ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 5, с. 687–699

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956+517.958:539.3

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

© 2021 г. О. И. Махмудов, И. Э. Ниёзов

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений термоупругости в пространственной области по его значениям и значениям его напряжений, известным на части границы этой области, т.е. задача Коши.

DOI: 10.31857/S0374064121050101

Введение. В настоящей работе предлагается явная формула восстановления решения систем термоупругости в пространственной области по его значениям и значениям напряжений, заданным только на части границы области. Рассмотрения ведутся в двух направлениях: поиск разумных условий разрешимости и вывод формул для решений, а также критериев разрешимости поставленной задачи.

Для решения задач теории упругости требуется задание тех или иных граничных условий на всей границе области. В классических задачах это задание либо вектора смещения, либо вектора напряжения на всей границе области, либо смещений на одной части границы, а напряжений – на другой. В других вариантах задач на каждой части границы заданы комбинации необходимого количества компонент смещений и напряжений. Эти краевые задачи или подобные им задачи математической физики являются корректными и хорошо изучены. Во многих реальных задачах, однако, смещения и напряжения либо недоступны для измерения на части границы, либо известны опосредовано при помощи некоторых их интегральных характеристик.

Система уравнений термоупругости является эллиптической. Как известно, задача Коши для эллиптических уравнений некорректна (пример Адамара). Решение может существовать, тогда оно единственно, но не устойчиво, т.е. решение может сильно изменяться при малом изменении начальных данных. В некорректных задачах существование решения и принадлежность его классу корректности предполагается априори.

Задача Коши для эллиптических уравнений являлась предметом изучения математиков на протяжении двадцатого века и продолжает по сей день притягивать внимание исследователей.

Развитие специальных методов, позволяющих работать с некорректными задачами Коши, стимулировалось запросами практики. Такие задачи ставились в гидродинамике, в теории передачи сигналов, в томографии, в геологоразведке, в геофизике, в теории упругости и т.д.

Решение задачи Коши для одномерной системы уравнений Коши–Римана впервые получил Т. Карлеман в 1926 г. [1]. Им была предложена идея введения в интегральную формулу Коши дополнительной функции, позволяющей при помощи предельного перехода погасить влияние интегралов по той части границы, где значения продолжаемой функции не заданы. Идею Карлемана развили Г.М. Голузин и В.И. Крылов в 1933 г. [2], которые нашли общий способ получения формул Карлемана для одномерной системы уравнений Коши–Римана.

На основе результатов Карлемана и Голузина–Крылова М.М. Лаврентьев ввёл понятие функции Карлемана для одномерной системы уравнений Коши–Римана. Метод Лаврентьева [3] состоит в аппроксимации ядра Коши на дополнительной части границы области вне носителя данных задачи Коши.

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа – это фундаментальное решение, зависящее от положительного числового параметра, стремящегося к нулю вместе со своей производной по нормали на части границы области вне носителя данных Коши, когда параметр стремится к бесконечности. При помощи функции Карлемана и интегральной формулы

Грина получается формула Карлемана, которая даёт точное решение задачи Коши, когда данные заданы точно. Построение функции Карлемана позволяет также строить регуляризацию, если данные Коши заданы приближённо. Существование функции Карлемана следует из аппроксимационной теоремы Мергеляна [4].

В 1959 г. В.А. Фок и Ф.М. Куни [5] нашли применение формулы Карлемана для одномерной системы уравнений Коши–Римана. В случае, когда часть границы области является отрезком действительной оси, они, используя формулу Карлемана, нашли критерий разрешимости задачи Коши для системы уравнений Коши–Римана на плоскости. Аналог формулы Карлемана и критерии разрешимости задачи Коши для аналитических функций многих переменных получены в работах [6, 7], для гармонических функций – в работах [8–10], а также в работах авторов [11–16].

Монографии [3, 9, 17, 18] представляют собой достаточно полный обзор по формулам Карлемана.

В данной работе на основе метода функции Карлемана строится регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений термоупругости.

Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$ и $y=(y_1,y_2,y_3)$ – точки вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, D – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей ∂D и S – гладкая часть ∂D.

Пусть 4-компонентная вектор-функция $U(x)=(u_1(x),u_2(x),u_3(x),u_4(x))^*$, где * здесь и далее означает операцию транспонирования, удовлетворяет в области D системе уравнений термоупругости [19, с. 50]

$$B(\partial_x,\omega)U(x)=0, \tag{1}$$

где $B(\partial_x,\omega)=\|B_{kj}(\partial_x,\omega)\|_{4\times 4}$ – операторная 4×4-матрица с элементами

$$B_{kj}(\partial_x,\omega)=\delta_{kj}(\mu\Delta+\rho\omega^2)+(\lambda+\mu)\partial^2/\partial x_k\partial x_j,\quad k,j=1,2,3,$$

$$B_{k4}(\partial_x,\omega)=-\gamma\partial/\partial x_k,\quad k=1,2,3,$$

$$B_{4j}(\partial_x,\omega)=-i\omega\eta\partial/\partial x_j,\quad j=1,2,3,$$

$$B_{44}(\partial_x,\omega)=\Delta+i\omega/\theta,$$

Δ – оператор Лапласа, δ_{kj} – символ Кронекера, i – мнимая единица, т.е. $i^2=-1$, коэффициенты λ, μ, ρ, ω, θ – характеристики среды – удовлетворяют условиям $\mu>0$, $\lambda+2\mu>0$, $\theta>0$, $\rho>0$, $\gamma\eta>0$, а ω – некоторое действительное число, называемое *частотой колебания.*

Пусть $U(x)=(u(x),v(x))^*$, где $u(x)=(u_1(x),u_2(x),u_3(x))$ – вектор смещения, $v(x)$ – температура среды. Тогда уравнение (1) можно записать в виде системы

$$\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}u-\gamma\operatorname{grad}v+\rho\omega^2u=0,$$

$$\Delta v+\frac{i\omega}{\theta}v+i\omega\eta\operatorname{div}u=0,$$

где λ, μ – постоянные Ламе.

Вектор-функция $U(y)$ называется *регулярной* в D, если она непрерывна вместе со своими частными производными второго порядка в D и первого порядка на $\overline{D}=D\bigcup\partial D$.

1. Фундаментальные решения уравнений термоупругости и интегральное представление. Для уравнения термоупругости (1) имеем

$$\det B(\partial_x,\omega)=\mu^2(\lambda+2\mu)(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_2^2)(\Delta+\lambda_3^2)^2,$$

где λ_1^2 и λ_2^2 определяются из уравнений

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=\frac{i\omega}{\theta}+\frac{i\omega\gamma\eta}{\lambda+2\mu}+k_1^2,\quad \lambda_1^2\lambda_2^2=\frac{i\omega}{\theta}k_1^2,$$

$k_1^2=\rho\omega^2/(\lambda+2\mu)$, причём предполагается, что $\lambda_1^2\neq\lambda_2^2$, а $\lambda_3^2=\rho\omega^2/\mu$.

Алгебраическое дополнение элемента $B_{kj}(\partial_x,\omega)$ в детерминанте $\det B(\partial_x,\omega)$, которое обозначим через $\mathcal{B}_{kj}(\partial_x,\omega)$, равно

$$\mathcal{B}_{kj}(\partial_x,\omega)=\mu^2(\lambda+2\mu)(1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\bigg\{\frac{\delta_{kj}}{\mu}(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_2^2)(\Delta+\lambda_3^2)-$$

$$-\frac{1}{\mu(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\bigg[(\lambda+\mu)\bigg(\Delta+\frac{i\omega}{\theta}\bigg)+i\omega\eta\gamma\bigg](\Delta+\lambda_3^2)\bigg\}+\gamma\mu^2\delta_{k4}(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta+\lambda_3^2)^2-$$

$$-i\eta\mu^2\omega\delta_{j4}(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}(\Delta+\lambda_3^2)^2+\mu^2(\lambda+2\mu)\delta_{k4}\delta_{j4}(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_3^2)^2,\quad k,j=\overline{1,4}.$$

Подставляя в систему (1) вместо U матрицу

$$U=\|\mathcal{B}_{kj}(\partial_x,\omega)\|^*_{4\times4}\varphi, \tag{2}$$

где φ – скалярная функция, получаем

$$\sum_{q=1}^3 B_{kq}(\partial_x,\omega)\mathcal{B}_{qj}(\partial_x,\omega)\varphi=\sum_{q=1}^3 B_{kq}(\partial_x,\omega)\mathcal{B}_{jq}(\partial_x,\omega)\varphi\equiv$$

$$\equiv\delta_{kj}\det B(\partial_x,\omega)\varphi=\delta_{kj}\mu^2(\lambda+2\mu)(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_2^2)(\Delta+\lambda_3^2)^2\varphi=0,\quad k,j=\overline{1,4},$$

и для функции $\psi=\mu^2(\lambda+2\mu)(\Delta+\lambda_3^2)\varphi$ имеем уравнение

$$(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_2^2)(\Delta+\lambda_3^2)\psi=0.$$

Для того чтобы матрица решений (2) оказалась фундаментальной, мы должны найти такое решение последнего уравнения, частные производные четвёртого порядка которого имеют особенности лишь вида $|x|^{-1}$. Такое решение, если оно существует, должно удовлетворять условиям

$$(\Delta+\lambda_{q+1}^2)(\Delta+\lambda_{q+2}^2)\psi=\frac{\exp(\lambda_q|x|)}{2\pi|x|},\quad q=1,2,3,$$

где $\lambda_4=\lambda_1$, $\lambda_5=\lambda_2$.

Рассматривая эти соотношения как систему уравнений относительно ψ, $\Delta\psi$, $\Delta^2\psi$, найдём

$$\psi=\frac{1}{2\pi}\sum_{q=1}^3\frac{\exp(i\lambda_q|x|)}{(\lambda_{q+1}^2-\lambda_q^2)(\lambda_{q+2}^2-\lambda_q^2)|x|}, \tag{3}$$

и после подстановки значения ψ в (2), помня, что $\mathcal{B}_{jq}(\partial_x,\omega)$ содержит множитель $\Delta+\lambda_3^2$, получим матрицу фундаментальных решений уравнения (1)

$$\Psi(x,\omega)=\|\Psi_{kj}(x,\omega)\|_{4\times4}, \tag{4}$$

здесь

$$\Psi_{kj}(x,\omega)=\sum_{q=1}^3\bigg\{(1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\bigg(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu}\delta_{3q}-\alpha_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\bigg)+$$

$$+\beta_q\bigg[i\omega\eta(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}-\gamma(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}\bigg]+\delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_q\bigg\}\frac{\exp(i\lambda_q|x|)}{|x|},$$

где

$$\alpha_q=\frac{(-1)^q(1-i\omega\theta^{-1}\lambda_q^{-2})(\delta_{1q}+\delta_{2q})}{2\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}-\frac{\delta_{3q}}{2\pi\rho\omega^2},\quad \sum_{q=1}^3\alpha_q=0,$$

$$\beta_q = \frac{(-1)^q(\delta_{1q}+\delta_{2q})}{2\pi(\lambda+2\mu)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}, \quad \sum_{q=1}^{3}\beta_q = 0,$$

$$\gamma_q = \frac{(-1)^q(\lambda_q^2-k_1^2)(\delta_{1q}+\delta_{2q})}{2\pi(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}, \quad \sum_{q=1}^{3}\gamma_q = 1.$$

Несложно проверить, что каждый вектор-столбец в фундаментальной матрице $\Psi(x,\omega)$ имеет единственную особенность в точке $x=0$, и притом порядок не выше $|x|^{-1}$. Кроме того, из представления (4) с помощью непосредственных вычислений вытекает

Теорема 1. *Каждый столбец матрицы $\Psi(x,\omega)$, рассматриваемый как вектор, удовлетворяет системе (1) во всех точках пространства $\mathbb{R}^3$, кроме начала координат.*

Заметим, что матрица $\Psi(x,\omega)$ не симметрична и её строки, рассматриваемые как векторы, не удовлетворяют уравнению (1).

Для матрицы $\Psi(x,\omega)$ имеет место равенство $\Psi^*_{kj}(x,\omega)=\Psi_{jk}(-x,\omega), \quad k,j=\overline{1,4}$.

Прямым вычислением доказывается

Теорема 2. *Каждый столбец матрицы $\Psi^*(x,\omega)$, рассматриваемый как вектор, удовлетворяет союзному уравнению $B^*(\partial_x,\omega)U=0$ $(B^*_{kj}(\partial_x,\omega)=B_{jk}(-\partial_x,\omega))$ во всех точках пространства $\mathbb{R}^3$, кроме начала координат.*

Обозначим через $\mathbb{B}=\mathcal{B}/\mu^2(\lambda+2\mu)(\Delta+\lambda_3^2)$, где $\mathcal{B}=\|\mathcal{B}_{kj}(\partial_x,\omega)\|_{4\times4}$. Тогда $\mathbb{B}$ является матричным дифференциальным оператором второго порядка в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющим равенствам $\mathbb{B}B=B\mathbb{B}=pE_4$, где $p(\Delta)=(\Delta+k_1^2)(\Delta+k_2^2)(\Delta+k_3^2)$.

Функция ψ, определяемая равенством (3), является фундаментальным решением в $\mathbb{R}^3$ самосопряжённого оператора $p(\Delta)$, и $\Psi(x,\omega)=\mathbb{B}\psi$.

Отсюда следует, что если u является решением уравнения $pu=0$ в каком-то открытом множестве $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^3$, то $U=\mathbb{B}u$ будет решением уравнения $BU=0$ на $\mathcal{O}$.

Известно, что для регулярного решения системы (1) верно следующее интегральное представление [19, с. 380]:

$$2U(x)=\int\limits_{\partial D}(\Psi(x-y,\omega)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\}-\{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\widetilde{\Psi}(y-x,\omega)\}^*U(y))\,ds_y, \quad x\in D, \tag{5}$$

где $R(\partial_y,\nu(y))$ – оператор напряжения, определяемый равенством

$$R(\partial_y,\nu(y))=\|R_{kj}(\partial_y,\nu(y))\|_{4\times4}=\begin{pmatrix} & & & -\gamma\nu_1\\ & T & & -\gamma\nu_2\\ & & & -\gamma\nu_3\\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial\nu(y)\end{pmatrix},$$

$$T=T(\partial_y,\nu(y))=\|T_{kj}(\partial_y,\nu(y))\|_{3\times3},$$

$$T_{kj}(\partial_y,\nu(y))=\lambda\nu_k(y)\partial/\partial y_j+\mu\nu_j(y)\partial/\partial y_k+(\lambda+\mu)\delta_{kj}\partial/\partial\nu(y), \quad k,j=1,2,3,$$

$$\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))=\|\widetilde{R}_{kj}(\partial_y,\nu(y))\|_{4\times4}=\begin{pmatrix} & & & -i\omega\eta\nu_1\\ & T & & -i\omega\eta\nu_2\\ & & & -i\omega\eta\nu_3\\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial\nu(y)\end{pmatrix},$$

$\widetilde{\Psi}(x,\omega)=\Psi^*(x,\omega)=\Psi(-x,\omega)$, $\nu(y)=(\nu_1(y),\nu_2(y),\nu_3(y))$ – внешний единичный вектор нормали к поверхности ∂D в точке y.

2. Задача Коши и критерий разрешимости. Через S обозначим гладкую открытую часть поверхности ∂D. Задача Коши для системы $BU=0$ в D с данными на S состоит в следующем: для заданных функций U_0 и U_1 на S со значениями в $\mathbb{R}^4$ найти решение U этой системы в D такое, что $U=U_0$ и $R(\partial_y,\nu(y))U=U_1$ на S.

Чтобы изучить эту задачу, мы должны выбрать функциональные пространства для U_0, U_1 и U. Строгий анализ можно найти в [9, гл. 10, § 10.4]. Этот анализ немного громоздок, так как поведение решения вблизи границы S требует внимательного изучения. Чтобы выделить основные трудности в задаче Коши, ограничимся случаем, когда U_0 и U_1 – интегрируемые функции на S классов C^1 и C соответственно. Таким образом, мы рассматриваем задачу

$$
\begin{gathered}
B(\partial_x,\omega)U(x)=0, \quad x\in D,\\
U(y)=U_0(y), \quad y\in S,\\
R(\partial_y,\nu(y))U(y)=U_1(y), \quad y\in S,
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где $U_0\in C^1(S)\bigcap L_1(S)$, $U_1\in C(S)\bigcap L_1(S)$.

Известно, что эта задача некорректна. Её некорректность аналогична некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа [8]. Хорошо известно, что задача (6) имеет не более одного решения в любом разумно выбранном пространстве функций на D.

Введём функцию

$$
2\mathcal{U}(x)=\int\limits_S(\Psi(x-y,\omega)U_1(y)-\{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi(y-x,\omega)\}^*U_0(y))\,ds_y \tag{7}
$$

для $x\notin S$. Так как фундаментальное решение $\Psi(x-y,\omega)$ является вещественным и аналитическим, кроме начала координат в $\mathbb{R}^3$, то функция $\mathcal{U}$ также является вещественно аналитической в $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$. Кроме того, $\mathcal{U}$ является решением однородной системы (1), т.е. системы

$$
B(\partial_x,\omega)\mathcal{U}(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}.
$$

В частности, компоненты векторнозначной функции $\mathcal{U}$ являются решениями скалярного уравнения

$$
p(\Delta)\varphi=(\Delta+\lambda_1^2)(\Delta+\lambda_2^2)(\Delta+\lambda_3^2)\varphi=0
$$

в $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$. Если $x\in S$, то оба интеграла $\mathcal{U}$ и $R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}$ имеют скачки, равные U_0 и U_1 соответственно.

Введём обозначения $\mathcal{U}^\pm(x)=\mathcal{U}(x)$, $x\in D^\pm$, где $D^+=D$, $D^-=\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$.

Лемма 1. *Если $S\in C^2$, а $U_0(y)\in C^1(S)\bigcap L_1(S)$, $U_1(y)\in C(S)\bigcap L_1(S)$, то вектор-функция $\mathcal{U}^-$ непрерывно продолжается вместе со своими первыми производными в $D^-\bigcup S$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}^+$ непрерывно продолжается вместе со своими первыми производными в $D^+\bigcup S$.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что существует гладкая в некоторой окрестности S в $\mathbb{R}^3$ функция $\widehat{U}$ такая, что сужение на S функций $\widehat{U}$ и $R(\partial_y,\nu(y))\widehat{U}$ равны U_0 и U_1 соответственно (см. [20, лемма 28.2]). Тогда на основании формулы Сохоцкого–Племеля получаем: если $y\in S$, $\nu(y)$ – единичный вектор внешней нормали к S в точке y, то

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\{\mathcal{U}^+(y+\varepsilon\nu(y))-\mathcal{U}^-(y-\varepsilon\nu(y))\}=U_0(y),
$$

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\{R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}^+(y+\varepsilon\nu(y))-R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}^-(y-\varepsilon\nu(y))\}=U_1(y),
$$

причём предел достигается равномерно на компактных подмножествах S. Для удобства в дальнейшем эти предельные соотношения запишем в виде

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\{\partial^p\mathcal{U}^+(y+\varepsilon\nu(y))-\partial^p\mathcal{U}^-(y-\varepsilon\nu(y))\}=\partial^p\widehat{U}(y), \quad |p|\leqslant 1, \tag{8}
$$

где $\widehat{U}(y)=U_0(y)$ при $p=0$, $\partial^1\widehat{U}(y)=U_1(y)$ при $p=1$ и $\partial^1=R(\partial_y,\nu(y))$.

Пусть, например, вектор-функция $\mathcal{U}^+$ гладко продолжается в $D^+\bigcup S$. Зафиксируем мультииндекс p $(|p|\leqslant 1)$, тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\partial^p\mathcal{U}^-(y-\varepsilon\nu(y))=\partial^p\mathcal{U}^+(y)-\partial^p\widehat{U}(y),\quad |p|\leqslant 1.$$

Доопределим $\partial^p\mathcal{U}^-$ в $D^-\bigcup S$ следующим образом:

$$\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x)=\begin{cases}\partial^p\mathcal{U}^-(x), & x\in D^-,\\ \partial^p\mathcal{U}^+(x)-\partial^p\widehat{U}(x), & x\in S.\end{cases}$$

Покажем, что $\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-$ непрерывна в $D^-\bigcup S$. Зафиксируем произвольно выбранную точку $x_0\in\in S$ и число $\tau>0$. Поскольку $\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-$ непрерывна на S, то найдётся такое δ_0, что если $x_1\in S$ и $|x_1-x_0|<\delta_0$, то справедливо неравенство

$$|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_1)-\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_0)|<\tau/2.$$

Уменьшая в случае надобности величину δ_0, можно считать, что $K=\overline{B_{\delta_0}(x_0)}\bigcap S$ – компактное подмножество в S.

Так как поверхность S является гладкой, то можно выбрать число $0<\delta<\delta_0/2$ таким, чтобы каждая точка $x\in B_\delta(x_0)\bigcap D^-$ представлялась в виде $x=x_1+\varepsilon\nu(x_1)$, где $x_1\in S$, а $\varepsilon=\operatorname{dist}(x,S)$. Тогда $\varepsilon<\delta$, поэтому $|x_1-x_0|\leqslant|x_1-x|+|x-x_0|<\delta_0$, т.е. $x_1\in K$.

Учитывая, что предел в (8) достигается равномерно на компактных подмножествах поверхности S, и уменьшая, если надо, δ, можно добиться того, чтобы при $x_1\in K$ и $0<\varepsilon<\delta$ выполнялось неравенство

$$|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_1+\varepsilon\nu(x_1))-\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_1)|<\tau/2.$$

Пусть теперь $x\in B_\delta(x_0)\bigcap D^-$, тогда $x=x_1+\varepsilon\nu(x_1)$ для некоторых $x_1\in K$ и $0<\varepsilon<\delta$. Поэтому

$$|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_0)-\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x)|\leqslant|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_0)-\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_1)|+|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_1+\varepsilon\nu(x_1))-\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^-(x_1)|<\tau.$$

Следовательно, вектор-функция $\mathcal{U}^-$ гладко продолжается в $D^-\bigcup S$, если вектор-функция $\mathcal{U}^+$ гладко продолжается в $D^+\bigcup S$, и наоборот. Лемма доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы существовало решение $U\in C^1(D\bigcup S)$ задачи Коши (6), необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\mathcal{U}$ можно было продолжить из $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$ через S в D как вещественную аналитическую функцию.*

Доказательство. Необходимость. Пусть имеется решение $U\in C^1(D\bigcup S)$ задачи Коши (6) в $\mathbb{R}^3\setminus\partial D$. Определим функцию V следующим образом:

$$V(x)=\begin{cases}\mathcal{U}(x)-U(x), & x\in D,\\ \mathcal{U}(x), & x\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}.\end{cases}\tag{9}$$

Сужение вектор-функции V на D обозначим через V^+, а на $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$ через V^-. На основе формул (5), (7) и (9) получим

$$2V^+(x)=\int\limits_{\partial D\setminus S}(\{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi(y-x,\omega)\}^*U(y)-\Psi(x-y,\omega)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\})\,ds_y$$

для всех $x\in D$.

Отсюда следует, что V^+ продолжается через S до аналитической функции V на всё множество $\mathbb{R}^3 \setminus (\partial D \setminus S)$ со значениями в $\mathbb{R}^3$, т.е.

$$2V(x) = \int\limits_S (\Psi(x-y,\omega)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi(y-x,\omega)\}^* U(y))\, ds_y$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$. Поэтому $\mathcal{U}$ по лемме 1 продолжается из $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ через S в D как вещественная аналитическая функция.

Достаточность. Обратно, пусть $\mathcal{U}$ продолжается до вещественной аналитической функции V из $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ через S в D со значениями в $\mathbb{R}^3$, так что $V = \mathcal{U}$ вне окрестности $\overline{D}$. Тогда

$$B(\partial_x,\omega)V(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}.$$

Поскольку вектор-функция $B(\partial_x,\omega)V$ является вещественно аналитической, то она также обращается в нуль на D.

Положим $U(x) = \mathcal{U}(x) - V(x)$, $x \in D$. Из только что доказанного следует, что U является гладкой функцией в окрестности поверхности S в D, удовлетворяющей уравнению $B(\partial_x,\omega)U = 0$. Мы утверждаем, что U является требуемым решением задачи (6). Несложно проверить, что $U = U_0$ и $R(\partial_y,\nu(y))U = U_1$ на S. Так как V является гладкой в $\mathbb{R}^3 \setminus (\partial D \setminus S)$, без труда можем получить формулу Сохоцкого–Племеля

$$U(y) = \mathcal{U}^+(y) - V^+(y) = \mathcal{U}^+(y) - V^-(y) = \mathcal{U}^+(y) - \mathcal{U}^-(y) = U_0(y), \quad y \in S,$$

аналогично

$$R(\partial_y,\nu(y))U(y) = R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}^+(y) - R(\partial_y,\nu(y))V^+(y) = R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}^+(y) - R(\partial_y,\nu(y))V^-(y) =$$

$$= R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}^+(y) - R(\partial_y,\nu(y))\mathcal{U}^-(y) = U_1(y), \quad y \in S.$$

Теорема доказана.

3. Базисы с двойной ортогональностью. Формула Карлемана. "Задача продолжения" функций в гильбертовых пространствах имеет приемлемое решение в терминах базисов с двойной ортогональностью (ср. [9, гл. 12]). Идея применения этого понятия принадлежит С. Бергману (1927 г.), который использовал его для вывода критерия аналитического продолжения. Мы применяем этот метод к задаче Коши (6) в том частном случае, когда D является частью шара B_R с центром в начале координат и радиусом $R > 0$.

Пусть S – гладкая замкнутая поверхность в B_R, разбивающая его на две связные компоненты B_R^+ и B_R^- и ориентированная как граница B_R^-, при этом $0 \in B_R^+$, $0 \notin S$. Пусть $D = B_R^-$ и его граница состоит из S и части границы сферы ∂B_R в $\mathbb{R}^3$.

Как показано выше, интеграл $\mathcal{U}(x)$ является решением уравнения $B(\partial_x,\omega)\mathcal{U}(x) = 0$ и его компоненты удовлетворяют скалярному уравнению $p(\Delta)u = 0$ вне $\overline{D}$. Последнее уравнение фактически является скалярным и вытекает из первого. Мы здесь применяем базисы двойной ортогональности для получения условия аналитического продолжения решения уравнения $p(\Delta)u = 0$ из маленького шара – окрестности нуля – в большой шар B_R.

Оператор Гельмгольца $\Delta + k^2$ в сферических координатах в $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\Delta + k^2 = \frac{1}{r^2}\left\{\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + r\frac{\partial}{\partial r} + k^2 r^2 - \Delta_{\mathbb{S}}\right\},$$

где $\Delta_{\mathbb{S}}$ – оператор Лапласа–Бельтрами на единичной сфере, $k > 0$.

Решая уравнение Гельмгольца $(\Delta + k^2)u = 0$ методом Фурье, получаем

$$u(r,\varphi,\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}(kr) Y_n(\varphi,\vartheta),$$

где $J_{n+1/2}(kr)$ – функция Бесселя $(n+1/2)$-го порядка, $Y_n(\varphi,\vartheta)=\sum_{m=0}^n Y_{n,m}$ – сферические функции n-го порядка [21, с. 555].

Верны следующие утверждения [22].

Теорема 4. *Для каждого* $R>0$ *система решений* $J_{n+1/2}(kr)Y_n(\varphi,\vartheta)$, $n\in\mathbb{N}$, *уравнения Гельмгольца* $(\Delta+k^2)u=0$ *является ортогональным базисом в подпространстве* $L^2(B_R)$.

Теорема 5. *Для фундаментального решения уравнения Гельмгольца в* $\mathbb{R}^3$ *имеет место разложение*

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\exp{(ik|x-y|)}}{|x-y|}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}c_{n,m}(y,k)\bar{J}_n(k|x|)P_{n,m}(x), \tag{10}$$

ряд в котором сходится равномерно вместе со всеми своими производными на компактных подмножествах конуса $\mathcal{K}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3:|x|<|y|\}$.

Здесь

$$c_{n,m}(y,k)=-\frac{1}{4\pi}\Bigg(\int\limits_{B_{|y|}}\frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|}\overline{J}_n(k|x|)P_{n,m}(x)\,dx\Bigg)\Bigg(\int\limits_0^{|y|}|J_{n+1/2}(rk)|^2r\,dr\Bigg)^{-1},$$

$$\bar{J}_n(t)=\left(\frac{k}{2}\right)^{n+1/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(t/2)^{2j}}{j!\Gamma(j+n+3/2)},$$

$P_{n,m}(x)=|x|^nY_n^m(\theta,\varphi)$ – однородные гармоники n-го порядка (шаровые функции).

Представление (10), полученное для фундаментального решения с помощью ортогонального базиса, позволяет получить следующую формулу Карлемана для восстановления решения однородной системы (1):

$$\Psi(y-x,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n(x,y), \tag{11}$$

в которой ряд равномерно сходится вместе со всеми производными на компактных подмножествах конуса $\mathcal{K}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3:|x|<|y|\}$ и каждая Ψ_n является 4×4-матрицей, так что

$$\Psi_{n,kj}(x,\omega)=\sum_{q=1}^{3}\Bigg\{(1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\bigg(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu}\delta_{3q}-\alpha_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\bigg)+$$
$$+\beta_q\bigg[i\omega\eta(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}-\gamma(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}\bigg]+\delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_q\Bigg\}\sum_{m=0}^{n}c_{n,m}(y,k)\bar{J}_n(k|x|)P_{n,m}(x).$$

Теперь, если заменить $\partial/\partial x_i$ на $-\partial/\partial y_i$, получим, что справедлива

Теорема 6. *Каждый член* $\Psi_n(x,y)$ *является вещественно аналитической матричнозначной функцией на* $\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$, *удовлетворяющей уравнениям*

$$B(\partial_x,\omega)\Psi_n(x,y)=0\quad\text{и}\quad B^*(\partial_y,\omega)(\Psi_n(x,y))^*=0.$$

Доказательство. Указанные свойства матрицы $\Psi_n(x,y)$ вытекают из её построения. Сингулярность при $y=0$ обусловлена интегралом $\int_0^{|y|}|J_{n+1/2}(rk)|^2r\,dr$. Теорема доказана.

Так как матричнозначные функции $\Psi_n(x,y)$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяют союзному уравнению $B^*(\partial_y,\omega)(\Psi_n(x,y))^*=0$, то ряда (11) достаточно для получения явной формулы решения задачи Коши (6).

Пусть

$$\Psi^{(n)}(x,y)=\Psi(x-y,\omega)-\sum_{\nu=0}^{n}\Psi_\nu(x,y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^3\setminus\{0\}).$$

Теорема 7. *Для любой вектор-функции* $U \in C^1(\overline{D})$ *верно интегральное представление*

$$2U(x) = \lim_{n\to\infty}\Big[\int\limits_S (\Psi^{(n)}(x,y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi^{(n)}(x,y)\}^* U(y))\,ds_y\Big]$$

для всех $x \in D$.

Доказательство. Из представления (5), теоремы 6 и формулы Грина вытекает равенство

$$0 = \int\limits_{\partial D} (\Psi_{(n)}(x,y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi_{(n)}(x,y)\}^* U(y))\,ds_y$$

при $x \in D$, где $\Psi_{(n)}(x,y) = \sum_{\nu=0}^n \Psi_\nu(x,y)$ – регулярное решение системы (1). Теперь, вычитая это равенство из равенства (5), будем иметь

$$2U(x) = \int\limits_{\partial D} (\Psi^{(n)}(x,y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi^{(n)}(x,y)\}^* U(y))\,ds_y. \qquad (12)$$

Левую часть равенства (12) представим в виде $I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_S (\Psi^{(n)}(x,y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi^{(n)}(x,y)\}^* U(y))\,ds_y,$$

$$I_2 = \int\limits_{\partial D\setminus S} (\Psi^{(n)}(x,y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi^{(n)}(x,y)\}^* U(y))\,ds_y.$$

При $y \in \partial D \setminus S$, где $|x| < |y|$, в интеграле I_2 последовательность матричнозначных функций $\Psi^{(n)}(y,x)$ по теореме 5 равномерно сходится к нулю, когда $n \to \infty$. Поэтому, переходя в равенстве (12) к пределу при $n \to \infty$, приходим к утверждению теоремы.

Пусть U является решением задачи (6). Вне S в $\mathbb{R}^3$ имеем

$$\int\limits_S (\Psi^{(n)}(x,y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi^{(n)}(x,y)\}^* U(y))\,ds_y = \mathcal{U}(x) - V_{(n)}(x), \qquad (13)$$

где

$$V_{(n)}(x) = \int\limits_S (\Psi_{(n)}(x,y)U_1(y) - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi_{(n)}(x,y)\}^* U_0(y))\,ds_y,$$

или

$$V_{(n)}(x) = \sum_{m=0}^n \int\limits_S (\Psi_m(x,y)U_1(y) - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\Psi_m(x,y)\}^* U_0(y))\,ds_y.$$

Теперь пусть $\varepsilon = \operatorname{dist}\{0,S\} > 0$. Если $x \in B_\varepsilon$, то левая часть равенства (13) стремится к нулю, так как ряд (11) сходится равномерно вместе со своими первыми производными по y на S. Отсюда следует, что последовательность $\{V_{(n)}\}$ сходится к $\mathcal{U}$ равномерно вместе со своими производными на компактных подмножествах шара B_ε. Отсюда и теоремы 3 вытекает условие разрешимости задачи (6).

Следствие 1. *Если последовательность* $\{V_{(n)}\}$ *сходится равномерно на компактных подмножествах шара* B_R, *то задача Коши (6) разрешима.*

Доказательство. Так как члены последовательности $\{V_{(n)}\}$ покомпонентно являются решением скалярного уравнения $p\varphi = 0$, то по теореме Стилтьеса–Витали его предел $V = \lim_{n\to\infty} V_{(n)}$ также покомпонентно удовлетворяет тому же уравнению в B_R. Поэтому V является вещественно аналитической функцией на B_R с значениями в $\mathbb{R}^3$. Но V совпадает в маленьком шаре B_ε с $\mathcal{U}$, что гарантирует по теореме 3 разрешимость задачи Коши.

4. Условие разрешимости на языке матрицы Карлемана. Пусть D – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей ∂D, состоящей из гладкой части S, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$, и части $\partial D \setminus S$, лежащей в плоскости $y_3 = 0$.

Рассмотрим задачу Коши (6). Для её решения для данной односвязной области S используется метод функции Карлемана, т.е. строится матрица Карлемана и с помощью этой матрицы даётся формула для нахождения решения внутри области.

Следуя [8], приведём

Определение. *Матрицей Карлемана задачи (6)* называется 4×4-матрица $\Pi(y,x,\omega,\sigma)$, зависящая от двух точек y, x и положительного числового параметра σ, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) имеет место равенство $\Pi(y,x,\omega,\sigma) = \Psi(y-x,\omega) + G(y,x,\sigma)$, где $\Psi(y-x,\omega)$ – матрица фундаментальных решений систем термоупругости, а матрица $G(y,x,\sigma)$ удовлетворяет по переменной y системе (1) всюду в области D;

2) справедливо неравенство $\int_{\partial D\setminus S}(|\Pi(y,x,\omega,\sigma)| + |R(\partial_y,\nu(y))\Pi(y,x,\omega,\sigma)|)\,ds_y \leqslant \varepsilon(\sigma)$, в котором $\varepsilon(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to\infty$.

Здесь и далее $|\Pi|$ – евклидова норма матрицы $\Pi = \|\Pi_{kj}\|$, т.е. $|\Pi| = \sqrt{\sum_{k,j=1}^4(\Pi_{kj})^2}$. В частности, $|U| = \sqrt{\sum_{k=1}^4 u_k^2}$.

Известно, что для вектор-функций U и $\widetilde U$, регулярных в D, и вектор-функций BU и $\widetilde B\widetilde U$, абсолютно интегрируемых в D, справедлива формула [19, с. 376]

$$\int\limits_D [U(y)\{\widetilde B(\partial_y,\omega)\widetilde U(y)\} - \widetilde U(y)\{B(\partial_y,\omega)U(y)\}]\,dy =$$

$$= \int\limits_{\partial D} [U(y)\{\widetilde R(\partial_y,\nu(y))\widetilde U(y)\} - \widetilde U(y)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\}]\,ds_y,$$

где $\widetilde B(\partial_x,\omega) = \|\widetilde B_{kj}(\partial_x,\omega)\|_{4\times 4}$, $\widetilde B_{kj}(\partial_x,\omega) = B_{jk}(-\partial_x,\omega)$.

Подставляя в это равенство вместо $\widetilde U(y)$ и $U(y)$ соответственно $G(y,x,\sigma)$ и регулярное решение $U(y)$ системы (1), будем иметь

$$0 = \int\limits_{\partial D}[G(y,x,\sigma)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde R(\partial_y,\nu(y))G^*(y,x,\sigma)\}^*U(y)]\,ds_y. \tag{14}$$

Почленно складывая равенства (5) и (14), заключаем, что имеет место

Теорема 8. *Всякое регулярное решение $U(x)$ системы (1) в области D определяется формулой*

$$2U(x) = \int\limits_{\partial D}[\Pi(y,x,\omega,\sigma)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde R(\partial_y,\nu(y))\widetilde\Pi(y,x,\omega,\sigma)\}^*U(y)]\,ds_y, \quad x\in D,$$

где $\Pi(y,x,\omega,\sigma)$ – матрица Карлемана, $\widetilde\Pi(y,x,\omega,\sigma) = \Psi(x-y,\omega) + G^*(y,x,\sigma)$.

С целью построения приближённого решения задачи (6) построим матрицу Карлемана следующим образом:

$$\Pi(y,x,\omega,\sigma) = \|\Pi_{kj}(y,x,\omega,\sigma)\|_{4\times 4},$$

$$\Pi_{kj}(y,x,\omega,\sigma) = \sum_{q=1}^3\bigg\{(1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\bigg(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu}\delta_{3q} - \alpha_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\bigg) +$$

$$+\beta_q\bigg[i\omega\eta(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j} - \gamma(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}\bigg] + \delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_q\bigg\}\Phi(y,x,\sigma,i\lambda_q), \quad k,j = 1,2,3,$$

$$\Pi_{4j}(y,x,\omega,\sigma)=\sum_{q=1}^{3}\Big\{i\beta_q\omega\eta(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}+\delta_{j4}\gamma_q\Big\}\Phi(y,x,\sigma,i\lambda_q),\quad j=1,2,3,$$

$$\Pi_{k4}(y,x,\omega,\sigma)=\sum_{q=1}^{3}\Big\{-\beta_q\gamma(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}+\delta_{k4}\gamma_q\Big\}\Phi(y,x,\sigma,i\lambda_q),\quad k=1,2,3,$$

$$\Pi_{44}(y,x,\omega,\sigma)=\sum_{q=1}^{3}\gamma_q\Phi(y,x,\sigma,i\lambda_q), \tag{15}$$

где

$$\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)=\frac{1}{-2\pi^2\exp(\sigma x_3^2)}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\frac{\exp(\sigma w^2)}{w-x_3}\frac{\cos(\Lambda u)\,du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \tag{16}$$

$w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3$, $\alpha^2=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2$, $\alpha>0$. Из результатов работы [23] вытекает

Лемма 2. *Функция $\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)$, определяемая равенством (16), представима в виде*

$$\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)=\frac{\exp(i\Lambda r)}{4\pi r}+\varphi(y,x,\sigma,\Lambda),\quad r=|y-x|, \tag{17}$$

где $\varphi(y,x,\sigma,\Lambda)$ – некоторая функция, заданная для всех значений и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца, $\Delta(\partial_y)\varphi+\Lambda^2\varphi=0$, $y\in D$, где $\Delta(\partial_y)=\partial^2/\partial y_1^2+\partial^2/\partial y_2^2+\partial^2/\partial y_3^2$.

Для функции $\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\partial D\setminus S}\bigg(|\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)|+\bigg|\frac{\partial\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)}{\partial\nu}\bigg|\bigg)\,ds_y\leqslant C(\Lambda,D)\sigma\exp(-\sigma x_3^2), \tag{18}$$

где $C(\Lambda,D)$ – некоторая ограниченная функция, не зависящая от σ.

Функцию $\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)$ назовём *функцией Карлемана для уравнения Гельмгольца.* Функция $\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)$ при $x\neq y$ дважды непрерывно дифференцируема по y, и имеют место следующие неравенства:

$$|\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)|\leqslant C_1r^{-1}\exp\{\sigma(y_3^2-x_3^2)\},$$

$$|\partial\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)/\partial y_k|\leqslant C_2r^{-2}\sigma\exp\{\sigma(y_3^2-x_3^2)\},\quad k=1,2,3,$$

$$|\partial^2\Phi(y,x,\sigma,\Lambda)/\partial y_k\partial y_j|\leqslant C_3r^{-3}\sigma^2\exp\{\sigma\,(y_3^2-x_3^2)\},\quad k,j=1,2,3. \tag{19}$$

Из леммы 2 вытекает

Лемма 3. *Матрица $\Pi(y,x,\omega,\sigma)$, определённая равенствами (15), (16), является матрицей Карлемана задачи (6).*

Доказательство. В силу равенств (15)–(17) имеем $\Pi(y,x,\omega,\sigma)=\Psi(x-y,\omega)+G(y,x,\sigma)$, где $\Psi(x-y,\omega)=\|\Psi_{kj}(x-y,\omega)\|$ и $G(y,x,\sigma)=\|G_{kj}(y,x,\sigma)\|$, а

$$\Psi_{kj}(x,\omega)=\sum_{q=1}^{3}\bigg\{(1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\bigg(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu}\delta_{3q}-\alpha_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\bigg)+$$

$$+\beta_q\bigg[i\omega\eta(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}-\gamma(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}\bigg]+\delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_q\bigg\}\frac{\exp(i\lambda_q|x|)}{|x|},$$

$$G_{kj}(y,x,\sigma)=\sum_{q=1}^{3}\bigg\{(1-\delta_{k4})(1-\delta_{j4})\bigg(\frac{\delta_{kj}}{2\pi\mu}\delta_{3q}-\alpha_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\bigg)+$$

$$+\beta_q\bigg[i\omega\eta(1-\delta_{j4})\frac{\partial}{\partial x_j}-\gamma(1-\delta_{k4})\frac{\partial}{\partial x_k}\bigg]+\delta_{k4}\delta_{j4}\gamma_q\bigg\}\varphi(y,x,\sigma,\Lambda).$$

Непосредственным вычислением несложно убедиться, что матрица $G(y,x,\sigma)$ по переменной y удовлетворяет системе (1) всюду в области D.

Используя равенства (15), (16) и (18), получаем

$$\int\limits_{\partial D\setminus S} (|\Pi(y,x,\omega,\sigma)| + |R(\partial_y,\nu(y))\Pi(y,x,\omega,\sigma)|)\,ds_y \leqslant C(x)\sigma^3\exp(-\sigma x_3^2), \tag{20}$$

где $C(x)$ – некоторая ограниченная внутри D функция, не зависящая от σ.

При $x\in D$ положим

$$2\mathcal{U}_\sigma(x) = \int\limits_S [\Pi(y,x,\omega,\sigma)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\widetilde{\Pi}(y,x,\omega,\sigma)\}^*U(y)]\,ds_y. \tag{21}$$

Имеет место

Теорема 9. *Пусть $U(x)$ – регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее условию*

$$|U(y)| + |R(\partial_y,\nu(y))U(y)| \leqslant M, \quad y\in\partial D\setminus S. \tag{22}$$

Тогда при $\sigma\geqslant 1$ справедлива оценка

$$|U(x)-\mathcal{U}_\sigma(x)| \leqslant MC_1(x)\sigma^3\exp(-\sigma x_3^2),$$

где $C_1(x) = C\int_{\partial D_\rho} r^{-2}\,ds_y$.

Доказательство. Вследствие равенств (5) и (21) имеем

$$|U(x)-\mathcal{U}_\sigma(x)| \leqslant \frac{1}{2}\Bigg|\int\limits_{\partial D\setminus S} [\Pi(y,x,\omega,\sigma)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\widetilde{\Pi}(y,x,\omega,\sigma)\}^*U(y)]\,ds_y\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D\setminus S} [|\Pi(y,x,\omega,\sigma)| + |R(\partial_y,\nu(y))\Pi(y,x,\omega,\sigma)|][|U(y)| + |R(\partial_y,\nu(y))U(y)|]\,ds_y.$$

Теперь в силу неравенств (20) и (22) получаем требуемую оценку.

Следствие 2. *При выполнении условия (21) справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения:*

$$U(x) = \lim_{\sigma\to\infty}\mathcal{U}_\sigma(x) = \frac{1}{2}\lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_S [\Pi(y,x,\omega,\sigma)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} -$$

$$- \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\widetilde{\Pi}(y,x,\omega,\sigma)\}^*U(y)]\,ds_y, \quad x\in D, \tag{23}$$

$$U(x) = \frac{1}{2}\int\limits_S [\Pi(y,x,\omega)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} - \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))\widetilde{\Pi}(y,x,\omega)\}^*U(y)]\,ds_y +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty Q(x,\omega,\sigma)\,d\sigma, \quad x\in D, \tag{24}$$

где

$$Q(x,\omega,\sigma) = \int\limits_S [P(y,x,\omega,\sigma)\{R(\partial_y,\nu(y))U(y)\} -$$

$$- \{\widetilde{R}(\partial_y,\nu(y))P^*(y,x,\omega,\sigma)\}^*U(y)]\,ds_y, \quad x\in D, \tag{25}$$

$$P(y,x,\omega,\sigma) = \partial/\partial\sigma\Pi(y,x,\omega,\sigma) = \|\partial/\partial\sigma\Pi_{kj}(y,x,\omega,\sigma)\|,$$

а $\Pi(y,x,\omega)$ – матрица, заданная равенствами (15), в которых $\Phi(y,x,\sigma,\Lambda) = (4\pi r)^{-1}\exp(i\Lambda r)$.

Эквивалентность формул продолжения (23) и (24) вытекает из соотношения

$$\lim_{\sigma\to\infty}\mathcal{U}_\sigma(x)=\int\limits_0^\infty \frac{d\mathcal{U}_\sigma(x)}{d\sigma}\,d\sigma+\mathcal{U}_0(x).$$

Заключение. Аналогичные результаты можно получить для областей типа конуса и для неограниченных областей типа слоя, а также для системы уравнений моментной теории упругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carleman T.* Les Functions Quasi Analitiques. Paris, 1926.
2. *Голузин Г.М., Крылов В.И.* Обобщенная формула Carleman'а и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40. № 2. С. 144–149.
3. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
4. *Мергелян С.Н.* Гармоническая аппроксимация и приближённое решение задачи Коши для уравнения Лапласа // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11. Вып. 5 (71). С. 337–340.
5. *Фок В.А., Куни Ф.М.* О введении "гасящей" функции в дисперсионные соотношения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 6. С. 1195–1198.
6. *Gonchar A.A.* On analytic continuation from the "edge of wedge" // Ann. Acad. Sci. Finnical. Ser. AI: Matem. 1985. V. 10. P. 221–225.
7. *Кытманов А.М.* Интеграл Мартинелли–Бохнера и его применения. Новосибирск, 1991.
8. *Ярмухамедов Ш.Я.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 281–283.
9. *Tarkhanov N.N.* The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations. Math. Top. V. 7. Berlin, 1995.
10. *Шлапунов А.А.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33. № 3. С. 205–215.
11. *Makhmudov O., Niyozov I.* Regularization of a solutions to the Cauchy problem for systems of elasticity theory. More progresses on analysis // Proc. of the Int. 5th ISAAK Congress / Eds. H.G.W. Begehr. Singapore, 2009.
12. *Makhmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N.* The Cauchy problem of couple-stress elasticity // Contemp. Math. 2008. V. 455. P. 297–310.
13. *Makhmudov O., Niyozov I.* The Cauchy problem for the Lame system in infinite domains in $\mathbb{R}^m$ // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2006. V. 14. № 9. P. 905–924.
14. *Makhmudov O., Niyozov I.* Regularization of a solution to the Cauchy problem for the system of thermoelasticity // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 285–289.
15. *Махмудов О.И., Ниёзов И.Э.* Об одной задаче Коши для системы уравнений теории упругости // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 674–678.
16. *Махмудов О.И., Ниезов И.Э.* Регуляризация решения задачи Коши для системы теории упругости // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39. № 2. С. 369–376.
17. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980.
18. *Айзенберг Л.А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск, 1990.
19. *Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейтвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М., 1976.
20. *Тарханов Н.Н.* Ряд Лорана для решений эллиптических систем. Новосибирск, 1991.
21. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М., 1974.
22. *Махмудов О.И., Ниёзов И.Э.* О задаче Коши для системы динамических уравнений теории упругости // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1164–1173.
23. *Махмудов К.О., Махмудов О.И., Тарханов Н.Н.* Нестандартная задача Коши для уравнения теплопроводности // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 2. С. 270–283.

Самаркандский государственный университет
им. Алишера Навои, Узбекистан

Поступила в редакцию 10.11.2020 г.
После доработки 20.03.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.