УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956+530.182

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С НЕИЗВЕСТНЫМ ИСТОЧНИКОМ

© 2021 г. **А. В. Баев**

Рассматриваются обратные задачи определения начальных условий и стационарной неоднородности в краевых задачах для уравнения Бюргерса. Использовано преобразование, позволяющее свести уравнение Бюргерса к уравнению с переменным коэффициентом относительно функции, доступной измерению в томографических наблюдениях. Доказаны теоремы единственности о восстановлении начальных условий по средним значениям решения по временнóй или пространственной переменным. Поставлены обратные задачи одновременного определения начальных данных и источника на отрезке и полупрямой. На основании спектральных представлений доказана единственность их решения.

DOI: 10.31857/S0374064121060017

Введение. Рассмотрим процесс переноса, описываемый неоднородным уравнением Бюргерса

$$u_t + 2uu_x = \nu u_{xx} + f(x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $\nu > 0$ и l – постоянные, $f \in C[0, l]$. Существуют различные физические интерпретации функции $u(x, t)$. Мы будем придерживаться её интерпретации как плотности частиц, непрерывной субстанции (например, газа см. [1, с. 99; 2, с. 121]) и т.п.

Поставим следующие дополнительные условия, которые определяют единственное решение уравнения (1):

$$u(0, t) = \mu_0, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(l, t) = \mu_1, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $\varphi \in C[0, l]$, μ_0, μ_1 – действительные числа и выполнены условия согласования $\varphi(0) = \mu_0$, $\varphi(l) = \mu_1$.

Под решением обратных задач для (1)–(4) задач будем понимать, не формулируя пока точных постановок, восстановление функций $\varphi(x)$ или $f(x)$, если дополнительно известна некоторая функция или функции, доступные в измерениях и определяемые решением $u(x, t)$ прямой задачи (1)–(4). Поскольку саму плотность не всегда можно непосредственно измерить, то на практике (например, в томографии) широко используется метод, основанный на следующем феноменологическом законе изменения интенсивности проникающего излучения $w(x)$ в среде с плотностью $u(x)$:

$$\frac{dw}{dx} = -\gamma u(x) w, \quad x > 0,$$

что приводит к хорошо известной зависимости

$$w(x) = w(0) e^{-\gamma \int_0^x u(\xi)\, d\xi},$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент поглощения, определяемый как свойствами среды, так и параметрами излучения.

Рассмотрим процесс, при котором плотность $u(x,t)$ в уравнении (1) изменяется во времени значительно медленнее распространения излучения. Введём вспомогательную функцию

$$v(x,t) = \int\limits_0^x u(\xi,t)\,d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t \geqslant 0,$$

физический смысл которой – масса вещества на отрезке $[0,x]$. Тогда для интенсивности $w(x,t)$ приходим к следующей зависимости:

$$w(x,t) = w(0,t)e^{-\gamma v(x,t)},$$

где $w(0,t) \in C^1[0,\infty)$, и пусть далее $w(0,0)=1$.

Получим уравнение относительно функции $w(x,t)$. Так как $v_x = u$, то, заменяя в уравнении (1) u на v_x, будем иметь

$$v_{xt} + (v_x^2)_x = \nu v_{xxx} + f(x),$$

откуда следует, что

$$v_t + v_x^2 = \nu v_{xx} + F(x) + a(t), \quad F(x) = \int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi + b, \tag{5}$$

где функция $a(t)$ и постоянная b выбираются произвольно.

С другой стороны,

$$v(x,t) = -\frac{1}{\gamma}\ln\frac{w(x,t)}{w(0,t)}. \tag{6}$$

Подставляя последнее выражение в (5), находим:

$$\frac{1}{w}\left[w_t - \nu w_{xx} + \left(\nu - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{w_x^2}{w}\right] = -\gamma F(x) + \frac{w_t(0,t)}{w(0,t)} - \gamma a(t).$$

В силу произвольности функции $a(t)$ полагаем $\gamma a(t) = w_t(0,t)/w(0,t)$. Поскольку переопределением функции w (возведением в положительную степень) всегда можно добиться равенства $\gamma\nu = 1$, то окончательно получаем

$$w_t = \nu w_{xx} - q(x)w, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad q(x) = \gamma F(x). \tag{7}$$

Для решения $w(x,t)$ уравнения (7) вследствие условий (2)–(4) и равенств $v_x = u$ и (6) возникают следующие граничные и начальные условия:

$$w_x(0,t) + \gamma\mu_0 w(0,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

$$w_x(l,t) + \gamma\mu_1 w(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{9}$$

$$w(x,0) = \psi(x) = e^{-\gamma\int_0^x \varphi(\xi)\,d\xi}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{10}$$

Поскольку из условия (10) следует, что

$$w_x(x,0) = -\gamma\varphi(x)w(x,0), \tag{11}$$

то непосредственной подстановкой выражения (11) для функции $w_x(x,0)$ в (8), (9) убеждаемся в выполнении условий согласования граничных и начальных данных для $w(x,t)$.

Заметим, что применённые выше редукции в какой-то мере можно рассматривать как обобщение преобразования Коула–Хопфа [1, с. 100], в основе которого лежит хорошо известное и часто используемое в обратной задаче теории рассеяния линеаризующее преобразование для уравнения Риккати (см. [2, с. 228; 3, с. 154]).

Уравнению Бюргерса посвящено огромное число работ, однако бóльшая их часть связана либо с поиском аналитических решений для источников специального вида [4; 5], либо с использованием его как одного из эталонных уравнений при моделировании нелинейных процессов в гидродинамике [6; 7].

Настоящая работа посвящена постановке и решению обратных задач для неоднородного уравнения Бюргерса на основе дополнительных данных, доступных в измерениях, с одной стороны, и, с другой стороны, в рамках строгих математических постановок. При этом в статье при исследовании обратных начально-краевых задач для уравнений параболического типа используются подходы и методы, предложенные и развитые в работах А.М. Денисова [8, с. 160; 9; 10].

1. Задачи определения начальных данных для уравнения Бюргерса на отрезке.

1.1. Прежде чем переходить к постановке и исследованию обратных задач, построим решение прямой задачи (7)–(10), основываясь на методе Фурье. При этом нам понадобится ортогональный базис $X_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, в $L_2[0,l]$, определяемый собственными функциями (с.ф.) – решением задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Шрёдингера на отрезке $[0,l]$:

$$\nu X'' - q(x)X = -\lambda X, \tag{12}$$

$$X'(0) + \gamma\mu_0 X(0) = 0, \tag{13}$$

$$X'(l) + \gamma\mu_1 X(l) = 0. \tag{14}$$

Дополнительным требованием к решению этой задачи поставим условие положительности собственных значений (с.з.): $\lambda_n > 0$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Хорошо известно, что не при любых действительных μ_0, μ_1 такое условие выполнено. Покажем, что его выполнения можно добиться увеличением функции $q(x)$, что возможно в силу произвольности постоянной b в (5).

Лемма 1. *Для любой функции $f\in C[0,l]$ найдётся такая постоянная b, что для $q(x) = \gamma\int_0^x f(\xi)d\xi + \gamma b$ собственные значения задачи (12)–(14) положительны, т.е. $\lambda_n > 0$ для всех $n\in\mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \ldots < \lambda_n^0 \ldots$ – с.з. задачи Штурма–Лиувилля (12)–(14) с коэффициентом $q(x)$, равным $q_0(x) = \gamma\int_0^x f(\xi)\,d\xi$. Если в уравнении (12) коэффициент $q_0(x)$ заменить на $q_0(x)+\gamma b$, то, очевидно, что с.ф. сохраняются, а с.з. изменятся и станут равными $\lambda_n = \lambda_n^0 + \gamma b$, $n\in\mathbb{N}$. Выбирая число b достаточно большим, приходим к выполнению неравенства $\lambda_n > 0$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Лемма доказана.

Пусть $\{X_n(x)\}$, $n\in\mathbb{N}$, – базис из с.ф. задачи (12)–(14) такой, что $\lambda_n > 0$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда решение задачи (7)–(10) представимо в виде ряда:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n e^{-\lambda_n t}X_n(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \quad t\geqslant 0, \tag{15}$$

где

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n\|}\int\limits_0^l \psi(x)X_n(x)\,dx = \frac{(\psi, X_n)}{\|X_n\|}.$$

1.2. Поставим обратную задачу об определении неизвестного начального условия $\varphi(x)$ в задаче (1)–(4) по дополнительным данным, имеющим смысл среднего взвешенного значения функции $w(x,t)$ по t на отрезке $[0,T]$:

$$\alpha w(x,0) + (1-\alpha)w(x,T) + \frac{\beta}{T}\int\limits_0^T w(x,t)\eta(t)\,dt = \overline{w}_T(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{16}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\eta \in C[0,T]$. Условие (16) охватывает широкий класс дополнительных данных для уравнения Бюргерса, поскольку на практике получение достоверной томографической информации, как правило, основано на усреднении.

Теорема 1. *Пусть неоднородность $f \in C[0,l]$ в уравнении (1) известна, а функция $\eta(t) \geqslant 0$ и числа α и $\beta \geqslant 0$ в условии (16) заданы. Тогда обратная задача (1)–(4), (16) может иметь лишь единственное решение.*

Доказательство. Положим в (15) $t=T$. При этом для (16) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha w(x,0)+(1-\alpha)w(x,T)+\frac{\beta}{T}\int\limits_0^T w(x,t)\eta(t)\,dt\right]\psi_n X_n(x)=\overline{w}_T(x).$$

Поскольку при $\overline{w}_T(x)=0$ и $\alpha+(1-\alpha)e^{-\lambda_n T}+\beta T^{-1}\int_0^l e^{-\lambda_n t}\eta(t)\,dt \neq 0$ верно равенство $\psi_n=0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то в силу полноты системы $\{X_n(x)\}$ в $L_2[0,l]$ получаем, что $\psi = 0$. Предположение, что обратная задача (1)–(4), (16) имеет два решения $\varphi \neq \overline{\varphi}$, в силу доказанного выше приводит к противоречию $e^{-\gamma\int_0^x\varphi(\xi)\,d\xi}-e^{-\gamma\int_0^x\overline{\varphi}(\xi)\,d\xi}=\psi(x)=0$ при всех $x \in [0,l]$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь обратную задачу об определении неизвестного начального условия $\varphi(x)$ в задаче (1)–(4), когда в качестве дополнительной информации дано среднее взвешенное значение функции $w(x,t)$ по x на отрезке $[0,l]$ при $t \in [t_0,T]$, $t_0>0$:

$$\alpha w(0,t)+(1-\alpha)w(l,t)+\frac{\beta}{l}\int\limits_0^l w(x,t)\rho(x)\,dx=\overline{w}_l(t), \tag{17}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\rho \in C[0,l]$.

Теорема 2. *Пусть неоднородность $f \in C[0,l]$ в уравнении (1) известна, а функция $\rho(x)$ и число $\alpha > 1/2$ в условии (17) заданы, причём $\rho(x)$ такова, что $(\rho, X_n)>0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдётся $\beta>0$ такое, что обратная задача (1)–(4), (17) имеет не более одного решения.*

Доказательство. Очевидно, что $(\rho,X_n)\to 0$ при $n\to\infty$ в силу свойств рядов Фурье по полной системе $\{X_n(x)\}$, $n\in\mathbb{N}$, такой, что $X_n(0)=1$. При этом для с.ф. $X_n(x)$ справедлива асимптотическая формула (см. [11, с. 221]) $X_n(l)=\cos(\sqrt{\lambda_n}l)+\mathcal{O}(1/n)$, т.е. найдётся $c>0$ такое, что при всех $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $|X_n(l)|\leqslant 1+2c/n$. Тогда

$$\alpha X_n(0)+(1-\alpha)X_n(l)\geqslant 2\alpha-1-2c(1-\alpha)/n.$$

Поскольку $\alpha>1/2$, то найдётся $\varepsilon>0$ такое, что

$$\alpha X_n(0)+(1-\alpha)X_n(l)\geqslant 2\varepsilon-c/n.$$

Выберем теперь $N=N(\varepsilon,c)$ таким, чтобы при $n>N$ выполнялось неравенство $\varepsilon-c/n > 0$. Очевидно, что при $n\leqslant N$ справедлива оценка $\alpha X_n(0)+(1-\alpha)X_n(l)\geqslant 2\varepsilon-c$. Так как $(\rho,X_n)>0$, то найдётся $\beta>0$ такое, что $\beta(\rho,X_n)>c$.

Таким образом, доказано, что в условиях теоремы выполняется неравенство

$$\alpha X_n(0)+(1-\alpha)X_n(l)+\beta(\rho,X_n)>\varepsilon.$$

Для доказательства единственности решения обратной задачи достаточно рассмотреть случай $\overline{w}_l(t)=0$ при $t\in[t_0,T]$, т.е. когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha X_n(0)+(1-\alpha)X_n(l)+\beta(\rho,X_n)]\psi_n e^{-\lambda_n t}=0.$$

Поскольку левая часть последнего равенства является функцией, аналитической при $t \geqslant t_0$ и равной нулю на отрезке $[t_0, T]$, то она равна нулю при всех $t \geqslant t_0$. Устремляя t к бесконечности, последовательно устанавливаем, что $\psi_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (подробнее см. [8, с. 119]). Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям из доказательства теоремы 1. Теорема доказана.

2. Обратные задачи для неоднородного уравнения Бюргерса на отрезке и полупрямой.

2.1. Пусть теперь неизвестны как начальное условие $\varphi(x)$, так и источник $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, в уравнении Бюргерса. С учётом п. 1 такая задача сводится к определению функции $q(x)$ в уравнении (7) при неизвестной функции $\psi(x)$. В качестве дополнительных данных рассмотрим след решения задачи (7)–(10) при $x = 0$:

$$w(0,t) = g(t), \quad t \geqslant 0, \tag{18}$$

и след решения $\widehat{w}(x,t)$ задачи (7)–(10) при другом значении параметра μ_0, а именно, при $\hat{\mu}_0 \neq \mu_0$:

$$\widehat{w}(0,t) = h(t), \quad t \geqslant 0. \tag{19}$$

Для разности $z(x,t) = w(x,t) - \widehat{w}(x,t)$ возникает обратная задача об определении функции $q(x)$:

$$z_t = \nu z_{xx} - q(x)z, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t > 0, \tag{20}$$

$$z(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{21}$$

$$z_x(0,t) + \gamma\mu_0 z(0,t) = \gamma(\hat{\mu}_0 - \mu_0)h(t), \quad t \geqslant 0, \tag{22}$$

$$z_x(l,t) + \gamma\mu_1 z(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{23}$$

$$z(0,t) = g(t) - h(t), \quad t \geqslant 0. \tag{24}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу Коши [11, с. 221] относительно функции $y(x,p)$, $p \in \mathbb{C}$ (ниже $y''(x,p) \equiv y_{xx}(x,p)$):

$$\nu y'' - q(x)y = py, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{25}$$

$$y(l,p) = 1, \quad y'(l,p) = -\gamma\mu_1.$$

Совершим в задаче (20)–(24) преобразование Лапласа по переменной t с параметром p, предполагая, что $q(x) > 0$, и, тем самым, $g(t), h(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Неравенства $q(x) > 0$ можно добиться, зная априорную оценку: $f(x) > f_0 = \mathrm{const}$ при всех $x \in [0,l]$. Для $\tilde{z}(x,p) \risingdotseq z(x,t)$ получаем

$$\nu\tilde{z}_{xx} - q(x)\tilde{z} = p\tilde{z}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$\tilde{z}_x(0,p) + \gamma\mu_0\tilde{z}(0,p) = \gamma(\hat{\mu}_0 - \mu_0)\tilde{h}(p), \tag{26}$$

$$\tilde{z}_x(l,p) + \gamma\mu_1\tilde{z}(l,p) = 0,$$

$$\tilde{z}(0,p) = \tilde{g}(p) - \tilde{h}(p), \tag{27}$$

где $\tilde{g}(p) \risingdotseq g(t)$, $\tilde{h}(p) \risingdotseq h(t)$.

Нетрудно убедиться, что функции $\tilde{z}(x,p)$ и $y(x,p)$ линейно зависимы, и, следовательно, $\tilde{z}(x,p) = C(p)y(x,p)$. При этом в силу (26), (27) имеем

$$C(p)[y'(0,p) + \gamma\mu_0 y(0,p)] = \gamma(\hat{\mu}_0 - \mu_0)\tilde{h}(p), \quad C(p)y(0,p) = \tilde{g}(p) - \tilde{h}(p).$$

Исключая $C(p)$, приходим к равенству

$$\frac{y'(0,p) + \gamma\mu_0 y(0,p)}{y(0,p)} = \gamma(\hat{\mu}_0 - \mu_0)\frac{\tilde{h}(p)}{\tilde{g}(p) - \tilde{h}(p)}.$$

Поскольку нули и полюсы правой части определяют два спектра задач Штурма–Лиувилля для уравнения (25) с граничными условиями

$$y'(l,p)+\gamma\mu_1 y(l,p)=0, \quad y'(0,p)+\gamma\mu_0 y(0,p)=0,$$

или вместо последнего условия

$$y(0,p)=0,$$

то функция $q(x)$ однозначно определяется данными (18), (19) обратной задачи [8; 12, с. 74].

Вернёмся к задаче определения функции $\psi(x)$ по данным обратной задачи. Докажем, что $\psi(x)$ восстанавливается однозначно при известной функции $q(x)$. Проведём доказательство от противного. Пусть существуют различные функции $\psi_0(x)$ и $\psi(x)$, $0\leqslant x\leqslant l$, такие, что $w_0(0,t)=w(0,t)$, где w_0 и w – решения задач (7)–(10) для ψ_0 и ψ соответственно. Поскольку для решений w_0 и w выполняются также краевые условия (8), то $w_{0,x}(0,t)=$ $=w_x(0,t)$. Но тогда для разности $\omega(x,t)=w_0(x,t)-w(x,t)$ имеет место следующая задача:

$$\omega_t=\nu\omega_{xx}-q(x)\omega, \quad 0<x<l, \quad t>0, \tag{28}$$

$$\omega(0,t)=\omega_x(0,t)=0, \quad t\geqslant 0, \tag{29}$$

$$\omega_x(l,t)+\gamma\mu_1\omega(l,t)=0, \quad t\geqslant 0, \tag{30}$$

$$\omega(x,0)=\overline{\omega}(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{31}$$

где $\overline{\omega}=\psi_0-\psi$.

Для дальнейшего нам понадобится

Лемма 2. *Решение $\omega(x,t)$ задачи (28)–(30) равно нулю при $x\in[0,l]$, $t\in[0,\infty)$, т.е. задача (28)–(31) разрешима лишь при $\overline{\omega}=0$.*

Доказательство. Пусть $\{X_n(x)\}$, $\{\lambda_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, – с.ф. и с.з. задачи (12)–(14) с условием $X_n(0)=0$ вместо условия (13). Тогда

$$\omega(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\omega}_n e^{-\lambda_n t}X_n(x).$$

Продифференцируем функцию ω по x и положим $x=0$:

$$\omega_x(0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\omega}_n e^{-\lambda_n t}X_n'(0)=0.$$

Очевидно, что $X_n'(0)\neq 0$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Устремляя t к бесконечности, последовательно устанавливаем, что $\overline{\omega}_n=0$, и, следовательно, $\overline{\omega}(x)=0$. Лемма доказана.

Таким образом, имеет место следующая

Лемма 3. *Обратная задача определения функций $q(x)$, $\psi(x)$ из условий (7)–(10), (18), (19) может иметь лишь единственное решение.*

Вернёмся к обратной задаче для уравнения Бюргерса на отрезке. Пусть в качестве дополнительных данных для прямой задачи (1)–(4) заданы условия (18), (19), соответствующие $\hat{\mu}_0\neq\mu_0$. Тогда из леммы 3 и связи задач (1)–(4) и (7)–(10) вытекает

Теорема 3. *Пусть неизвестная функция f в уравнении (1) непрерывна и известна её априорная оценка: $f(x)>f_0=\mathrm{const}$ при всех $x\in[0,l]$. Тогда обратная задача (1)–(4), (18), (19) имеет не более одного решения.*

2.2. Перейдём теперь к задаче определения начального условия $\varphi(x)$ и источника $f(x)$ на полупрямой $x\geqslant 0$. Пусть далее функции f и φ таковы, что $q\in C[0,\infty)$, $q(x)$ неотрицательна и достаточно быстро стремится к нулю при $x\to\infty$, причём выполнено условие $\int_0^\infty xq(x)\,dx<\infty$, а $\psi\in C[0,\infty)\bigcap L_2[0,\infty)$. Нетрудно убедиться, что, согласно (5), (10), класс таких функций не пуст и соответствует реальным физическим требованиям.

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\nu X''(x,k) - q(x)X(x,k) = -k^2 X(x,k), \quad x \geqslant 0, \tag{32}$$

$$X'(0,k) + \gamma\mu_0 X(0,k) = 0, \quad |X(\infty,k)| < \infty, \tag{33}$$

с условием нормировки $X(0,k)=1$. Хорошо известно (см., например, [11, с. 59; 13, с. 31], что любая функция $\psi(x)$ из указанного класса представима в виде

$$\psi(x) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \psi(\xi)X(\xi,k)\,d\xi\, X(x,k)\,d\sigma(k),$$

где $\sigma(k)$ – спектральная функция задачи (32), (33). Соответственно, решение задачи

$$w_t = \nu w_{xx} - q(x)w, \quad x,t>0, \tag{34}$$

$$w_x(0,t) + \gamma\mu_0 w(0,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{35}$$

$$w(x,0) = \psi(x), \quad x \geqslant 0, \tag{36}$$

представимо в виде [14, с. 6]

$$w(x,t) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \psi(\xi)X(\xi,k)\,d\xi e^{-k^2 t} X(x,k)\,d\sigma(k).$$

Из этого представления следует, что при $\operatorname{Re} p \geqslant p_0 > 0$ определено преобразование Лапласа функции $w(x,t)$ с параметром p.

Рассмотрим обратную коэффициентную начально-краевую задачу на полупрямой $x \geqslant 0$: в задаче (34)–(36) по следу решения

$$w(0,t) = g(t), \quad t \geqslant 0, \tag{37}$$

и следу решения при другом значении $\hat\mu_0 \neq \mu_0$

$$\widehat{w}(0,t) = h(t), \quad t \geqslant 0, \tag{38}$$

найти функции $q(x)$ и $\psi(x)$ при $x \geqslant 0$.

Докажем, что эта задача имеет лишь единственное решение. Рассуждения повторяют п. 3.1. Для разности $z(x,t) = w(x,t) - \widehat{w}(x,t)$ возникает следующая обратная задача об определении $q(x)$:

$$z_t = \nu z_{xx} - q(x)z, \quad x,t>0, \tag{39}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \geqslant 0, \tag{40}$$

$$z_x(0,t) + \gamma\mu_0 z(0,t) = \gamma(\hat\mu_0 - \mu_0)h(t), \quad t \geqslant 0, \tag{41}$$

$$z(0,t) = g(t) - h(t), \quad t \geqslant 0, \tag{42}$$

$$z(\infty,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{43}$$

Из условий (41), (42) и принципа суперпозиции вытекает, что для функции $z_0(x,t)$, удовлетворяющей соотношениям (39), (40), (43), можно считать известными следующие начально-краевые условия:

$$2\nu z_{0,x}(+0,t) = -\delta(t), \quad t \geqslant 0, \tag{44}$$

$$\begin{gathered} z_0(x,0) = 0, \quad x \geqslant 0, \\ z_0(0,t) = f(t), \quad t \geqslant 0, \\ z_0(\infty,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \end{gathered} \tag{45}$$

Покажем, что из условия (45) можно найти функцию $q(x)$, $x \geqslant 0$, лишь единственным образом.

Замечание. Для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + F(x,t), \quad t > 0,$$

в [15, с. 239] установлено, что три задачи

1) $|x| < \infty$, $u(x,0) = \delta(x)$, $F = 0$, $t \geqslant 0$,

2) $|x| < \infty$, $u(x,0) = 0$, $F = \delta(x)\delta(t)$, $t \geqslant 0$,

3) $x > 0$, $u(x,0) = 0$, $F = 0$, $2a^2 u_x(+0,t) = -\delta(t)$, $t \geqslant 0$,

при $x \geqslant 0$ имеют одно и то же (фундаментальное) решение

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-x^2/4a^2 t}.$$

Этот результат справедлив и в случае уравнения (39), что будет установлено в процессе доказательства следующей леммы.

Лемма 4. *Задача определения функции $q(x)$, $x \geqslant 0$, из условий (39), (40), (43) по данным (44), (45) может иметь лишь единственное решение.*

Доказательство. Продолжим коэффициент $q(x)$ и решение $z_0(x,t)$ на полупрямую $x \leqslant 0$ чётным образом. Очевидно, что $z_{0,x}(0,t) = 0$ при $t > 0$. Остаётся проверить условие (44). Для этого совершим преобразование Лапласа, положив $\tilde{z}_0(x,p) \risingdotseq z_0(x,t)$:

$$\nu \tilde{z}_{0,xx} - q(x)\tilde{z}_0 = p\tilde{z}_0, \quad |x| < \infty,$$

$$2\nu \tilde{z}_{0,x}(\pm 0, p) = \mp 1, \quad \tilde{z}_0(\pm\infty, p) = 0.$$

Рассмотрим теперь соответствующую начальную задачу относительно функции $z(x,t)$:

$$z_t = \nu z_{xx} - q(x) z, \quad |x| < \infty, \quad t > 0,$$

$$z(x,0) = \delta(x), \quad |x| < \infty,$$

$$z(\pm\infty, t) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Совершив преобразование Лапласа в этой задаче, получим

$$\nu \tilde{z}_{xx} - q(x)\tilde{z} = p\tilde{z} - \delta(x), \quad |x| < \infty, \tag{46}$$

$$\tilde{z}(\pm\infty, p) = 0. \tag{47}$$

Докажем, что $\tilde{z}(x,p) = \tilde{z}_0(x,p)$. Действительно, $\tilde{z}(x,p)$ является функцией Грина задачи (46), (47), откуда следует, что $\tilde{z}(x,p)$ имеет при $x = 0$ скачок производной, т.е. $2\nu \tilde{z}_x(\pm 0, p) = \mp 1$. Таким образом, функции $\tilde{z}(x,p)$ и $\tilde{z}_0(x,p)$ являются решением одной и той же краевой задачи на полупрямой $x > 0$. Доказательство для случая $F = \delta(x)\delta(t)$ аналогично.

Из доказанного следует справедливость замечания и, в частности, эквивалентность задач вида 1) и 3) для уравнения (39). Используем теперь результат из [14, с. 17], вкратце приведя соответствующие выкладки.

Совершим преобразование Фурье по системе функций $X_0(x,k)$, являющихся решением уравнения (32) с условиями Коши $X_0(0,k) = 1$, $X_0'(0,k) = 0$:

$$-\nu k^2 \int_0^\infty \tilde{z}(x,p) X_0(x,k)\, dx = p \int_0^\infty \tilde{z}(x,p) X_0(x,k)\, dx - 1.$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^\infty \tilde{z}(x,p) X_0(x,k)\, dx = \frac{1}{p + \nu k^2}.$$

Совершая обратное преобразование Фурье, находим

$$\tilde{z}(x,p) = \int_0^\infty \frac{X_0(x,k)}{p+\nu k^2}\, d\sigma(k),$$

где $\sigma(k)$ – спектральная функция задачи. Окончательно для прообраза Лапласа приходим к следующей формуле:

$$z(x,t) = \int_0^\infty e^{-\nu k^2 t} X_0(x,k)\, d\sigma(k).$$

Полагая теперь $x=0,$ из данных обратной задачи получаем уравнение на $\sigma(k)$:

$$\int_0^\infty e^{-\nu k^2 t} d\sigma(k) = f(t), \quad t \geqslant 0.$$

Из теоремы Лёрха о взаимнооднозначности преобразования Лапласа [14, с. 75] следует, что спектральная функция однозначно определяется по функции $f(t)$. В свою очередь, функция $\sigma(k)$ однозначно определяет коэффициент $q(x),$ $x \geqslant 0$ [13, с. 46]. Лемма доказана.

Осталось доказать, что функция $\psi(x)$ однозначно восстанавливается на полупрямой $x \geqslant 0$ при известной функции $q(x)$. Доказательство аналогично п. 3.1. Допустим, что существуют $\psi_0(x) \neq \psi(x)$ такие, что $w_0(0,t) = w(0,t),$ где w_0 и w – решения задач (34)–(36) для ψ_0 и ψ соответственно. Поскольку для решений w_0 и w выполняются также краевые условия (37), то $w_{0,x}(0,t) = w_x(0,t)$. Но тогда для разности $\omega(x,t) = w_0(x,t) - w(x,t)$ имеет место следующая задача:

$$\omega_t = \nu\omega_{xx} - q(x)\omega, \quad x,t>0,$$
$$\omega(0,t) = \omega_x(0,t) = 0, \quad t \geqslant 0,$$
$$|\omega(\infty,t)| < \infty, \quad t \geqslant 0,$$
$$\omega(x,0) = \overline{\omega}(x), \quad x \geqslant 0,$$

где $\overline{\omega} = \psi_0 - \psi$.

Функция $\omega(x,t)$ представима в виде

$$\omega(x,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{\omega}(\xi) X_0(\xi,k)\, d\xi e^{-k^2 t} X_0(x,k)\, d\sigma(k),$$

поэтому

$$\omega(0,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{\omega}(\xi) X_0(\xi,k)\, d\xi e^{-k^2 t} d\sigma(k) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Снова обращаясь к теореме о взаимнооднозначности преобразовании Лапласа [14, с. 75], заключаем, что

$$\int_0^\infty \overline{\omega}(\xi) X_0(\xi,k)\, d\xi = 0, \quad k \geqslant 0,$$

откуда следует

Теорема 4. *Обратная задача определения функций* $f(x),$ $\varphi(x),$ $x \geqslant 0,$ *в прямой задаче (1)–(4) по дополнительным данным (37), (38) может иметь лишь единственное решение.*

Нетрудно убедиться, что теоремы единственности решения обратных задач одновременного определения начальных условий и источника в уравнении Бюргерса на отрезке и полупрямой, аналогичные теоремам 3 и 4, могут быть доказаны для дополнительных условий второго или третьего рода взамен (37), (38).

Работа выполнена при содействии Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., 1977.
2. Нелинейные волны / Ред. С. Лейбович, С. Сибасс. М., 1977.
3. *Егоров А.И.* Уравнения Риккати. М., 2001.
4. *Петровский С.В.* Точные решения уравнения Бюргерса с источником // Журн. техн. физики. 1999. Т. 69. Вып. 8. С. 10–14.
5. *Кудрявцев А.Г., Сапожников О.А.* Получение точных решений неоднородного уравнения Бюргерса с использованием преобразования Дарбу // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 3. С. 313–322.
6. *Гужев Д.С., Калиткин Н.Н.* Уравнение Бюргерса – тест для численных методов // Мат. моделирование. 1995. Т. 7. № 4. С. 99–127.
7. *Samokhin A.* Gradient catastrophes for a generalized Burgers equation on a finite interval // Geometry and Physics. 2014. V. 85 (November). P. 177–184.
8. *Denisov A.M.* Elements of the Theory of Inverse Problems. Utrecht, 1999.
9. *Денисов А.М.* Единственность и неединственность решения задачи определения источника в уравнении теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2016. Т. 56. № 10. С. 1754–1759.
10. *Денисов А.М.* Задачи определения неизвестного источника в параболическом и гиперболическом уравнениях // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2015. Т. 55. № 5. С. 830–835.
11. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М., 1988.
12. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm–Liouvillschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. 1946. Bd. 78. № 1. S. 1–96.
13. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М., 1984.
14. *Лаврентьев М.М., Резницкая М.М., Яхно В.Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск, 1982.
15. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1972.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 21.01.2020 г.
После доработки 06.04.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.