/k}{2k+n-2}\sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi) + \frac{|\xi|^{-(n-2)}}{n-2},$$

из которого находим, что

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(x,\xi)\, d\xi = \frac{1}{\omega_n}\left(\int\limits_0^{|x|} + \int\limits_{|x|}^{1}\right)\rho^{n-1}\int\limits_{\partial S}\mathcal{N}(x,\rho\xi)\, ds_\xi\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{n-2}\left(\frac{|x|^2}{n} + \frac{1}{2} - \frac{|x|^2}{2}\right) = \frac{1}{2(n-2)} - \frac{|x|^2}{2n}.$$

Поэтому, используя симметричность функции $\mathcal{N}(x,\xi)$, получаем

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\left(\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}(y,\xi)\, dy\right)|\xi|^{2l} H_m^{(j)}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S\left(\frac{|\xi|^{2l}}{2(n-2)} - \frac{|\xi|^{2l+2}}{2n}\right) H_m^{(j)}(\xi)\, d\xi = 0,$$

откуда следует, что $J_2(x) = 0$. Значит, при $m > 0$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S G_4^{rn}(x,\xi)|\xi|^{2l} H_m^{(j)}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \left(\frac{|x|^{2l+4} - (2l+4+m)/m}{C_{l,m}C_{l+1,m}} - \frac{2l+2+m}{mC_{l,m}}\frac{|x|^2 - (m+2)/m}{C_{0,m}}\right) H_m^{(j)}(x). \tag{25}$$

Поскольку коэффициенты при многочленах $H_m^{(j)}(x)$ в правых частях формул (23) и (25) не зависят от индекса j, то в них можно положить $H_m^{(j)}(x) = H_m(x)$, где $H_m(x)$ – произвольный однородный гармонический многочлен степени m.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (Постановление № 211 от 16.03.2013, соглашение № 02.A03.21.0011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Begehr H.* Biharmonic Green functions // Le Matematiche. 2006. V. 61. № 2. P. 395–405.
2. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Modified harmonic Robin function // Complex Variables and Elliptic Equat. 2013. V. 58. № 4. P. 483–496.
3. *Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 2015. V. 6. № 3. P. 163–172.
4. *Ying Wang, Liuqing Ye.* Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // Complex Variables and Elliptic Equat. 2013. V. 58. № 1. P. 7–22.
5. *Ying Wang.* Tri-harmonic boundary value problems in a sector // Complex Variables and Elliptic Equat. 2014. V. 59. № 5. P. 732–749.
6. *Boggio T.* Sulle funzioni di Green d'ordine m // Palermo Rend. 1905. V. 20. P. 97–135.
7. *Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y.* Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equat. 2008. V. 53. P. 177–183.
8. *Карачик В.В., Антропова Н.А.* Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. 2013. V. 49. № 2. С. 250–254.
9. *Karachik V.V., Turmetov B.Kh.* On Green's function of the Robin problem for the Poisson equation // Adv. in Pure and Appl. Math. 2019. V. 10. № 3. С. 203–214.
10. *Карачик В.В.* Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Мат. заметки. 2020. Т. 107. № 1. С. 87–105.
11. *Карачик В.В., Торебек Б.Т.* О задаче Дирихле–Рикье для бигармонического уравнения // Мат. заметки. 2017. Т. 102. № 1. С. 39–51.
12. *Карачик В.В.* Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Мат. труды. 2016. Т. 19. № 2. С. 86–108.
13. *Солдатов А.П.* О фредгольмовости и индексе обобщённой задачи Неймана // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 217–225.
14. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М., 1982.
15. *Karachik V.V.* Green's function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 9. P. 1500–1521.
16. *Sweers G.* A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equat. 2009. V. 54. P. 79–93.
17. *Карачик В.В.* Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. 2018. V. 54. № 5. С. 653–662.
18. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
19. *Алимов Ш.А.* Об одной задаче с наклонной производной // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 10. С. 1738–1751.
20. *Карачик В.В., Турметов Б.Х.* О функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона // Мат. труды. 2018. Т. 21. № 1. С. 17–34.
21. *Karachik V.V.* On one set of orthogonal harmonic polynomials // Proc. of the Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. № 12. P. 3513–3519.

Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет),
г. Челябинск

Поступила в редакцию 16.09.2020 г.
После доработки 16.09.2020 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.