

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:535.2

О МНГОВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

© 2021 г. А. Н. Волобуев

Рассматривается нелинейное уравнение Шрёдингера, возникающее в ряде физических задач. Показано, что при выделении в этом уравнении действительной части возникает нелинейное дифференциальное уравнение, имеющее по крайней мере два вида решений: многоволновые и в виде стоячих волн. Представлены численные примеры многоволнового решения и его перехода в решение в виде стоячих волн.

DOI: 10.31857/S0374064121060029

Введение. Нелинейные уравнения Шрёдингера возникают при решении различных физических и технических задач. Наиболее часто исследуется нелинейное уравнение Шрёдингера с кубической нелинейностью, имеющее особые виды решений в виде солитонов [1, гл. 1, § 1.7а; 2, гл. 4, § 4.1]. Для такого уравнения различными методами, в частности методом обратной задачи рассеяния, найдены одно- и многосолитонные решения. Однако в физических и технических задачах возникают нелинейные уравнения Шрёдингера с другими видами нелинейностей. Одно из таких уравнений исследуется в данной работе.

1. Нелинейное уравнение Шрёдингера. Рассмотрим нелинейное уравнение Шрёдингера следующего вида:

$$i\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = \left(\frac{\partial \ln |\Phi|}{\partial t} \right)^2 \Phi, \quad (1)$$

где μ и V – действительные постоянные, $\Phi = \Phi(X, t)$ – искомая функция.

Несмотря на то, что уравнение (1) обычно не обсуждается в математической литературе, оно возникает, например, при анализе самоиндуцированной прозрачности [3].

Исследуем бегущие волны, подчиняющиеся уравнению (1) и описывающиеся соотношением

$$\Phi(X, t) = (\varphi - \varphi_0) \exp\{i(kX - \omega t)\}, \quad (2)$$

где k – волновое число бегущей волны, ω – её циклическая частота, φ_0 – постоянная величина, $\varphi = \varphi(X, t)$ – действительнoзначная функция, имеющая вторую производную по X и первую по t , такая, что $\varphi > \varphi_0$ при всех X и t ; в частности, $|\Phi| = \varphi - \varphi_0$.

Подставляя выражение (2) для функции Φ в уравнение (1) и учитывая, что

$$\frac{\partial \ln |\Phi|}{\partial t} = \frac{1}{\varphi - \varphi_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

приходим к следующему уравнению относительно функции φ :

$$V^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + i \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2V^2 k \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right) + (\mu\omega - \omega^2)(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\varphi - \varphi_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2. \quad (3)$$

Функция φ является действительнoзначной, поэтому должно выполняться равенство

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2V^2 k \frac{\partial \varphi}{\partial X} = 0. \quad (4)$$

Обозначим через ν множитель при $\varphi - \varphi_0$ в левой части уравнения (3), т.е.

$$\nu = \mu\omega - \omega^2. \quad (5)$$

Тогда уравнение (3) (при выполнении условия (4)) запишется в виде

$$V^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \nu(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\varphi - \varphi_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2. \quad (6)$$

Уравнение вида (6) возникает также при исследованиях нервного импульса [4] и распространения электромагнитного поля в кириальной среде [5].

Таким образом, уравнение Шрёдингера (1) имеет решение вида (2) с действительнзначной функцией φ тогда и только тогда, когда функция φ удовлетворяет уравнениям (4) и (6) и неравенству $\varphi > \varphi_0$.

Уравнение (4) является линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами и поэтому легко решается: его общее вещественнзначное решение имеет вид $\varphi - \varphi_0 = f(\xi)$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная дифференцируемая функция, а

$$\xi = \mu X - 2V^2 kt.$$

Знак минус в переменной ξ соответствует распространению волны, как и в экспоненте (2), слева направо.

Следовательно, уравнение Шрёдингера (1) имеет решение вида (2) тогда и только тогда, когда найдётся дважды дифференцируемая положительная функция f , определённая на некотором (возможно, бесконечном) интервале, такая, что функция

$$\varphi(X, t) = \varphi_0 + f(\mu X - 2V^2 kt) \quad (7)$$

удовлетворяет уравнению (6).

Подставляя в уравнение (6) вместо функции φ её представление (7), придём к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$V^2 \mu^2 f'' + \nu f = 4V^4 k^2 \frac{1}{f} (f')^2 \quad (8)$$

(здесь штрих – производная по ξ).

Для упрощения будем считать, что $V\mu \neq 0$. Уравнение (8) относится к типу уравнений, не содержащих независимой переменной и поэтому стандартно интегрируется в квадратурах (см., например, [6, с. 169]): в качестве новой искомой функции введём функцию $p = df/d\xi$, а за независимую переменную примем f . Тогда $f'' = pdp/df$, и в этих обозначениях уравнение (8) принимает вид

$$p \frac{dp}{df} + \frac{a}{f} p^2 + bf = 0,$$

где $a = -4V^2 k^2 / \mu^2$, $b = \nu / (V^2 \mu^2)$. Это уравнение сводится к уравнению Бернулли.

Мы не будем записывать и анализировать общее решение уравнения (8) в случае произвольных коэффициентов, поскольку наша цель состоит в том, чтобы указать для уравнения (1) какое-либо параметрическое семейство решений (2), а также решения для уравнений (1) и (6) в виде бегущих волн. Поэтому будем считать, что величина k в представлении (2) выбрана такой, что имеет место равенство

$$4V^2 k^2 = \mu^2. \quad (9)$$

Тогда в уравнении (8) числовые коэффициенты при f'' и $(f')^2$ равны между собой, и, поделив обе его части на $4V^4 k^2$, после очевидных преобразований придём с учётом равенства (5) к уравнению

$$\left(\frac{f'}{f} \right)' = -\frac{\mu\omega - \omega^2}{4V^4 k^2},$$

откуда находим

$$f(\xi) = C_1 \exp \left\{ -\frac{\mu\omega - \omega^2}{4V^4 k^2} \frac{\xi^2}{2} + C_2 \xi \right\}, \quad (10)$$

где C_1 и C_2 – произвольные действительные постоянные.

Таким образом, если $V\mu \neq 0$, то при каждом $k = -\mu/(2V)$ и $k = \mu/(2V)$ уравнение Шрёдингера (1) имеет трёхпараметрическое семейство решений (2), где $\varphi = f(\mu X - 2V^2kt)$, а функция $f(\xi)$ задана равенством (10), в котором $C_1 > 0$, C_2 и ω – произвольные действительные постоянные.

2. Решения в виде бегущих волн. Перейдём к построению решений уравнений (1) и (6) в виде бегущих волн. В этом пункте будем считать, что величина ν в равенстве (5) неотрицательна, т.е. что

$$\omega_0^2 = \mu\omega - \omega^2 \tag{11}$$

(если искать частное решение уравнения (6) в том виде, который предлагается ниже, то, как показано, величина $\mu\omega - \omega^2$ должна быть неотрицательна; поэтому мы сразу обозначили её ω_0^2). Таким образом, далее мы ищем решения уравнения (1) и уравнения

$$V^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \omega_0^2(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\varphi - \varphi_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \tag{12}$$

в виде бегущих волн.

Решение нелинейного уравнения (12) будем искать в виде бегущей уединённой волны

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_{\max} \exp \left\{ -(k_0(X - X_0) \pm \omega_0(t - t_0))^2 / 2 \right\}, \tag{13}$$

где k_0 , X_0 и t_0 – действительные постоянные, и физический смысл входящих в представление (13) величин следующий: φ_{\max} – амплитудное значение функции $\varphi - \varphi_0$, X_0 – координата максимума (центра) волнового импульса, t_0 – время достижения этого максимума. Знак минус относится к волне, распространяющейся слева направо, а знак плюс – справа налево.

Непосредственной подстановкой функции φ , задаваемой равенством (13), в уравнение (12) несложно убедиться, что эта функция будет его решением только при выполнении равенства

$$V^2 k_0^2 = \omega_0^2. \tag{14}$$

Более того, функция (13) будет являться решением уравнения (4), если в (13) перед ω_0 выбран знак минус, а коэффициенты k_0 и ω_0 с одним и тем же множителем пропорциональны соответственно коэффициентам μ и $2V^2k$ линейной формы ξ , т.е.

$$2V^2 k k_0 = \mu \omega_0. \tag{15}$$

Действительно, в этом случае в силу (13), (15) и (11) получаем

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_{\max} \exp \left\{ -\frac{\mu\omega - \omega^2 \xi^2}{4V^4 k^2} + \frac{\omega_0 \delta_0}{V^2 k} \xi + \frac{\delta_0^2}{2} \right\},$$

где $\delta_0 = -k_0 X_0 + \omega_0 t_0$, т.е. поскольку из равенств (14) и (15) вытекает равенство (9), получаем найденное выше решение, соответствующее функции (10), при условии, что $\mu\omega - \omega^2 \geq 0$.

На рис. 1 показан график уединённого импульса $\Phi(X, t)$, построенный по формуле (2) с подстановкой в неё функции (13) при условиях: $\omega_0 = \omega = 0$ – отсутствие зависимости от времени, $\varphi_{\max} = 1$, $X_0 = 0$, отношение волновых чисел $k/k_0 = 5$.

Нелинейное уравнение (12), а следовательно, и уравнение (1), допускает многоволновое решение.

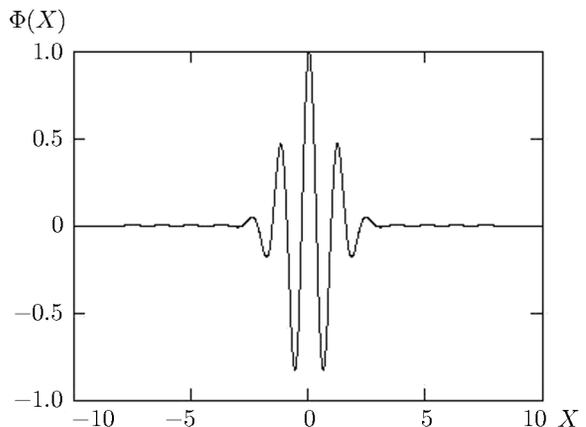


Рис. 1. Уединённый импульс функции $\Phi(X)$.

Многоволновые решения найдены для очень ограниченного круга нелинейных уравнений [1, 2]. Многоволновое решение уравнения (12) ищем в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{\max} \sum_{n=1}^N \varphi_n(X, t), \tag{16}$$

где

$$\varphi_n(X, t) = \varphi_n = \exp\{-\Delta_n^2(X, t)/2\}, \quad \text{а} \quad \Delta_n(X, t) = \Delta_n = k_0(X - X_{0n}) - \omega_0(t - t_{0n}). \tag{17}$$

В представлении (16), (17) число N – общее количество волн-импульсов, n – текущий номер импульса, X_{0n} – координаты максимумов волн-импульсов, t_{0n} – времена достижения этих максимумов.

Подставляя в уравнение (12) вместо функции φ её представления (16), (17), получаем равенство

$$\sum_{n=1}^N \varphi_n \sum_{n=1}^N \varphi_n \Delta_n^2 = \left(\sum_{n=1}^N \varphi_n \Delta_n \right)^2. \tag{18}$$

Рассмотрим два подряд идущих одинаковых импульса $n = 1, 2$. Записывая для этого случая ($N = 2$) равенство (18), будем иметь

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1 \Delta_1^2 + \varphi_2 \Delta_2^2) = (\varphi_1 \Delta_1 + \varphi_2 \Delta_2)^2. \tag{19}$$

Очевидно, что равенство (19) равносильно равенству $\Delta_1 - \Delta_2 = 0$, или

$$k_0(X_{02} - X_{01}) - \omega_0(t_{02} - t_{01}) = 0. \tag{20}$$

Соотношение (20) показывает, что расстояние между импульсами $\delta = X_{02} - X_{01}$ волна проходит за время $t_{02} - t_{01}$ со скоростью $V = \omega_0/k_0$.

Если в Δ_n при каждом n взять $t_{0n} = X_{0n}/V = k_0 X_{0n}/\omega_0$, то получим, что $\Delta_n = k_0 X - \omega_0 t$ для всех $n = \overline{1, N}$, т.е. тогда $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_N$ и в равенстве (18) их можно вынести за знак суммы и сократить. В результате (18) превращается в тождество.

Следовательно, при таком выборе значений t_{0n} , $n = \overline{1, N}$, функция (16) является многоволновым решением нелинейного уравнения (12).

Наиболее простой вид многоволновое решение (16) приобретает в случае одинакового расстояния δ между всеми волнами-импульсами. В этом случае для координат максимумов импульсов справедливо равенство $X_{0n} = n\delta$, а для времён достижения максимумов – равенство $t_{0n} = k_0 X_{0n}/\omega_0 = k_0 n\delta/\omega_0$.

На рис. 2 показаны несколько следующих друг за другом импульсов, построенных по формуле (16) при условиях

$$\omega_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_{\max} = 1, \quad k_0 = 2, \quad \delta = 4.$$

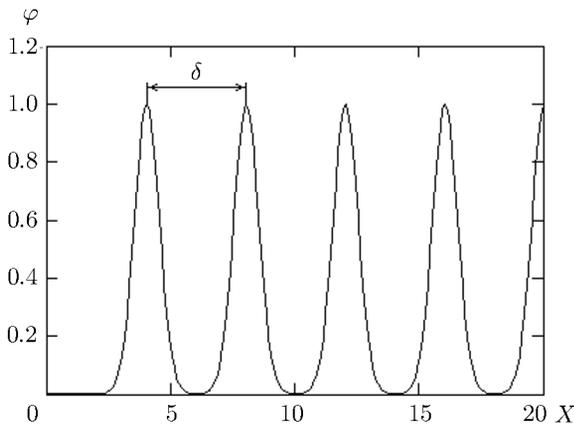


Рис. 2. Следующие друг за другом импульсы в многоволновом решении.

3. Решение в виде стоячих волн. Стоячие волны чаще всего образуются в линейных системах в результате суперпозиции (интерференции) прямых и отражённых бегущих волн. Однако известно, что стоячие волны могут возникать и в нелинейных системах [7, гл. 4, § 2]. Многие физические процессы носят принципиально нелинейный характер, и процесс возникновения стоячих волн в таких системах нетривиален. Мы не будем обсуждать физические

Рассмотрим другой вид волны, представляющий собой решение уравнения (16).

механизмы возникновения стоячих волн в этих системах. Исследуем математическую возможность возникновения стоячих волн, подчиняющихся нелинейному уравнению (12).

Некоторые решения нелинейного уравнения (12) можно найти методом разделения переменных (см., например, [8, гл. 2, § 3]). Рассмотрим решение уравнения (12), имеющее вид

$$\varphi - \varphi_0 = \phi(X)T(t), \quad (21)$$

где $\phi(X)$ – функция только координаты X , $T(t)$ – функция только времени t .

Подставив (21) в (12), получим

$$V^2 \phi(X) T^2(t) \frac{d^2 \phi(X)}{dX^2} = \left(\phi(X) \frac{dT(t)}{dt} \right)^2 - \phi^2(X) T^2(t) \omega_0^2. \quad (22)$$

Разделим обе части уравнения (22) на $\phi^2(X) T^2(t)$. В результате будем иметь

$$V^2 \frac{1}{\phi(X)} \frac{d^2 \phi(X)}{dX^2} + \omega_0^2 = \left(\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} \right)^2 = -\alpha^2, \quad (23)$$

где α – постоянная величина.

Равенства (23) распадаются на два не зависящих друг от друга уравнения. Одно из них – уравнение относительно функции $\phi(X)$ – имеет вид

$$\frac{d^2 \phi(X)}{dX^2} + \left(k_0^2 + \frac{\alpha^2}{V^2} \right) \phi(X) = 0; \quad (24)$$

здесь мы воспользовались равенством (14), в силу которого $\omega_0^2/V^2 = k_0^2$.

Обозначим $k_S^2 = k_0^2 + \alpha^2/V^2$. Общим решением уравнения (24) является

$$\phi(X) = \phi(0) \exp(ik_S X), \quad (25)$$

где $\phi(0)$ – значение функции $\phi(X)$ в начале координат.

Другое уравнение, вытекающее из равенства (23), – уравнение относительно функции $T(t)$ – имеет вид

$$\frac{dT(t)}{dt} = i\alpha T(t). \quad (26)$$

Величина α может принимать как положительные, так и отрицательные значения, что не влияет на дальнейшие выкладки. Общим решением уравнения (26) является

$$T(t) = T(0) \exp(i\alpha t), \quad (27)$$

где $T(0)$ – начальное значение функции $T(t)$.

Подставляя общие решения (25) и (27) в представление (21), получаем

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_A \exp(i\alpha t) \exp(ik_S X), \quad (28)$$

где обозначено $\varphi_A = T(0)\phi(0)$.

Как показано выше, функция $\varphi - \varphi_0$ должна быть действительной. Использование же экспонент с мнимыми показателями вводится исключительно для удобства преобразований. На самом деле в этих экспонентах нужно учитывать только действительные слагаемые. Поэтому формула (28) описывает решение уравнения (12) в виде стоячих волн

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_A \cos(\alpha t) \cos(k_S X) = \varphi_A \cos(\alpha t) \cos(2\pi X/\delta), \quad (29)$$

где φ_A – амплитудное значение стоячих волн, δ – длина волны.

Интересно проследить графически переход многоволнового решения (16) в решение в виде стоячих волн (29). Этот переход осуществляется при сближении импульсов (см. рис. 2), т.е. при уменьшении величины δ .

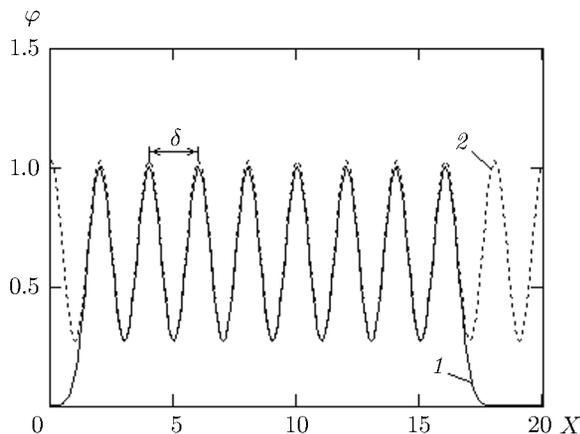


Рис. 3. Переход многоимпульсного решения в решение в виде стоячей волны: 1 – многоволновое решение, 2 – стоячая волна.

новлено, что это нелинейное уравнение имеет как многоволновые решения, так и решения в виде стоячих волн. Многоволновое решение при уменьшении расстояния между волнами-импульсами переходит в решение в виде стоячих волн.

На рис. 3 показаны два графика. График 1 построен по формуле (16) при условиях $\omega_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{\max} = 1$, $k_0 = 2$, $\delta = 2$ для $N = 8$ импульсов. График 2 (пунктиром) построен по формуле (29) при условиях $\varphi_0 = 0.65$ и $\varphi_A \cos(\alpha t) = 0.38$ для некоторого момента времени t .

Заключение. В работе для рассмотренного в ней нелинейного уравнения Шрёдингера задача нахождения его решений, имеющих вид бегущей волны, сведена к решению системы двух уравнений в частных производных относительно одной и той же функции. Показано, как найти все решения этой системы в замкнутой форме. Одно из уравнений указанной системы является нелинейным и возникает в различных задачах прикладного характера. Уста-

новлено, что это нелинейное уравнение имеет как многоволновые решения, так и решения в виде стоячих волн. Многоволновое решение при уменьшении расстояния между волнами-импульсами переходит в решение в виде стоячих волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М., 1988.
3. Волобуев А.Н. Распространение импульса электромагнитного поля в диэлектрике в условиях самоиндуцированной прозрачности // Мат. моделирование. 2006. Т. 18. № 3. С. 93–102.
4. Волобуев А.Н. Индуктивно-емкостная модель возбудимой биоткани // Успехи совр. радиоэлектроники. 2006. № 3. С. 33–60.
5. Volobuev A.N. The Nonlinear Analysis of Chiral Medium / Ed. Takashiro Akitsu. "Chirality from Molecular Electronic States". IntechOpen. 2018. P. 1–10.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., 1953.
7. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М., 1984.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1972.

Самарский государственный медицинский университет

Поступила в редакцию 24.12.2019 г.
После доработки 04.02.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.