

УДК 517.956.2+517.958:539.3(5)

МОДЕЛИ УПРУГОГО СОЧЛЕНЕНИЯ ПЛАСТИНЫ СО СТЕРЖНЯМИ, ОСНОВАННЫЕ НА ТОЧЕЧНЫХ УСЛОВИЯХ СОБОЛЕВА И САМОСОПРЯЖЁННЫХ РАСШИРЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2021 г. С. А. Назаров

Двумерная и одномерные модели Кирхгофа тонких изотропных пластины и стержней соединены в единую задачу, описывающую деформацию сочленения этих упругих объектов. Условия сопряжения в точках присоединения стержней к пластине назначаются при помощи техники самосопряжённых расширений дифференциальных операторов, имеющих четвёртый порядок в двумерной области и второй порядок на одномерных отрезках. Приведены постановки задач, содержащих нелинейные условия сопряжения, в частности, односторонние связи.

DOI: 10.31857/S0374064121050113

1. Постановка задачи. Пусть Ω – область на плоскости \mathbb{R}^2 с гладкой (класса C^∞ для упрощения) границей $\Gamma = \partial\Omega$ и компактным замыканием $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Внутри Ω зафиксируем J различных точек P^1, \dots, P^J . Пусть ещё Υ^j – отрезок длиной $l_j > 0$, лежащий в пространстве \mathbb{R}^3 , имеющий с областью Ω общей только точку P^j (рис. 1, а) и параметризованный переменной $z_j \in (0, l_j)$ так, что этой точке отвечает координата $z_j = 0$, $j = \overline{1, J}$. Интерпретируя область Ω и отрезки $\Upsilon^1, \dots, \Upsilon^J$ как двумерную пластину и одномерные стержни соответственно, рассмотрим задачу Неймана (свободный край пластины) для бигармонического уравнения

$$D_0 \Delta_x^2 u_0(x) = f_0(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \{P^1, \dots, P^J\}, \quad (1)$$

$$N^q(x, \nabla_x) u_0(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad q = 2, 3, \quad (2)$$

и обыкновенные дифференциальные уравнения с условиями Дирихле (зафиксированы внешние концы стержней)

$$-D_j \partial_{z_j}^2 u_j(z_j) = f_j(z_j), \quad z_j \in (0, l_j), \quad (3)$$

$$u_j(l_j) = 0 \quad (j = \overline{1, J}), \quad (4)$$

где D_0, D_1, \dots, D_j – положительные множители.

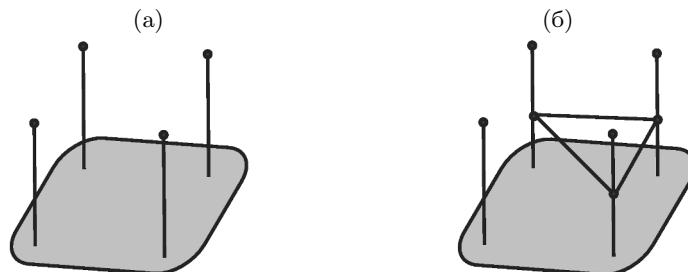


Рис. 1. Сочленение пластины со стержнями: простое (а) и с жёсткими стрингерами (б).

Поясним принятые обозначения: u_0 – прогиб пластины и u_j – продольные смещения в стержнях, а f_0 и f_j – поперечные и продольные силы соответственно. Дифференциальные операторы в краевых условиях (2) имеют вид (см. [1; 2, § 30] и др.)

$$N^2(x, \nabla_x) = \Delta_x - (1 - \nu)(\partial_s^2 + \varkappa(s)\partial_n),$$

$$N^3(x, \nabla_x) = \partial_n \Delta_x - (1 - \nu)(\partial_s \varkappa(s)\partial_s - \partial_n \partial_s^2), \tag{5}$$

где $\nabla_x = \text{grad}$, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ – оператор Лапласа и (n, s) – локальная система криволинейных координат в окрестности \mathcal{V} контура Γ , n – ориентированное расстояние до Γ , $n < 0$ в $\Omega \cap \mathcal{V}$, s – длина дуги на Γ , а $\varkappa(s)$ – кривизна контура в точке $s \in \Gamma$, положительная на выпуклых участках. Множители $D_0 > 0$ в (1) и $D_j > 0$ в (3) – цилиндрическая жёсткость пластины и приведённый модуль Юнга стержня, а $\nu \in [0, 1/2)$ – коэффициент Пуассона материала пластины, отсутствующий в уравнении Софи Жермон (1), но присутствующий в операторах (5) и функционале удвоенной упругой энергии $D_0 E_0(u^0, u^0; \Omega)$ пластины Ω :

$$E_0(u, v; \Omega) = D_0 \int_{\Omega} \left(\Delta_x u \Delta_x v + (1 - \nu) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right) dx. \tag{6}$$

Масштабированием сведём характерный размер упругого сочленения $\Xi = \Omega \cup \Upsilon^1 \cup \dots \cup \Upsilon^J$ к единице и тем самым сделаем координаторы и все геометрические параметры безразмерными. Множители D_0 и D_1, \dots, D_J зависят от поперечных размеров исходных трёхмерных пластины и стержней (прототипов их моделей Ω и $\Upsilon^1, \dots, \Upsilon^J$; см., например, [3, гл. 4, § 2; гл. 5, § 2]), однако в данной работе считаем их величинами одного порядка, т.е., в частности, предполагаем, что исходные жёсткостные характеристики изотропного материала пластины превосходят такие же характеристики у стержней. Сделаем обсуждаемые множители безразмерными, положив $D_0 = 1$.

Уравнение (1) поставлено в проколотой области $\Omega \setminus \{P^1, \dots, P^J\}$ – вне точек множества $\mathcal{P} = \{P^1, \dots, P^J\}$ – и ещё не назначены краевые условия для уравнений (3) в точках $z_j = 0$. Основная цель работы – при помощи техники самосопряжённых расширений дифференциальных операторов (см. публикации [4–13] и многие др.) осуществить корректную постановку задачи о деформации упругого сочленения областей с различными предельными размерностями, учитывающую разнообразные способы взаимодействия его элементов – пластины и стержней.

В п. 2 рассматривается простейший вариант: абсолютно жёсткие стержни фиксируют прогиб пластины Ω в точках P^1, \dots, P^J , т.е. задача (1), (2) снабжается точечными условиями Соболева

$$u_0(P^j) = 0, \quad j = \overline{1, J}, \tag{7}$$

корректность постановки которых обеспечена теоремой Соболева о вложении $H^2 \subset C$ на плоскости (см. монографии [14, 15] и др.). Подобные задачи широко используются, например, при моделировании вантовых и подвесных мостов (см. справочник [16] и, например, монографию [17]) при интерпретации поддерживающих тросов, стальных и обычно предварительно напряжённых, именно как абсолютно жёстких стержней. Вместе с тем в определённых ситуациях, особенно для пенькового или синтетического такелажа, приходится принимать во внимание деформацию тросов. С этой целью в п. 3 вводится положительный неограниченный симметрический замкнутый оператор A в гильбертовом пространстве

$$H = L^2(\Omega) \times L^2(\Upsilon^1) \times \dots \times L^2(\Upsilon^J), \tag{8}$$

где $L^2(\Sigma)$ – пространство Лебега с натуральным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\Sigma}$, и находится область определения самосопряжённого оператора A^* . В п. 4 описываются все возможные самосопряжённые расширения оператора A , при помощи которых можно смоделировать любые (жёсткие, упругие, шарнирные и прочие) способы прикрепления стержней к пластине, но в п. 5 выделяется то из расширений, которое отвечает рассматриваемой первичной модели

упругого сочленения Ξ при игнорировании продольной деформации пластины и изгиба вместе с закручиванием стержней. Наконец, в п. 6 обсуждаются задачи с односторонними связями: в определённых условиях пластина перестаёт контактировать с тем или иным стержнем (ср. статью [18] о мембране, натянутой на несколько стоек). При этом помимо корректных постановок дифференциальных и вариационных задач основная цель – сведение их к алгебраическим задачам на основе схемы, разработанной в п. 2 с использованием обобщённых функций Грина с особенностями в точках P^1, \dots, P^J . Полное изучение нелинейных задач планируется провести в более общей ситуации систем дифференциальных уравнений, учитывающих все возможные способы деформации элементов упругой конструкции.

2. Задача Соболева. В силу формулы Грина (см., например, монографию [2, § 30])

$$(\Delta_x^2 u, v)_\Omega = E(u, v; \Omega) - (N^2 u, \partial_n v)_\Gamma + (N^3 u, v)_\Gamma \quad (9)$$

вариационная постановка задачи (1), (2), (7) реализуется как интегральное тождество

$$E(u_0, v_0; \Omega) = (f_0, v_0)_\Omega \quad \text{для любой } v_0 \in H^2(\Omega; \mathcal{P}) \quad (10)$$

на подпространстве

$$H_0^2(\Omega; \mathcal{P}) = \{u_0 \in H^2(\Omega) : u_0(P^j) = 0, \quad j = \overline{1, J}\}. \quad (11)$$

Поскольку пространство Соболева $H^2(\Omega)$ вкладывается в пространство непрерывных функций $C(\Omega)$, подпространство (11) замкнуто.

В силу простого алгебраического неравенства

$$E(u_0, u_0; \Omega) \geq (1 - \nu) \|\nabla_x^2 u_0; L^2(\Omega)\|^2, \quad (12)$$

в котором $\nabla_x^2 u_0$ – вектор, составленный из производных функции u_0 порядка p , в частности, $\nabla_x^2 u_0 = (\partial^2 u_0 / \partial x_1^2, 2\partial^2 u_0 / \partial x_1 \partial x_2, \partial^2 u_0 / \partial x_2^2)$, билинейная форма (6) вырождается только на линейных функциях $\ell(x) = \ell_0 + \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2$ и, следовательно, обладает полиномиальным свойством [18], обеспечивающим полезные свойства операторам задачи (1), (2) (см. ниже). Далее придётся различать три геометрические ситуации:

1°. $J = 1$, т.е. отмечена только одна точка, для определённости, начало координат $P^1 = (0, 0)$, и

$$\mathcal{L} := \{\ell(x) = \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 : \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}\}; \quad (13)$$

2°. $J \geq 2$ и точки P^1, \dots, P^J лежат на одной прямой, для определённости, на оси ординат, и

$$\mathcal{L} := \{\ell(x) = \ell_1 x_1 : \ell_1 \in \mathbb{R}\}; \quad (14)$$

3°. $J \geq 3$ и в множестве \mathcal{P} есть три точки, являющиеся вершинами невырожденного треугольника, и поэтому $\mathcal{L} = \{0\}$.

В силу теоремы Рисса о представлении непрерывного функционала в гильбертовом пространстве справедливо следующее

Предложение 1. *Задача (10) с правой частью $f_0 \in L^2(\Omega)$ имеет решение $u_0 \in H_0^2(\Omega; \mathcal{P})$ в том и только в том случае, если*

$$(f_0, \ell)_\Omega = 0 \quad \text{для всех } \ell \in \mathcal{L}. \quad (15)$$

Само решение определено с точностью до слагаемого из подпространства \mathcal{L} , но, будучи подчинено условиям ортогональности

$$(u_0, \ell)_\Omega = 0 \quad \text{для всех } \ell \in \mathcal{L}, \quad (16)$$

становится единственным и удовлетворяет оценке $\|u_0; H^2(\Omega)\| \leq c \|f_0; L^2(\Omega)\|$, в которой постоянный множитель c не зависит от функции f_0 .

Замечание 1. Пусть $\mathcal{P} = \emptyset$, т.е. задача (1), (2) ставится в цельной, а не проколотой области Ω . Предложение 1 сохраняет силу, если в формулах (15) и (16) взять

$$\mathcal{L} = \{\ell(x) = \ell_0 + \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 : \ell_q \in \mathbb{R}, \quad q = 0, 1, 2\}. \tag{17}$$

В ситуации 3° задача (10) однозначно разрешима – в этом пункте работы для краткости имеем дело только с таким расположением точек. Включение $u_0 \in H^2(\Omega; \mathcal{P})$ не даёт полной информации о дифференциальных свойствах решения и её можно уточнить, а именно, справедливо представление

$$u_0(x) = \tilde{u}_0(x) + \sum_{j=1}^J \chi_j(x) a_j \Phi(x - P^j), \tag{18}$$

где $\tilde{u}_0 \in H^4(\Omega)$, $\tilde{u}_0(P^j) = 0$, $\chi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ – срезающая функция, равная единице в окрестности точки P^j , причём $\text{supp } \chi_j \cap \text{supp } \chi_k = \emptyset$ при $j \neq k$, а Φ – фундаментальное решение бигармонического оператора на плоскости,

$$\Phi(x) = \frac{1}{8\pi} |x|^2 \ln \frac{1}{|x|}, \tag{19}$$

для которого, согласно его назначению, верна формула

$$\int_{\{x:|x|=\rho\}} N^3(x, \nabla_x) \Phi(x) ds_x = 1. \tag{20}$$

Наконец, a_1, \dots, a_j – коэффициенты, определяемые при решении всей задачи (10) (или (1), (2), (7) в дифференциальной постановке), и верна оценка

$$\|u_0; H^4(\Omega)\| + \sum_{j=1}^J |a_j| \leq C \|f_0; L^2(\Omega)\|.$$

В рамках теории распределений (см., например, книги [19, 20]) уравнение (1) распространяем на всю область Ω следующим образом:

$$\Delta_x^2 u_0(x) = f_0(x) + \sum_{j=1}^J a_j \delta(x - P^j), \quad x \in \Omega.$$

Здесь δ – дельта-функция Дирака. Найдём представление этого решения, используя обобщённую функцию Грина задачи (1), (2), отыскиваемую как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta_x^2 G(x; y) &= \delta(x - y) - L(x; y), \quad x \in \Omega, \\ N^q(x, \nabla_x) G(x; y) &= 0, \quad x \in \Gamma, \quad q = 2, 3, \end{aligned} \tag{21}$$

и подчинённую трём условиям ортогональности (ср. предложение 1)

$$\int_{\Omega} \mathbf{x} G(x; y) dx = 0 \in \mathbb{R}^3. \tag{22}$$

При этом $\mathbf{x} = (1, x_2, x_3)^T$ (здесь и всюду в статье T – знак транспонирования), а линейная функция $x \mapsto L(x; y)$ с вектором коэффициентов $\mathbf{L}(y) \in \mathbb{R}^3$ выбрана так, что

$$\int_{\Omega} L(x; y) dx = \mathbf{y} := (1, y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^3. \tag{23}$$

Согласно замечанию 1 существование решений задачи (21), (22) обеспечено непрерывностью функционала

$$H^2(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_{\Omega} \delta(x-y)\varphi(x) dx = \varphi(y)$$

и выполнением условий разрешимости (23). Положим $G_j(x) = G(x; P^j)$, $\mathbf{L}^j = \mathbf{L}(P^j)$ и заметим, что

$$\mathbf{G}_{jk} := G_j(P^k) = \int_{\Omega} G_j(x) \Delta_x^2 G_k(x) dx = E(G_j, G_k; \Omega), \quad (24)$$

т.е. $J \times J$ -матрица \mathbf{G} с элементами (24) является матрицей Грама, симметричной и положительно определённой. Ещё одна 3×3 -матрица Грама

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{x}\mathbf{x}^T dx \quad (25)$$

содержится в вытекающем из (23) равенстве $\mathbf{M}\mathbf{L} = \mathbf{P}$, связывающем между собой $3 \times J$ -матрицы

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_0^1 & \dots & \mathbf{L}_0^J \\ \mathbf{L}_1^1 & \dots & \mathbf{L}_1^J \\ \mathbf{L}_2^1 & \dots & \mathbf{L}_2^J \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ P_1^1 & \dots & P_1^J \\ P_2^1 & \dots & P_2^J \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Решение $u_0 \in H_0^2(\Omega; \mathcal{P})$ задачи (10) ищем в виде

$$u_0(x) = u_{\bullet}(x) + \ell(x) + \sum_{j=1}^J a_j G_j(x). \quad (27)$$

Здесь ℓ – линейная функция с коэффициентами ℓ_q , столбцы $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_j)^T$ и $\mathbf{l} = (\ell_0, \ell_1, \ell_2)^T$ подлежат определению, а $u_{\bullet} \in H^4(\Omega)$ – решение задачи (1), (2) с правой частью $f_{\bullet}(x) = f_0(x) + \ell_{\bullet}(x)$ в цельной области Ω , причём в соответствии с замечанием 1 линейная функция ℓ_{\bullet} со столбцом коэффициентов

$$\mathbf{l}_{\bullet} = -\mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{x} f_0(x) dx \in \mathbb{R}^3 \quad (28)$$

обеспечивает существование решения u_{\bullet} , подчинённого условиям ортогональности (16), (17).

Функция (27) удовлетворяет уравнению (1) с правой частью f_0 при условии

$$\mathbf{L}\mathbf{a} = \mathbf{l}_{\bullet} \in \mathbb{R}^3 \quad (29)$$

(уничтожили линейные функции в правых частях бигармонических уравнений для G_j и u_{\bullet}). Условия Соболева (7) принимают вид системы алгебраических уравнений

$$\mathbf{u}_{\bullet} + \mathbf{P}^T \mathbf{l} + \mathbf{G}\mathbf{a} = 0 \in \mathbb{R}^J,$$

где $\mathbf{u}_{\bullet} = (u_{\bullet}(P^1), \dots, u_{\bullet}(P^J))^T$, а значит,

$$\mathbf{a} = -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{l} - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{u}_{\bullet} \in \mathbb{R}^J. \quad (30)$$

Поскольку $\mathbf{L} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}$, выводим из формул (29) и (30) ещё одну систему

$$\mathbf{P}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{l} = \mathbf{M}\mathbf{P}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{u}_{\bullet} - \mathbf{M}\mathbf{l}_{\bullet} \in \mathbb{R}^3. \quad (31)$$

Матрица из левой части последней системы симметрична и положительно определена. В самом деле, эти же свойства матрицы Грама \mathbf{G} гарантируют, что в случае $\mathbf{b}^T \mathbf{P}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{b} = 0$ для

некоторого столбца $b \in \mathbb{R}^3$ выполнены равенства $\mathbf{P}^T b = 0 \in \mathbb{R}^J$ и тогда $b = 0$, так как ранг второй матрицы (26) равен трём в силу принятого ограничения 3°.

Итак, находим столбец $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3$ из уравнений (31), а затем и столбец $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^J$ из уравнений (30). Следовательно, справедливо представление (27), а вместе с ним и разложение (18).

Замечание 2. Ограничение 3° назначено лишь для упрощения проверки нужных фактов. В ситуациях 1° или 2° коэффициенты ℓ_1, ℓ_2 или ℓ_1 линейной функции ℓ из (27) остаются произвольными, а компоненты $\ell_{\bullet 1}, \ell_{\bullet 2}$ или $\ell_{\bullet 1}$ столбца (28) обращаются в нуль благодаря соотношению (15) из предложения 1. Иными словами, системы (29) и (30) сужаются на соответствующее подпространство в \mathbb{R}^3 , на котором матрица $\mathbf{P}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{P}^T$ обратима.

3. Исходный симметрический оператор модели упругого сочленения и его сопряжённый. Пусть A_c – неограниченный оператор в гильбертовом пространстве (8) с дифференциальным выражением

$$(\Delta_x^2, -D_1 \partial_{z_1}^2, \dots, -D_J \partial_{z_J}^2) \tag{32}$$

и областью определения

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_c = \{U = (u_0, u_1, \dots, u_J) : u_0 \in C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}), N^q(x, \nabla_x)u_0(x), x \in \Gamma, q = 2, 3; \\ u_j \in C_c^\infty(0, l_j], u_j(l_j) = 0, j = \overline{1, J}\}. \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь $C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P})$ – пространство бесконечно дифференцируемых в проколоте замкании $\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}$ функций, обращающихся в нуль в какой-то окрестности множества \mathcal{P} , и столь же гладкие функции $u_j \in C_c^\infty(0, l_j]$ аннулируются около точки $z_j = 0$.

Оператор A_c симметрический и положительный, однако незамкнутый. Для описания его замыкания A и сопряжённого оператора A^* понадобятся пространства Кондратьева $V_\beta^l(\Omega; \mathcal{P})$ (см. первоисточник [21] и, например, монографию [22]), полученные пополнением линейного пространства $C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P})$ по весовой соболевской норме

$$\|u; V_\beta^s(\Omega; \mathcal{P})\| = \left(\sum_{p=0}^s \|\mathbf{r}^{\beta-s+p} \nabla_x^p u; L^2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2}, \tag{34}$$

где $s \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ – показатели гладкости и веса, а $\mathbf{r}(x)$ – расстояние от точки x до множества \mathcal{P} . Пространство $V_\beta^s(\Omega; \mathcal{P})$ состоит из тех функций $u \in H_{\text{loc}}^s(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P})$, для которых конечна норма (34). Поскольку $\mathbf{r}(x) > c_\Gamma > 0$ при $x \in \Gamma$, то в случае $s \geq 1$ пространство следов на Γ функций из $V_\beta^s(\Omega; \mathcal{P})$ есть не что иное как пространство Соболева–Слободецкого $H^{s-1/2}(\Gamma)$.

Понятно, что отображение

$$\mathcal{N}_\beta = \{\Delta_x^2, N^2, N^3\} : V_\beta^4(\Omega; \mathcal{P}) \rightarrow V_\beta^0(\Omega; \mathcal{P}) \times H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \tag{35}$$

непрерывно при любом весовом показателе. Более того, верна оценка (см. [21] и, например, [22, гл. 4, § 1])

$$\begin{aligned} \|u_0; V_\beta^4(\Omega; \mathcal{P})\| \leq c_\beta (\|\Delta_x^2 u_0; V_\beta^0(\Omega; \mathcal{P})\| + \\ + \|N^2 u_0; H^{3/2}(\Gamma)\| + \|N^3 u_0; H^{1/2}(\Gamma)\| + \|u_0; V_{\beta-4}^0(\Omega; \mathcal{P})\|). \end{aligned} \tag{36}$$

Принципиально присутствие в правой части неравенства (36) нормы функции u_0 в пространстве $V_{\beta-4}^0(\Omega; \mathcal{P})$, содержащем пространство $V_\beta^4(\Omega; \mathcal{P})$ из левой части: такая оценка окажется полезной, но она все-таки не даёт сколь-нибудь важной информации о самом отображении (35), так как вложение $V_\beta^4(\Omega; \mathcal{P}) \subset V_{\beta-4}^0(\Omega; \mathcal{P})$ является непрерывным, но не компактным. Согласно теории Кондратьева [21] (см. также [23; 22, гл. 6, § 6] и др.) для придания фредгольмова свойства оператору \mathcal{N}_β требуется, чтобы весовой показатель β не был “запретным” – такие запретные показатели образуют счётное множество \mathcal{B} на вещественной оси с двумя точками

сгущения $\pm\infty$. Благодаря полиномиальному свойству формы (6) (см. комментарий к формуле (12)) известно (см. [24, пример 1.14 и предложение 2.21]), что $\mathcal{B} = \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество целых чисел. К сожалению, $L^2(\Omega) = V_0^0(\Omega; \mathcal{P})$, а индекс $\beta = 0$ как раз запретный. Поэтому далее придётся также оперировать со ступенчатым весовым пространством $V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P})$ с нормой^{*)}

$$\|u; V_{\#}^{-4}(\Omega; \mathcal{P})\| = (\|\nabla_x^2 u; H^1(\Omega)\|^2 + \|u; V_{-1-\varepsilon}^2(\Omega; \mathcal{P})\|^2)^{1/2}, \tag{37}$$

где ε – любое число из интервала $(0, 1)$. Пространство $V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P})$ не зависит от выбора ε ни алгебраически, ни топологически (см. замечание 3). Отображение

$$\mathcal{N}_{\#} = \{D_0 \Delta_x^2, N^2, N^3\} : V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P}) \rightarrow V_0^0(\Omega; \mathcal{P}) \times H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$$

остаётся непрерывным, но дополнительно приобретает фредгольмово свойство, выражаемое оценкой

$$\|u_0; V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P})\| \leq c_{\Sigma} (\|\Delta_x^2 u_0; V_0^0(\Omega; \mathcal{P})\| + \|N^2 u_0; H^{3/2}(\Gamma)\| + \|N^3 u_0; H^{1/2}(\Gamma)\| + \|u_0; L^2(\Sigma)\|), \tag{38}$$

где Σ – компакт в $\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}$, а множитель c_{Σ} зависит от выбора подмножества Σ , но не от функции u_0 .

Предложение 2. *Замыкание A оператора A_c сохраняет дифференциальное выражение (32), но приобретает область определения*

$$\mathcal{D} = \{U \in V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P}) \times H^2(0, l_1) \times \dots \times H^2(0, l_J) :$$

$$N^q(x, \nabla_x)u_0(x), \quad x \in \Gamma, \quad q = 2, 3, \quad u_j(l_j) = 0, \quad u_j(0) = \partial_{z_j} u_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, J}\}.$$

Доказательство. Согласно определению оператор A будет замыканием оператора A_c , если из того, что $U^k \in \mathcal{D}_c$, $U^k \rightarrow U^\infty$, $F^k = A_c U^k \rightarrow F^\infty$ сильно в H вытекают соотношения $U^\infty \in \mathcal{D}$ и $AU^\infty = F^\infty$. Для первых компонент вектор-функций U^k , U^m из линейного множества (33) оценка (38) гарантирует, что

$$\begin{aligned} \|u_0^k - u_0^m; V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P})\| &\leq c_{\Sigma} (\|\Delta_x^2 (u_0^k - u_0^m); L^2(\Omega)\| + \|u_0^k - u_0^m; L^2(\Sigma)\|) \leq \\ &\leq c_0 (\|f_0^k - f_0^m; L^2(\Omega)\| + \|u_0^k - u_0^m; L^2(\Omega)\|). \end{aligned}$$

Следовательно, фундаментальность последовательностей $\{u_0^k\}$ и $\{f_0^k = \Delta_x^2 u_0^k\}$ в $L^2(\Omega)$ влечёт за собой фундаментальность первой из них в $V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P})$. Аналогичное свойство последовательностей $\{u_j^k\}$ и $\{f_j^k = -D_j \partial_{z_j}^2 u_j^k\}$ в $L^2(0, l_j)$, обеспеченное простым следствием интерполяционного неравенства

$$\|u_j; H^2(0, l_j)\| \leq c_j (\|\partial_{z_j}^2 u_j; L^2(0, l_j)\| + \|u_j; L^2(0, l_j)\|),$$

вместе с элементарным следовым неравенством [27, гл. 1]

$$|u_j(0)| + |\partial_{z_j} u_j(0)| + |u_j(l_j)| \leq c_j \|u_j; H^2(0, l_j)\|$$

заканчивает доказательство предложения.

^{*)} Следует упомянуть, что в последнем параграфе работы [21] приведены наброски возможной модификации кондратьевских весовых классов V_{β}^s при наличии у модельной задачи в конусе или проколотом пространстве полиномиальных решений, однако законченная теория краевых задач для эллиптических систем в ступенчатых весовых пространствах, инициированная вопросами механики трещин [25], представлена в статье [26] и книге [22, гл. 8, § 4]. Сам термин “ступенчатый” связан с тем, что график зависимости от порядка дифференцирования p в норме (34) – наклонная прямая, а в норме (37) график имеет уступ на уровне $p = 3$.

Замечание 3. Поскольку $V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P}) \subset H^4(\Omega)$ ввиду определений весовых норм (37), (34) и любой квадратичный полином $x \mapsto p(x)$ не попадает в пространство $V_{-1-\varepsilon}^2(\Omega; \mathcal{P})$ из-за расходимости интегралов в точках P^1, \dots, P^J , возможна подмена $V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P})$ подпространством пространства Соболева $H^4(\Omega)$, выделенном равенствами

$$u_0(P^j) = 0, \quad \nabla_x u_0(P^j) = 0 \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla_x^2 u_0(P^j) = 0 \in \mathbb{R}^3, \quad j = \overline{1, J}. \tag{39}$$

Обратная подмена обеспечена трёхкратным применением одномерного неравенства Харди

$$\int_0^d r^{-2\gamma-1} |\mathcal{U}(r)|^2 dr \leq \frac{1}{\gamma^2} \int_0^d r^{-2\gamma+1} \left| \frac{d\mathcal{U}}{dr}(r) \right|^2 dr \tag{40}$$

для любых $\mathcal{U} \in C^1[0, d]$, $\mathcal{U}(0) = 0$, $d > 0$, $\gamma > 0$. При этом функцию u_0 следует записать в полярной системе координат (r_j, φ_j) с центром в точке P^j и дополнительно проинтегрировать по угловой переменной $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ неравенство (40), в котором

$$\mathcal{U}(r_j, \varphi_j) = \chi_j(x) \nabla_x^q u_0(x), \tag{41}$$

$\gamma = \varepsilon - q + 5/2$, $q = 2, 1, 0$, а χ_j – срезки, введённые в представлении (18). Требование $\mathcal{U}(0) = 0$ в (40) для вектор-функций (41) обеспечено соотношениями (39).

В статье [6], относящейся к задаче Дирихле для бигармонического уравнения в случае $J = 1$, содержится именно описание области определения оператора задачи как пространства $H^4(\Omega)$ с условиями (39). В данной работе удобно применить теорию Кондратьева, обслуживающую эллиптические краевые задачи с асимптотическими условиями на подмногобразиях границы (см. [22, гл. 6, § 7 и гл. 12, §§ 1–3; 19, § 2, п. 7] и др. публикации), поскольку эта теория позволяет также исследовать полную модель тонкой упругой анизотропной и неоднородной пластины (ср. [3] и [11]) без особых изменений в схеме рассуждений, но с несоизмеримо более длинными выкладками.

Оператор A симметрический и замкнутый, но не самосопряжённый. Для описания сопряжённого для него оператора A^* понадобится следующий базис в шестимерном пространстве квадратичных полиномов:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, & p_1(x) &= x_1, & p_2(x) &= x_2, \\ p_3(x) &= 2^{-1/2} x_1^2, & p_4(x) &= x_1 x_2, & p_5(x) &= 2^{-1/2} x_2^2. \end{aligned} \tag{42}$$

Обозначив $\delta_{p,m}$ символ Кронекера, получаем равенства

$$p_k(\nabla_x) p_m(x)|_{x=0} = \delta_{m,p}, \quad m, p = \overline{0, 5}. \tag{43}$$

Предложение 3. *Сопряжённый для оператора A оператор A^* сохраняет дифференциальное выражение (32), но приобретает область определения*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^* &= \left\{ U : u_0(x) = \sum_{j=1}^J \chi_j(x) \sum_{k=0}^5 (b_{jk}^+ p_k(x - P^j) + b_{jk}^- p_k(-\nabla_x) \Phi(x - P^j)) + \tilde{u}_0(x), \right. \\ &\left. b_j^\pm = (b_{j0}^\pm, \dots, b_{j5}^\pm)^T \in \mathbb{R}^6, \quad \tilde{u}_0 \in V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P}), \quad u_j \in H^2(0, l_j), \quad u_j(l_j) = 0, \quad j = \overline{1, J} \right\}. \end{aligned} \tag{44}$$

Доказательство. Сопряжённый оператор находится по правилу: если $U, F \in H$ и $\langle U, AV \rangle = \langle F, V \rangle$ для всех $V \in \mathcal{D}$, то $U \in \mathcal{D}^*$ и $F = A^*U$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ – скалярное произведение в пространстве (8), т.е.

$$\langle U, V \rangle_H = (u_0, v_0)_\Omega + (u_1, v_1)_{\Upsilon_1} + \dots + (u_J, v_J)_{\Upsilon_J}.$$

Взяв в качестве компонент пробной вектор-функции $V = (v_0, v_1, \dots, v_J) \in \mathcal{D}$ в определении сопряжённого оператора функции $v_0 \in C_c^\infty(\bar{\Omega} \setminus \mathcal{P})$, $v_j \in C_c^\infty(0, l_j]$, получим интегральное тождество

$$(f_0, v_0)_\Omega - (u_0, \Delta_x^2 v_0)_\Omega + \sum_{j=1}^J ((f_j, v_j)_{\Upsilon_j} + (u_j, D_j \partial_{z_j}^2 v_j)_{\Upsilon_j}) = 0. \tag{45}$$

Пусть сначала $v_1 = 0, \dots, v_J = 0$. Тогда оставшееся в (45) интегральное тождество в области Ω позволяет заключить, что в силу общих результатов [28, гл. 2, §§ 5, 6] об улучшении дифференциальных свойств решений эллиптических краевых задач и дважды применённой формулы Грина (9) справедливо тождество

$$(f_0 - \Delta_x^2 u_0, v_0)_\Omega - (N^2 u_0, \partial_n v_0)_\Gamma + (N^3 u_0, v_0)_\Gamma = 0 \tag{46}$$

для всех таких функций $v_0 \in C_c^\infty(\bar{\Omega} \setminus \mathcal{P})$, что $N^q v_0 = 0$ на Γ , $q = 2, 3$. Благодаря произвольности функции v_0 в проколотой области $\Omega \setminus \mathcal{P}$ и следов $v_0, \partial_n v_0$ на $\Gamma = \partial\Omega$ выводим из тождества (46) соотношения (1) и (2). Кроме того, безусловная оценка (36) с $\beta = 4$, правая часть которой конечна, так как $V_4^0(\Omega; \mathcal{P}) \subset V_0^0(\Omega; \mathcal{P}) = L^2(\Omega)$, гарантирует, что $u_0 \in V_4^4(\Omega; \mathcal{P})$.

Теперь воспользуемся теоремой Кондратьева об асимптотике (см. [21, 23], а также [22, гл. 3, § 5 и гл. 4, § 2] и др.) и получим указанное формулой (44) представление функции u_0 . Поясним, что отделённые асимптотические члены представляют собой степенно-логарифмические решения

$$\psi(x) = r^\Lambda \Psi(\varphi; \ln r) \tag{47}$$

модельного уравнения на проколотой плоскости

$$\Delta_x^2 \psi(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \tag{48}$$

При этом $\Lambda \in \mathbb{C}$ и Ψ – полином переменной $\ln r$, коэффициенты которого – гладкие 2π -периодические функции угловой переменной φ , а в асимптотику включены те функции (47), которые принадлежат классу V_4^4 в окрестности начала координат, но не содержатся в классе $V_{\#}^4 \subset V_{-1-\varepsilon}^2$. Как показано в цитированной литературе (см., в частности, [19, пример 1.14 и предложение 2.21]) степенными решениями (47) уравнения (48) служат только полиномы и производные фундаментального решения (19). Упомянутые факты объясняют формулу для компоненты u_0 в определении (44).

Аналогичные рассуждения в значительно более простом исполнении показывают, что интегральное тождество (45) с пробной функцией V , имеющей только одну ненулевую компоненту v_j , приводит к формуле

$$(f_j + D_j \partial_{z_j}^2 u_j, v_j)_\Upsilon - u_j(l_j) D_j \partial_{z_j} v_j(l_j) = 0 \quad \text{для любой } v_j \in C_0^\infty(0, l_j], \quad v_j(l_j) = 0,$$

из которой следует, что

$$u_j \in H^2(0, l_j), \quad u_j(l_j) = 0, \quad -D_j \partial_{z_j}^2 u_j(z_j) = f_j(z_j), \quad z_j \in (0, l_j).$$

Это заканчивает проверку предложения 3.

4. Обобщённая формула Грина. Для вектор-функции $U \in \mathcal{D}^*$ введём проекции

$$\pi_0^\pm U := (b_1^\pm, \dots, b_j^\pm)^\top \in \mathbb{R}^{6 \times J}, \quad \pi_j^+ U := u_j(0), \quad \pi_j^- U := -D_j \partial_{z_j} u_j(0), \tag{49}$$

где b_j^\pm – векторы коэффициентов из представления функции u_0 в формуле (44), а также

$$\pi^\pm = \pi_0^\pm = (b_1^\pm, \dots, b_j^\pm)^\top, \quad \pi = (\pi^+, \pi^-)^\top. \tag{50}$$

Подчеркнём, что все векторы (49) и (50) реализованы как столбцы.

Отображения $\pi^\pm : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^{6J+6}$ непрерывны; здесь \mathcal{H} – гильбертово пространство вектор-функций $U \in \mathcal{D}^*$ с нормой

$$\|U; \mathcal{H}\| = \left(\|\tilde{u}_0; V_{\#}^4(\Omega; \mathcal{P})\|^2 + |\pi^+ u_0|^2 + |\pi^- u_0|^2 + \sum_{j=1}^J \|u_j; H^2(\Upsilon_j)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Лемма 1. Для вектор-функций $U, V \in H$ справедлива формула

$$Q(U, V) := (\Delta_x^2 u_0, v_0)_\Omega - (u_0, \Delta_x^2 v_0)_\Omega - \sum_{j=1}^J ((D_j \partial_{z_j}^2 u_j, v_j)_{\Upsilon_j} - (u_j, D_j \partial_{z_j}^2 v_j)_{\Upsilon_j}) = (\pi^- V)^T \pi^+ U - (\pi^+ V)^T \pi^- U. \tag{51}$$

Доказательство. Все скалярные произведения в пространствах Лебега определены корректно. Сразу же запишем простые формулы

$$-(D_j \partial_{z_j}^2 u_j, v_j)_{\Upsilon_j} + (u_j, D_j \partial_{z_j}^2 v_j)_{\Upsilon_j} = D_j(v_j(0) \partial_{z_j} u_j(0) - u_j(0) \partial_{z_j} v_j(0)). \tag{52}$$

Для вычисления интегралов по области Ω воспользуемся методом [29] (см. также [22, гл. 4, § 3]). Обозначив через $\mathbb{B}_\rho(P^j)$ круг с центром P^j и радиусом ρ , применим формулу Грина на множестве $\Omega_\rho = \Omega \setminus (\mathbb{B}_\rho(P^1) \cup \dots \cup \mathbb{B}_\rho(P^J))$ и выполним предельный переход $\rho \rightarrow +0$. Имеем

$$\begin{aligned} (\Delta_x^2 u_0, v_0)_\Omega - (u_0, \Delta_x^2 v_0)_\Omega &= \lim_{\rho \rightarrow +0} ((\Delta_x^2 u_0, v_0)_{\Omega_\rho} - (u_0, \Delta_x^2 v_0)_{\Omega_\rho}) = \\ &= \sum_{j=1}^J \lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\partial \mathbb{B}_\rho(P^j)} (v_0 N^3 u_0 - \partial_n v_0 N^2 u_0 + \partial_n u_0 N^2 v_0 - u_0 N^3 v_0) ds_x =: \sum_{j=1}^J I_j^\rho(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Учтём указанные в (44) разложения функций u_0 и v_0 с коэффициентами $b_{jk}^{\pm u}$ и $b_{jk}^{\pm v}$. Удалим из подынтегральных выражений в $I_j^\rho(u_0, v_0)$ величины $o(\rho^{-1})$ при $\rho \rightarrow +0$, исчезающие в пределе после интегрирования вдоль дуг длиной $2\pi\rho$. Обозначим $S_j^u(x - P^j)$, $S_j^v(x - P^j)$ и $T_j^u(x - P^j)$, $T_j^v(x - P^j)$ соответственно полиномы и линейные комбинации производных фундаментального решения, входящие в разложения рассматриваемых функций. В итоге получим равенство

$$I_j^\rho(u_0, v_0) = I_j^\rho(S_j^u + T_j^u, S_j^v + T_j^v) = (b_j^{-v})^T b_j^{+u} - (b_j^{-u})^T b_j^{+v}, \tag{53}$$

которое вместе с (52) и (49), (50) приводит к формуле (51). Само равенство (53) вытекает из базового соотношения (20) для фундаментального решения Φ или выводится при помощи следующих вычислений в рамках теории распределений (см. учебник [19]):

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\partial \mathbb{B}_\rho(P^j)} (S_j^v N^3 T_j^u - \partial_n S_j^v N^2 T_j^u + \partial_n T_j^u N^2 S_j^v - T_j^u N^3 S_j^v) ds_x &= \\ &= - \lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\mathbb{B}_\rho(P^j)} S_j^v(x - P^j) \Delta_x^2 T_j^u(x - P^j) dx = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\mathbb{B}_\rho(P^j)} b_{jk}^{+v} p_k(x - P^j) \Delta_x^2 (b_{jm}^{-u} p_m(-\nabla_x) \Phi(x - P^j)) dx = \\ &= - \sum_{k,m=0}^5 b_{jk}^{+v} b_{jm}^{-u} \int_{\mathbb{R}^2} p_k(x) p_m(-\nabla_x) \delta(x) dx = - \sum_{k,m=0} b_{jk}^{+v} b_{jk}^{-u} \delta_{k,m} = -(b_j^{-u})^T b_j^{+v}. \end{aligned}$$

Здесь приняты во внимание соотношения (43) и определение производной дельта-функции Дирака. Наконец, похожие выкладки показывают, что интегралы $I_j^p(S_j^u, S_j^v)$ и $I_j^p(T_j^u, T_j^v)$ обращаются в нуль. Лемма доказана.

Следуя [22, гл. 6, § 2 и гл. 12, § 2], называем соотношение (51) *обобщённой формулой Грина*.

Приступим к описанию самосопряжённых расширений оператора A . Если A_\bullet – такое расширение, полученное сужением сопряжённого оператора A^* на подпространство $\mathcal{D}_\bullet \subset \mathcal{D}^*$ коразмерностью $6J + J = 7J$ (согласно проведённым в п. 3 вычислениям индекс дефекта оператора A равен $(7J : 7J)$; ср. замечание 4), то

$$Q(U, V) = \langle A_\bullet U, V \rangle_H - \langle U, A_\bullet V \rangle_H = 0 \quad \text{для любых } U, V \in \mathcal{D}_\bullet.$$

Таким образом, требуется выяснить условия вырождения симплектической (билинейной и антисимметричной) формы из правой части формулы (51). Этот вопрос решён в работе [30] (см. также публикации [9–11, 13] и иные подходы в статьях [4–7] и [8, 12]).

Теорема 1. 1) Пусть $\mathcal{R}^- \oplus \mathcal{R}^0 \oplus \mathcal{R}^+$ – ортогональное разложение евклидова пространства \mathbb{R}^{6J+J} , а $A : \mathcal{R}^0 \rightarrow \mathcal{R}^0$ – симметричный изоморфизм. Сужение оператора A^* на подпространство

$$\mathcal{D}_\bullet = \{U \in \mathcal{D}^* : \pi^+ U = a^+ + a^0, \quad \pi^- U = a^- + Aa^0, \quad a^\alpha \in \mathcal{R}^\tau, \quad \tau = 0, \pm\} \quad (54)$$

оказывается самосопряжённым расширением оператора A .

2) Всякое самосопряжённое расширение допускает указанное описание.

Доказательство. Проверка первого утверждения проста:

$$\begin{aligned} (\pi^+ U, \pi^- V) - (\pi^- U, \pi^+ V) &= (a_U^+ + a_U^0, a_V^- + Aa_V^0) - \\ &- (a_U^- + Aa_U^0, a_V^+ + a_V^0) = (a_U^0, Aa_V^0) - (Aa_U^0, a_V^0) = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Здесь (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в \mathbb{R}^{7J} , a_U^α и a_V^α – столбцы, предписанные вектор-функциям $U, V \in \mathcal{D}_\bullet$ формулой (54), а в выкладке (55) использованы назначенные ортогональности столбцов и симметричность оператора A .

Второе утверждение требует чуть более долгих рассуждений – см. первоисточник [30], а также, например, статью [10, § 6] и монографию [23, гл. 6, § 3].

Замечание 4. Коразмерность подпространства $\mathcal{D}_\bullet \subset \mathcal{D}^*$ в самом деле равна $7J$, так как в определении (54) наложены именно $7J$ линейных связей. Отсюда вытекает и упомянутая формула для индекса дефекта оператора A .

Замечание 5. Если точка P^j попала на границу Γ , то предложение 3 в целом сохраняет силу, однако размерность подпространства полиномов, входящих в формулу (44) и далее, уменьшается на единицу, так как линейные комбинации полиномов (42) должны удовлетворять в точке $P^j \in \Gamma$ краевым условиям (2) с главными частями $N_0^q(P^j, \nabla)$ дифференциальных операторов (5), причём заведомо $N_0^3(P^j, \nabla)p_k(x) = 0$, $k = \overline{0, 5}$, т.е. приходится наложить только одно дополнительное ограничение. Разумеется, сингулярные составляющие $p_k(-\nabla)\Phi(x - P^j)$ также подлежат изменению.

5. Выбор параметров самосопряжённого расширения. Механическая интерпретация рассматриваемой задачи требует специфического подбора параметров самосопряжённого расширения A_\bullet . В согласии со списком полиномов (42) коэффициенты b_{j0}^+ и b_{j1}^+ , b_{j2}^+ суть прогиб и углы поворотов вокруг осей $x_2 - P_2^j$, $x_1 - P_1^j$ пластины в точке $P^j \in \Omega$. Соответственно b_{j0}^- и b_{j1}^- , b_{j2}^- – сосредоточенные поперечная сила и изгибающие моменты вокруг названных осей. Остальные элементы столбцов b_j^\pm не имеют очевидного физического смысла, а сингулярности $b_{jk}^- p_k(-\nabla_x)\Phi(x - P^j)$ с индексами $k \geq 3$ выводят функцию u_0 даже из класса $H^1(\Omega)$. Поэтому положим

$$b_{jk}^- = 0, \quad k = 3, 4, 5, \quad j = \overline{1, J}, \quad (56)$$

но оставим произвольными коэффициенты b_{jk}^+ с такими же индексами.

В выстраиваемой простейшей модели упругого сочленения Ξ следует пренебречь и сосредоточенными моментами: для их привлечения требуются полные модели пластины и стержней, а именно, 3×3 - и 4×4 -системы дифференциальных уравнений в Ω и на $\Upsilon^1, \dots, \Upsilon^J$ (см., например, монографию [22] и ср. конец замечания 3). Таким образом, введём ограничения

$$b_{j1}^- = 0, \quad b_{j2}^- = 0, \quad j = \overline{1, J}. \tag{57}$$

Равенства (56), (57) и формула (19) для Φ , в частности, означают, что $b_{j0}^+ = u_0(P^j)$.

Поскольку стержни прикреплены к пластине, логично наложить условия

$$u_0(P^j) = b_{j0}^+ = u_j(0), \quad j = \overline{1, J}. \tag{58}$$

При учёте требований (56)–(58) выберем следующие подпространства в ортогональном разложении из теоремы 1:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^0 &= \{0\}, \quad \mathcal{R}^+ = \{c = (c_1, \dots, c_{7J})^T \in \mathbb{R}^{6J+J} : c_{6(j-1)+1} = c_{6J+p+1}, \quad j = \overline{1, J}\}, \\ \mathcal{R}^- &= \mathbb{R}^{6J+J} \ominus \mathcal{R}^+ = \{c \in \mathbb{R}^{6J+J} : c_{6(j-1)+1} + c_{6J+j+1} = 0, \\ &\quad c_{6(j-1)+p} = 0, \quad p = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, J}\}. \end{aligned} \tag{59}$$

Согласно определениям (49) и (50) включение $\pi^+U \in \mathcal{R}^+$ гарантирует выполнение равенств (58), а включение $\pi^-U \in \mathcal{R}^-$ – равенств (56), (57), а также соотношения

$$b_{j0}^- = -\pi_j^-U = D_j \partial_{z_j} u_j(0), \quad j = \overline{1, J},$$

означающего обращение в нуль суммы сил, приложенных к точкам P^j присоединения одномерных стержней Υ^j к двумерной пластине Ω .

Лемма 2. Для вектор-функций U, V из пространства (54), построенного по ортогональному разложению (59) пространства \mathbb{R}^{6J+J} , справедлива формула

$$\langle A \bullet U, V \rangle_H = E(u_0, v_0; \Omega) + \sum_{j=1}^J D_j (\partial_{z_j} u_j, \partial_{z_j} v_j) \Upsilon_j. \tag{60}$$

Доказательство. Поскольку условия (56) и (57) оставляют отделёнными в представлении компонент u_0 и v_0 только полиномы и само фундаментальное решение, справедливы включения $u_0, v_0 \in H^2(\Omega)$. Таким образом, верны формулы (вторые очевидны)

$$(\Delta_x^2 u_0, v_0)_\Omega = E(u_0, v_0; \Omega) + \sum_{j=1}^J b_{j0}^{-u} v_0(P^j), \tag{61}$$

$$(-D_j \partial_{z_j}^2 u_j, v_j) \Upsilon_j = D_j (\partial_{z_j} u_j, \partial_{z_j} v_j) \Upsilon_j + D_j \partial_{z_j} u_j(0), \quad j = \overline{1, J}.$$

Почленно сложим указанные равенства и при учёте условий сопряжения, назначенных согласно определениям (54) и (59), получим соотношение (60). Лемма доказана.

Теорема 2. Самосопряжённое расширение $A \bullet$ оператора A с областью определения (54), найденной по ортогональному разложению (59) пространства \mathbb{R}^{6J+J} , является положительно определённым оператором лишь в случае 3° из п. 2.

Доказательство. Применим формулу (60) с $V = U$. В силу условий Дирихле (4) имеем

$$|u_j(0)|^2 + \|u_j; L^2(0, l_j)\|^2 \leq c_j \|\partial_{z_j} u_j; L^2(0, l_j)\|^2. \tag{62}$$

Для функции u_0 напомним представление

$$u_0(x) = u_\perp(x) + \ell_0 + \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2, \tag{63}$$

а коэффициенты ℓ_q линейной функции ℓ из (63) выберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\int_{\Omega} u_{\perp}(x) dx = 0, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u_{\perp}}{\partial x_j}(x) dx = 0, \quad j = 1, 2. \tag{64}$$

Вследствие формул (6) и (12) неравенства Пуанкаре, опирающиеся на условия ортогональности (64), показывают, что справедливы оценки

$$E(u_0, u_0; \Omega) = E(u_{\perp}, u_{\perp}; \Omega) \geq c_1 \|\nabla_x u_{\perp}; L^2(\Omega)\|^2 \geq c_0 \|u_{\perp}; L^2(\Omega)\|^2, \quad c_0 > 0.$$

Следовательно,

$$|u_{\perp}(P^j)|^2 \leq C \|u_{\perp}; H^2(\Omega)\|^2 \leq CE(u_0, u_0; \Omega). \tag{65}$$

Кроме того, в силу соотношений (63) и (58) получаем, что

$$\begin{aligned} |\ell(P^j)| &= |u_0(P^j) - u_{\perp}(P^j)| \leq |u_j(0)| + |u_{\perp}(P^j)| \leq \\ &\leq C(\|\partial_{z_j} u_j; L^2(\Upsilon^j)\| + \|u_{\perp}; H^2(\Omega)\|), \quad j = \overline{1, J}. \end{aligned} \tag{66}$$

Как указано в комментариях к формуле (31), в случае 3° оценки (66) гарантируют такое неравенство для линейной функции:

$$\|\ell; L^2(\Omega)\|^2 \leq c(|\ell_0|^2 + |\ell_1|^2 + |\ell_2|^2) \leq c \left(E(u_0, u_0; \Omega) + \sum_{j=1}^J \|\partial_{z_j} u_j; L^2(\Upsilon^j)\|^2 \right).$$

Оно вместе с формулами (62) и (65) приводит к нужному неравенству

$$\|U; H^2\|^2 \leq c \langle A_{\bullet} U, U \rangle_H$$

(см. определение (8)).

В ситуациях 1° или 2° подстановка в соотношение (60) пробной вектор-функции $U = (\ell, 0, \dots, 0)$, где ℓ – какой-то элемент линейного множества (13) или (14), показывает, что форма $\langle A_{\bullet} U, U \rangle_H$ вырождается. Теорема доказана.

Введённые точечные условия (58), (59) и (56), (57) локальные: стержни взаимодействуют только через упругую пластину. Между тем можно соорудить механизм из стрингеров (абсолютно жёстких тонких стержней), выравнивающий прогибы пластины в точках P^1, \dots, P^K (перенумеровали при необходимости). В такой конструкции (см. рис. 1, б) связи (58) дополняются равенствами

$$b_{10}^+ = \dots = b_{K0}^+, \tag{67}$$

и соответственно подпространства в разложении из теоремы 1 выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^+ &= \{c \in \mathbb{R}^{6J+J} : c_1 = c_{6k+1}, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad c_{6(j-1)+1} = c_{6J+j}, \quad j = \overline{1, J}\}, \\ \mathcal{P}^0 &= \{0\}, \quad \mathcal{P}^- = \mathbb{R}^{6J+J} \ominus \mathcal{P}^+. \end{aligned} \tag{68}$$

Включение $\pi^- U \in \mathcal{P}^-$ обеспечивает выполнение равенств

$$\sum_{k=1}^K (b_{k0}^- - D_k \partial_{z_k} u_k(0)) = 0, \quad b_{j0}^- = D_j \partial_{z_j} u_j(0), \quad j = \overline{K+1, J}.$$

В случае $K = J$ соотношения (58), (67) и (68) представляют собой не что иное, как классические условия сопряжения Кирхгофа. При любом $K \in [1, J]$ ортогональное разложение (68) пространства \mathbb{R}^{6J+J} порождает самосопряжённое расширение оператора A с областью определения (54) и энергетической билинейной формой (60).

6. Нелинейные задачи. В этом пункте полное исследование сформулированных задач проводить не будем, а ограничимся только рассмотрением деформации пластины под действием силы тяжести ($f_0(x) = -f_{\text{grav}}$ с положительной постоянной f_{grav}), причём стержни считаем невесомыми ($f_j = 0$).

Пусть пластина Ω опирается на абсолютно жёсткие стержни (рис. 2, а). Отрицательные величины прогиба пластины в точках P^1, \dots, P^J невозможны, и поэтому задача о минимуме функционала полной (упругой плюс потенциальной) энергии пластины

$$J_{\Delta}(u_0) = \frac{1}{2}E(u_0, u_0; \Omega) - (f_0, u_0)_{\Omega} \tag{69}$$

ставится на выпуклом замкнутом конусе

$$H_{\Delta}^2(\Omega; \mathcal{P}) = \{u_0 \in H^2(\Omega) : u_0(P^j) \geq 0, \quad j = \overline{1, J}\} \tag{70}$$

и оказывается эквивалентной вариационному неравенству [31]

$$E(u_0, v_0 - u_0; \Omega) - (f_0, v_0 - u_0)_{\Omega} \geq 0 \quad \text{для любой } v_0 \in H_{\Delta}^2(\Omega; \mathcal{P}). \tag{71}$$

Обобщённая формула Грина (61) показывает, что при $j = \overline{1, J}$ верны импликации

$$u_0(P^j) > 0 \Rightarrow b_{j0}^- = 0 \quad \text{и} \quad u_0(P^j) = 0 \Rightarrow b_{j0}^- > 0, \tag{72}$$

представляющие собой математически строгое истолкование механических ограничений.

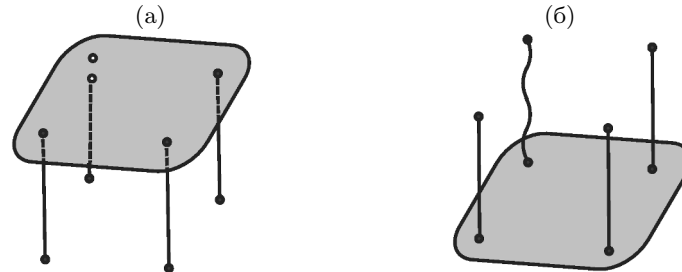


Рис. 2. Пластины: опёртая (а) и подвешенная (б). Присоединённые концы стержней помечены значком \bullet , а отсоединённые – значком \circ . Ослабленный канат – волнистая линия.

Сформулируем ещё одну задачу, сводящуюся к бигармоническому уравнению с нелинейным возмущением, а именно, задачу о деформации плиты Ω , подвешенной на невесомых эластичных канатах, которые воздействуют на плиту только в случае растяжения, т.е. при $u_0(P^j) < 0$, но в случае $u_0(P^j) \geq 0$ канат “провисает” (ср. рис. 2, б), и поэтому сосредоточенная в точке P^j сила равна нулю ($b_j^- = 0$). Однородная ($f_j = 0$) задача (3), (4) с краевым условием $u_j(0) = [u_0(P^j)]_-$ решается явно: из того, что $u_j(z_j) = [u_0(P^j)]_- l_j^{-1}(l_j - z_j)$ следует равенство $b_j^- = -\pi_-^j u_j = D_j l_j^{-1} [u_0(P^j)]_-$. Здесь $[t]_- = (t - |t|)/2$ – отрицательная часть числа $t \in \mathbb{R}$. Итак, заменив воздействия стержней сосредоточенными силами с интенсивностью b_j^- , приходим к уравнению

$$\Delta_x^2 u_0(x) - \sum_{j=1}^J D_j l_j^{-1} [u_0(P^j)]_- \delta(x - P^j) = f_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{73}$$

снабжённое краевыми условиями (3). В силу обобщённой формулы Грина (ср. леммы 1 и 2) вариационная формулировка задачи (73), (3) принимает вид

$$E(u_0, v_0; \Omega) - \sum_{j=1}^J D_j l_j^{-1} [u_0(P^j)]_- [v_0(P^j)] = (f_0, v_0)_{\Omega} \quad \text{для любой } v_0 \in H^2(\Omega). \tag{74}$$

Замечание 6. Если часть $\Sigma \neq \emptyset$ кромки Γ пластины Ω жёстко закреплена, т.е. условия Неймана (2) заменены смешанными краевыми условиями

$$N^q(x, \nabla_x)u_0(x) = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \overline{\Sigma}, \quad q = 2, 3, \quad \text{и} \quad u_0(x) = \partial_n u_0(x), \quad x \in \Sigma, \quad (75)$$

то ввиду неравенства

$$\|u_0; H^2(\Omega)\|^2 \leq cE(u_0, u_0; \Omega), \quad (76)$$

обеспеченного условиями Дирихле на Σ , однозначная разрешимость обеих задач (71) и (74), (75) вытекает из базовых результатов выпуклого анализа (см., например, теоремы 2.1 и 2.2 из [32, гл. 1]). Упомянем работу [18], в которой проводился аналогичный анализ задачи о мембране с препятствиями на исчезающе малых множествах.

В случае полностью свободной кромки Γ и условий Неймана на ней неравенство (76) нарушено для линейных функций, и для проверки разрешимости задач требуются несколько дополнительных требований. Пусть, во-первых, выполнено ограничение 3° из п. 2 и, во-вторых, центр тяжести плиты находится во внутренности $\text{int } \mathcal{P}_{\text{span}}$ выпуклой оболочки $\mathcal{P}_{\text{span}}$ множества $\mathcal{P} = \{P^1, \dots, P^J\}$ точек крепления. Совместим начало координат \mathcal{O} с этим центром, обеспечив тем самым равенства

$$\int_{\Omega} x_j dx = 0, \quad j = 1, 2. \quad (77)$$

Воспользуемся обозначениями из п. 2 и будем искать решение задачи (71) в виде

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^J a_j G_j(x) + \ell(x). \quad (78)$$

Столбец \mathbf{l} коэффициентов линейной функции ℓ и столбец \mathbf{a} множителей при функциях Грина (см. формулы (21)–(24)) являются неизвестными. При этом согласно определениям (49) столбцы $\pi_0^- u_0 = \mathbf{a}$ и $\pi_0^+ u_0 = \mathbf{u}_0 = (u_0(P^1), \dots, u_0(P^J))^T$ имеют вид

$$\pi_0^- u_0 = \mathbf{a} \geq 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{G}\mathbf{a} + \mathbf{P}^T \mathbf{l} \geq 0. \quad (79)$$

При этом формула $\mathbf{a} \geq 0$ означает, что $a_j \geq 0$, $j = \overline{1, J}$. Таким образом, импликации (72) превращаются в следующие:

$$(\mathbf{G}\mathbf{a} + \mathbf{P}^T \mathbf{l})_j > 0 \Rightarrow a_j = 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{G}\mathbf{a} + \mathbf{P}^T \mathbf{l})_j = 0 \Rightarrow a_j \geq 0. \quad (80)$$

В силу равенств (77) матрица Грама (25) является блочно-диагональной, т.е. $M_{00} = |\Omega|$ и $M_{01} = M_{02} = 0$. Поэтому для соблюдения уравнения (1) в проколотой области $\Omega \setminus \mathcal{P}$ требуется, чтобы выполнялось равенство $\mathbf{L}\mathbf{a} = f_0 \mathbf{e}_{(0)} \in \mathbb{R}^3$, которое, очевидно, равносильно равенству

$$\mathbf{P}\mathbf{a} = \mathbf{f} := |\Omega| f_0 \mathbf{e}_{(0)}, \quad (81)$$

здесь и выше \mathbf{P} и \mathbf{L} – $3 \times J$ -матрицы (26) и $\mathbf{e}_{(0)} = (1, 0, 0)^T$. Зафиксируем какой-то столбец \mathbf{a}^f , удовлетворяющий соотношениям (81), и назначим $\mathbf{a}^0 = \mathbf{a} - \mathbf{a}^f$ новой неизвестной.

По стандартной схеме (см., например, монографии [31, 32]) соотношения (80) и (81) порождают вариационное неравенство

$$(\mathbf{G}\mathbf{a}^0 + \mathbf{F})(\mathbf{b}^0 - \mathbf{a}^0) \geq 0 \quad \text{для любого} \quad \mathbf{b}^0 \in \mathbf{K}, \quad (82)$$

включающее слагаемое $\mathbf{F} = \mathbf{G}\mathbf{a}^f$ и поставленное на выпуклом замкнутом конусе

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{b}^0 \in \mathbb{R}^J : b_j^0 \geq -a_j^f, \quad j = \overline{1, J}, \quad \mathbf{P}\mathbf{b}^0 = 0 \in \mathbb{R}^J\}. \quad (83)$$

Благодаря последнему условию в (83) слагаемое $\mathbf{P}^T \mathbf{1}$, входящее в (80), исчезло из (83). Требование $\mathcal{O} \in \text{int } \mathcal{P}_{\text{span}}$ означает, что множество (83) не пусто. Наконец, задача (80) сводится к задаче о минимизации функционала

$$\mathbf{K} \ni \mathbf{a}^0 \mapsto \mathbf{J}(\mathbf{a}^0) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}^0)^T \mathbf{G} \mathbf{a}^0 + (\mathbf{a}^0)^T \mathbf{F}. \tag{84}$$

Поскольку \mathbf{G} – симметричная положительно определённая $J \times J$ -матрица, задача о минимизации функционала (84) и задача (82) могут быть решены при помощи базовых результатов выпуклого анализа (см., например, теоремы 2.1 и 2.2 из монографии [32, гл. 1]).

Теорема 3. При указанных ограничениях задача (71) имеет единственное решение $u_0 \in H^2_{\Delta}(\Omega)$. Оно представимо в виде линейной комбинации (78), в которой столбец коэффициентов \mathbf{a}^0 находится как решение вариационного неравенства (82), а коэффициенты \mathbf{l} линейной функции ℓ восстанавливаются при помощи формулы (80), так как ранг матрицы \mathbf{P} равен трём.

Обратимся к задаче (74), решение которой по-прежнему ищем в виде (78). Формулы (79) и (81) сохраняют силу, а множители при функциях Грина в линейной комбинации (78) и множители при дельта-функциях в уравнении (74) связаны соотношением

$$\mathbf{D}^{-1} \mathbf{a} = -[\mathbf{G} \mathbf{a} + \mathbf{P}^T \mathbf{1}]_-, \tag{85}$$

где \mathbf{D} – диагональная матрица $\text{diag} \{l_1^{-1} D_1, \dots, l_J^{-1} D_J\}$. Очевидно, что компоненты a_j решения \mathbf{a} системы (85), (81) неотрицательные. Следовательно, накладывая ограничение $\mathbf{a} \geq 0$, приходим к равенству $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{a} + \mathbf{P}^T \mathbf{1} = -\mathbf{G} \mathbf{a}$, из которого следует, что $\mathbf{G} \mathbf{a} + \mathbf{P}^T \mathbf{1} \leq 0$. В итоге, используя частное решение \mathbf{a}^f уравнения (81) и переходя к новой неизвестной $\mathbf{a}^0 = \mathbf{a} - \mathbf{a}^f$, получаем уравнение

$$(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{G}) \mathbf{a}^0 + \mathbf{P} \mathbf{1} = \mathbf{F} := -\mathbf{G} \mathbf{a}^f - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{a}^f \quad \text{на } \mathbf{K},$$

которое эквивалентно задаче о минимизации на конусе (83) функционала (84) с симметричной положительно определённой матрицей $\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{G}$ на месте матрицы \mathbf{G} . Итак, по тем же причинам, что и выше, справедлива

Теорема 4. При перечисленных геометрических ограничениях задача (74), (2) имеет единственное решение $u_0 \in H^2(\Omega)$, которое находится в виде (78) как решение алгебраических задач по указанной схеме.

Приведём пояснения к введённым ограничениям. Допустим, что включение $\mathcal{O} \in \mathcal{P}_{\text{span}}$ не выполнено и точки P^1, \dots, P^J лежат в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{x : x_1 > 0\}$. Тогда конус (70) содержит линейную функцию $\ell_K(x) = K(x_1 - L)$ при $2L = \min\{P^1_1, \dots, P^J_1\} > 0$ и любом $K > 0$. При этом в силу формул (78) и (6) функционал (69) удовлетворяет соотношению

$$J_{\Delta}(\ell) = 0 - (f_0, \ell)_{\Omega} = -f_{\text{grav}} |\Omega| K L \rightarrow -\infty \quad \text{при } K \rightarrow +\infty,$$

т.е. задача (71) неразрешима. На практике этот факт очевиден: пластина сваливается с опор, если центр тяжести лежит вне множества $\mathcal{P}_{\text{span}}$. Если $\mathcal{O} \in \partial \mathcal{P}_{\text{span}}$ или нарушено требование 3° , а значит, $\text{int } \mathcal{P}_{\text{span}} = \emptyset$, то положение пластины Ω на опорах неустойчивое, а применение приближённой двумерной модели неправомерно – необходим учёт малых сечений стержней и, весьма возможно, сил трения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00325).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бирман М.Ш. О вариационном методе Трэффца для уравнения $\Delta^2 u = f$ // Докл. АН СССР. 1955. Т. 101. № 2. С. 201–204.
2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970.
3. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск, 2002.

4. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 5. С. 1011–1014.
5. Демков Ю.Н., Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л., 1975.
6. Капешина Ю.Е., Павлов Б.С. Взаимодействия нулевого радиуса для бигармонического и полигармонического уравнений // Мат. заметки. 1986. Т. 40. № 1. С. 49–59.
7. Павлов Б.С. Теория расширений и явно решаемые модели // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42. № 6. С. 99–131.
8. Exner P., Šeba P. Applications of self-adjoint extensions in quantum physics // Lect. Not. in Phys. V. 324. Heidelberg, 1989.
9. Назаров С.А. Самосопряженные расширения оператора задачи Дирихле в весовых функциональных пространствах // Мат. сб. 1988. Т. 137. № 2. С. 224–241.
10. Назаров С.А. Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений // Тр. Санкт-Петербургского мат. о-ва. 1996. Т. 5. С. 112–183.
11. Назаров С.А. Эллиптические задачи на гибридных областях // Функц. анализ и его приложения. 2004. Т. 38. № 4. С. 55–72.
12. Brüning J., Geysler V., Pankrashkin K. Spectra of self-adjoint extensions and applications to solvable Schrödinger operators // Rev. in Math. Phys. 2008. V. 20. P. 1–70.
13. Назаров С.А. Моделирование сингулярно возмущённой спектральной задачи при помощи самосопряженных расширений операторов предельных задач // Функц. анализ и его приложения. 2015. Т. 49. № 1. С. 31–48.
14. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
15. Adams R. Sobolev Spaces. New York, 1976.
16. Петропавловский А.А. Вантовые мосты. М., 1985.
17. Gazzola A. Mathematical Models for Suspension Bridges. Nonlinear Structural Instability. Modeling, Simulation and Applications. V. 15. Berlin, 2015.
18. Назаров С.А. Асимптотическое решение задачи с малыми препятствиями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 6. С. 1031–1041.
19. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.
20. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.
21. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московского мат. об-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
22. Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin, New York, 1994.
23. Pazy A. Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. V. 24. P. 193–218.
24. Назаров С.А. Полиномиальное свойство самосопряжённых эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
25. Арутюнян Н.Х., Назаров С.А., Шойхет Б.А. Оценки и асимптотика напряженно-деформированного состояния трехмерного тела с трещиной в теории упругости и теории ползучести // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1365–1369.
26. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в области с кусочно гладкой границей // Тр. Ленинградского мат. об-ва. 1990. Т. 1. С. 174–211.
27. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.
28. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
29. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
30. Рофе-Бекетов Ф.С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. С. 1034–1037.
31. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М., 1980.
32. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств М., 1979.

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 09.12.2020 г.
После доработки 09.12.2020 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.