УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА С АНАЛОГОМ УСЛОВИЯ ФРАНКЛЯ НА ВНУТРЕННЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

© 2021 г. У. М. Мирсабурова

Для уравнения $(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0,$ рассматриваемого в некоторой смешанной области, доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с недостающим условием Трикоми на граничной характеристике и аналогом условия Франкля на внутренней характеристике и на отрезке вырождения.

DOI: 10.31857/S0374064121060030

1. Постановка задачи TF (Трикоми–Франкля). Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой σ_0 $(y = \sigma_0(x))$, заданной уравнением $x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1,$ с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0),$ а при $y < 0$ – характеристиками AC и BC уравнения

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0, \tag{1}$$

где m – положительная постоянная.

Обозначим через D^+ и D^- части области $D,$ лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0,$ через C_0 и C_1 – точки пересечения соответственно характеристик AC и BC с характеристиками, выходящими из точки $E(c, 0),$ а через C^* – точку пересечения характеристики EC_1 с характеристикой, выходящей из точки $E_1(c_1, 0),$ где $c,$ c_1 – некоторые числа, принадлежащие интервалу $I = (-1, 1)$ оси $y = 0,$ причём $c < c_1 < 1.$

Пусть $p(x) = a_1 x - b_1$ и $q(x) = a_2 - b_2 x$ – линейные функции, отображающие отрезок $[c, 1]$ на отрезки $[c, c_1]$ и $[c_1, 1]$ соответственно, причём $p(c) = c,$ $p(1) = c_1$ и $q(c) = 1,$ $q(1) = c_1,$ т.е. $a_1 = (c_1 - c)/(1 - c),$ $b_1 = c(c_1 - 1)/(1 - c)$ и $a_2 = (1 - cc_1)/(1 - c),$ $b_2 = (1 - c_1)/(1 - c),$ при этом $a_1 + b_2 = 1,$ $a_2 + b_1 = 1.$

В работе Трикоми [1] краевое условие ставилось на всей характеристике $AC.$ В настоящей работе исследуется корректность задачи, в которой характеристика AC произвольным образом разбита на два куска AC_0 и C_0C и на AC_0 задано условие Трикоми, а C_0C освобождён от краевого условия, и это недостающее условие Трикоми заменено аналогами условия Франкля [2–5] на внутренней характеристике EC_1 и на отрезке вырождения $EB \subset AB.$

Задача TF (Трикоми–Франкля). Требуется найти в области D функцию $u(x, y) \in C(\overline{D}),$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области $D^+;$

2) функция $u(x, y)$ является в области D^- обобщённым решением класса R_1 уравнения (1) $(u(x, y) \in R_1,$ если в формуле Даламбера $\tau'(x), \nu(x) \in H$ (см. ниже представление (7) [6, с. 104]);

3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to +0} y^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I \setminus \{c\}, \tag{2}$$

причём эти пределы при $x = \pm 1,$ $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

4) выполняются равенства

$$u(x,y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC_0} = \psi_0(x), \quad x \in [-1,(c-1)/2], \tag{4}$$

$$u[\theta^*(p(x))] - \mu u[\theta^*(q(x))] = \psi_1(x), \quad x \in [c,1], \tag{5}$$

$$u(p(x),0) - u(q(x),0) = f(x), \quad x \in [c,1], \tag{6}$$

где μ – постоянная, $\mu \in (0,1)$, а $\theta^*(x_0) = (x_0+c)/2 - i[(m+2)(x_0-c)/4]^{2/(m+2)}$ – аффикс точки пересечения характеристики EC_1 с характеристикой, выходящей из точки $M(x_0,0)$, где $x_0 \in (c,1)$ [7, 8], функции $\varphi(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $f(x)$ заданы и $\varphi(x) \in C^{0,\alpha_0}(\overline{I})$, $\psi_0(x) \in \in C[-1,(c-1)/2] \bigcap C^{1,\alpha_0}(-1,(c-1)/2)$, $\psi_1(x)$, $f(x) \in C[c,1] \bigcap C^{1,\alpha_0}(c,1)$, причём

$$\varphi(x) = (1-x^2)\varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) \in C^{0,\alpha_0}(\overline{I}), \quad \psi_0(-1) = 0, \quad \psi_1(1) = 0, \quad f(1) = 0.$$

Заметим, что условия (5) и (6) являются аналогами условия Франкля [2] на внутренней характеристике $EC_1 = EC^* \bigcup C^*C_1$ и на отрезке вырождения $EB = (EE_1 \bigcup E_1B) \subset AB$ соответственно. Обозначим $u(x,0) = \tau(x)$, $x \in \overline{I}$, тогда условие (6) примет вид

$$\tau(p(x)) - \tau(q(x)) = f(x), \quad x \in [c,1]. \tag{6*}$$

2. Единственность решения задачи TF. Формула Даламбера, дающая в области D^- для уравнения (1) решение видоизменённой задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \in \overline{I}; \quad \lim_{y \to -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in I,$$

имеет вид [9, с. 39]

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau\left(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right) + \tau\left(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)\right] -$$

$$- \frac{(-y)^{(m+2)/2}}{m+2} \int\limits_{-1}^{1} \nu\left(x + \frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right) dt. \tag{7}$$

С помощью формулы Даламбера в силу краевых условий (4) и (5) с учётом равенства (6*) соответственно получаем

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi_0'((x-1)/2), \quad x \in (-1,c), \tag{8}$$

$$b_2(1-\mu)\tau'(q(x)) + a_1\nu(p(x)) + \mu b_2 \nu(q(x)) = \psi_2(x), \quad x \in (c,1), \tag{9}$$

где $\psi_2(x) = f'(x) - 2\psi_1'(x)$.

Равенства (8) и (9) являются первыми функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесёнными соответственно на интервалы $(-1,c)$ и $(c,1)$ оси $y=0$ из области D^-.

Для задачи TF аналогом принципа экстремума Бицадзе [10, с. 301] является

Теорема 1. *Решение $u(x,y)$ задачи TF при выполнении условий $\psi_0(x) \equiv 0$, $\psi_1(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$ свои наибольшее положительное значение (НПЗ) или наименьшее отрицательное значение (НОЗ) в замкнутой области $\overline{D^+}$ может принимать только в точках нормальной кривой σ_0.*

Доказательство. Пусть функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. В силу принципа Хопфа [10, с. 25] решение $u(x,y)$ уравнения 1 своего НПЗ во внутренних точках области D^+ не достигает.

Допустим, что функция $u(x,y)$ в области $\overline{D^+}$ своего НПЗ или НОЗ достигает в точках интервала $I=(-1,1)$ оси $y=0$.

Пусть $(x_0,0)$, $x_0\in I$, – точка НПЗ функции $u(x,y)$, а следовательно, и функции $\tau(x)= = u(x,0)$.

Рассмотрим отдельно три случая возможного расположения точки x_0.

1. Пусть $x_0\in(-1,c)$. Тогда в этой точке имеем [11; 9, с. 74]

$$\nu(x_0)<0. \tag{10}$$

С другой стороны, в силу соответствующего однородного соотношения (8) (с $\tau'(x_0)=0$, $\psi_0(x)\equiv 0$) верно равенство $\nu(x_0)=0$, что в силу (2) противоречит неравенству (10). Следовательно, $x_0\notin(-1,c)$.

2. Пусть решение $u(x,y)$ своего НПЗ достигает во внутренней точке x_0 интервала $(c,1)$. Тогда в силу соответствующего однородного условия (6^*) (с $f(x)\equiv 0$) решение $u(x,y)$ своего НПЗ достигает в двух точках $(p(x_0),0)$ и $(q(x_0),0)$. Следовательно, в этих точках $\nu(p(x_0))< < 0$, $\nu(q(x_0))<0$ [11; 9, с. 74], откуда следует, что

$$a_1\nu(p(x_0))+\mu b_2\nu(q(x_0))<0. \tag{11}$$

Однако в силу соответствующего однородного соотношения (9) (с $\tau'(q(x_0))=0$, $\psi_2(x)\equiv \equiv 0$) имеем $a_1\nu(p(x_0))+\mu b_2\nu(q(x_0))=0$, что вследствие (2) противоречит неравенству (11). Поэтому $x_0\notin(c,1)$

3. Пусть $x_0=c$. Тогда из соответствующего однородного условия (6^*) $(c\;\; f(x)\equiv 0)$ при $x=c$ с учётом значений $p(c)=c$, $q(c)=1$, $\tau(1)=\varphi(1)=0$ вытекает, что $\tau(c)-\tau(1)=0$, т.е. $\tau(c)=0$. Следовательно, и в этом случае приходим к противоречию.

Таким образом, решение $u(x,y)$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, своего НПЗ во внутренних точках интервала I не достигает.

Так же, как и выше, доказывается, что решение $u(x,y)$, для которого выполнены условия теоремы 1, своего НОЗ не достигает во внутренних точках интервала I.

Итак, решение $u(x,y)$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, своих НПЗ и НОЗ в замкнутой области $\overline{D^+}$ может достигать только в точках нормальной кривой σ_0. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Задача TF имеет не более одного решения.*

В самом деле, согласно теореме 1, решение однородной задачи TF в замкнутой области $\overline{D^+}$ своих НПЗ и НОЗ достигает в точках нормальной кривой σ_0, а в этих точках в силу соответствующего однородного условия (3) (с $\varphi(x)\equiv 0$) $u(x,y)|_{\sigma_0}=0$. Отсюда следует, что $u(x,y)\equiv 0$ всюду в замкнутой области $\overline{D^+}$, а значит, и во всей смешанной области D.

3. Существование решения задачи TF.

Теорема 2. *Пусть для числовых параметров задачи TF выполняется неравенство*

$$\frac{4}{(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{c_1-c}{1-c_1}}\left(\mu(1+b_2^*)+\left(\frac{1-c_1}{c_1-c}\right)^2(1+a_1^*)\right)<1, \tag{12}$$

в котором $a_1^*=\cos(\theta\pi)-0.5a_1\sin(\theta\pi)$, $b_2^*=\cos(\theta\pi)-0.5b_2\sin(\theta\pi)$, $\theta\pi=\operatorname{arctg}((1+\mu)/(1-\mu))$. *Тогда задача TF однозначно разрешима.*

Заметим, что множество числовых параметров задачи TF, удовлетворяющих неравенству (12), не пусто. Действительно, например, пусть $\mu=1-c_1$. Тогда, если число c_1 достаточно близко к единице, разность $1-c_1$ достаточна мала, и неравенство (12) при этих значений c_1 выполняется.

Доказательство теоремы 2.

3.1. Вывод системы неклассических сингулярных интегральных уравнений Трикоми. Решение уравнения (1) в области D^+, удовлетворяющее краевым условиям Дирихле

$$u(x,0)=\tau(x),\quad x\in\overline{I};\quad u(x,y)\,|_{\sigma_0}=\varphi(x),\quad x\in I,$$

имеет вид [9, с. 143; 10, с. 180; 11; 12]

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi(m+2)}y^{(m+2)/2}\int\limits_{-1}^{1}\left\{\left[(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-1}-\right.$$

$$\left.-\left[(1-xt)^2+\frac{4t^2}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-1}\right\}\tau(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}(1-R^2)\int\limits_{-1}^{1}(r_-^{-2}-r_+^{-2})\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi, \qquad (13)$$

где

$$r_{\mp}^2=(x-\xi)^2+\frac{4}{(m+2)^2}(y^{(m+2)/2}\mp\eta^{(m+2)/2})^2, \quad (\xi,\eta)\in\sigma_0,$$

$$\xi^2+\frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}=1, \quad R^2=x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}.$$

Продифференцируем решение (13) по y, затем умножим полученное тождество на $y^{-m/2}$ и перейдём к пределу при $y\to+0$, в результате получим

$$\nu(x)=-\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau'(t)\,dt}{x-t}+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau(t)\,dt}{(1-xt)^2}\right)+\Phi_0(x), \quad x\in I, \qquad (14)$$

где

$$\Phi_0(x)=\frac{2}{\pi}(1-x^2)\int\limits_{-1}^{1}(1-2x\xi+x^2)^{-2}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Равенство (14) является вторым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесённым на интервал $I=(-1,1)$ оси $y=0$ из области D^+.

Отметим, что равенство (14) справедливо для всего промежутка I.

Заменяя в соотношениях (8) и (9) функцию $\nu(x)$ её представлением (14), запишем их в виде

$$\tau'(x)=-\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau'(t)\,dt}{x-t}+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau(t)\,dt}{(1-xt)^2}\right)+F_0(x), \quad x\in(-1,c), \qquad (15)$$

$$-b_2(1-\mu)\tau'(q(x))+\frac{a_1}{\pi}\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau'(t)\,dt}{p(x)-t}+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau(t)\,dt}{(1-p(x)t)^2}\right)+$$

$$+\frac{\mu b_2}{\pi}\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau'(t)\,dt}{q(x)-t}+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau(t)\,dt}{(1-q(x)t)^2}\right)=E_0(x), \quad x\in(c,1), \qquad (16)$$

где $F_0(x)=\Phi_0(x)+\psi_0'((x-1)/2)$, $E_0(x)=a_1\Phi_0(p(x))+\mu b_2\Phi_0(q(x))-\psi_2(x)$.

Заметим, что соотношения (15) и (16) являются интегро-дифференциальными уравнениями для неизвестной функции $\tau(x)$ в промежутках $(-1,c)$ и $(c,1)$ соответственно.

Равенство (15) проинтегрируем в пределах от -1 до x, а равенство (16) – от c до x, затем, выполнив стандартные преобразования [11, 12] с использованием следующих легко доказываемых тождеств:

$$-\frac{1}{t-p(x)}-\frac{1}{c-t}+\frac{1}{t(1-p(x)t)}-\frac{1}{t(1-ct)}=-\frac{p(x)-c}{t-c}\left(\frac{1}{t-p(x)}-\frac{t-c}{1-ct}\frac{1}{1-p(x)t}\right),$$

$$\frac{1}{q(x)-t}-\frac{1}{1-t}+\frac{1}{t(1-q(x)t)}-\frac{1}{t(1-t)}=-\frac{1-q(x)}{1-t}\left(\frac{1}{t-q(x)}+\frac{1}{1-q(x)t}\right),$$

получим интегральные уравнения

$$\tau(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1+x}{1+t}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\tau(t)\,dt+(1+x)F_1(x),\quad x\in(-1,c), \tag{17}$$

$$(1-\mu)\tau(q(x))-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(x)-c}{t-c}\left(\frac{1}{t-p(x)}-\frac{t-c}{1-ct}\frac{1}{1-p(x)t}\right)\tau(t)\,dt+$$

$$+\frac{\mu}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1-q(x)}{1-t}\left(\frac{1}{t-q(x)}+\frac{1}{1-q(x)t}\right)\tau(t)\,dt=(c-x)E_1(x),\quad x\in(c,1), \tag{18}$$

где

$$(1+x)F_1(x)=\int_{-1}^{x}F_0(t)\,dt,\quad (c-x)E_1(x)=\int_{c}^{x}E_0(t)\,dt.$$

Заметим, что уравнения (17) и (18) имеют место для $x\in(-1,c)$ и $x\in(c,1)$ соответственно. Чтобы рассмотреть их на одном промежутке $I=(-1,1)$, заменим x в уравнении (17) на $ax-b$, а в уравнении (18) на $bx+a$, где $a=(1+c)/2$, $b=(1-c)/2$, $a+b=1$, $a-b=c$. Тогда уравнения (17) и (18) запишутся соответственно в виде

$$\tau(ax-b)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{a(1+x)}{1+t}\left(\frac{1}{t-ax+b}-\frac{1}{1-(ax-b)t}\right)\tau(t)\,dt+a(1+x)F_1(ax-b),\quad x\in I, \tag{19}$$

$$(1-\mu)\tau(q(bx+a))-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(bx+a)-c}{t-c}\left(\frac{1}{t-p(bx+a)}-\frac{t-c}{1-ct}\frac{1}{1-p(bx+a)t}\right)\tau(t)\,dt+$$

$$+\frac{\mu}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1-q(bx+a)}{1-t}\left(\frac{1}{t-q(bx+a)}+\frac{1}{1-q(bx+a)t}\right)\tau(t)\,dt=b(1+x)E_1(bx+a),\quad x\in I. \tag{20}$$

Теперь систему уравнений (19), (20) подчиним условию (6*). Для этого интегралы по промежутку $(-1,1)$ разобьём на три интеграла по промежуткам $(-1,c)$, (c,c_1) и $(c_1,1)$, затем в интегралах по промежутку (c,c_1) сделаем замену переменной интегрирования $t=p(s)$ $(t\in(c,c_1),\ s\in(c,1))$, а в интегралах по промежутку $(c_1,1)$ – замену $t=q(s)$ $(t\in(c_1,1),$ $s\in(c,1))$ и учтём в них вытекающее из условия (6*) равенство $\tau(p(x))=\tau(q(x))+f(x)$. С учётом этих преобразований система уравнений (19), (20) примет вид

$$\tau(ax-b)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{c}\frac{a(1+x)}{1+s}\left(\frac{1}{s-ax+b}-\frac{1}{1-(ax-b)s}\right)\tau(s)\,ds+$$

$$+\frac{a_1}{\pi}\int_{c}^{1}\frac{a(1+x)}{1+p(s)}\left(\frac{1}{p(s)-ax+b}-\frac{1}{1-(ax-b)p(s)}\right)\tau(q(s))\,ds+$$

$$+\frac{b_2}{\pi}\int_{c}^{1}\frac{a(1+x)}{1+q(s)}\left(\frac{1}{q(s)-ax+b}-\frac{1}{1-(ax-b)q(s)}\right)\tau(q(s))\,ds+(1+x)F_2(x),\quad x\in I, \tag{21}$$

$$(1-\mu)\tau(q(bx+a))-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{c}\frac{p(bx+a)-c}{s-c}\left(\frac{1}{s-p(bx+a)}-\frac{s-c}{1-cs}\frac{1}{1-p(bx+a)s}\right)\tau(s)\,ds-$$

$$-\frac{a_1}{\pi}\int\limits_{c}^{1}\frac{p(bx+a)-c}{p(s)-c}\left(\frac{1}{p(s)-p(bx+a)}-\frac{p(s)-c}{1-cp(s)}\frac{1}{1-p(bx+a)p(s)}\right)\tau(q(s))\,ds+$$

$$+\frac{b_2}{\pi}\int\limits_{c}^{1}\frac{p(bx+a)-c}{q(s)-c}\left(\frac{1}{q(s)-p(bx+a)}-\frac{q(s)-c}{1-cq(s)}\frac{1}{1-p(bx+a)q(s)}\right)\tau(q(s))\,ds-$$

$$-\frac{\mu}{\pi}\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1-q(bx+a)}{1-s}\right)\left(\frac{1}{s-q(bx+a)}+\frac{1}{1-q(bx+a)s}\right)\tau(s)\,ds-$$

$$-\frac{\mu a_1}{\pi}\int\limits_{c}^{1}\frac{1-q(bx+a)}{1-p(s)}\left(\frac{1}{p(s)-q(bx+a)}+\frac{1}{1-q(bx+a)p(s)}\right)\tau(q(s))\,ds+$$

$$+\frac{\mu b_2}{\pi}\int\limits_{c}^{1}\frac{1-q(bx+a)}{1-q(s)}\left(\frac{1}{q(s)-q(bx+a)}+\frac{1}{1-q(bx+a)q(s)}\right)\tau(q(s))\,ds=$$

$$=(1+x)E_2(x),\quad x\in I, \tag{22}$$

где $(1+x)F_2(x)$ и $(1+x)E_2(x)$ – известные функции.

Чтобы заменить в уравнениях системы (21), (22) промежутки интегрирования $(-1,c)$ и $(c,1)$ на один и тот же промежуток $(-1,1)$, в интегралах по промежутку $(-1,c)$ сделаем замену переменной интегрирования $s=at-b$ $(s\in(-1,c),\ t\in(-1,1))$, а в интегралах по промежутку $(c,1)$ – замену $s=bt+a$ $(s\in(c,1),\ t\in(-1,1))$, и, выделив в них интегралы с сингулярными особенностями, запишем эту систему в виде

$$\tau_0(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+x}{1+t}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)\tau_0(t)\,dt+$$

$$+\frac{a_1b}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1+x)\tau_1(t)\,dt}{p(bt+a)-ax+b}+(1+x)T[\tau_1]+(1+x)F_2(x),\quad x\in I, \tag{23}$$

$$(1-\mu)\tau_1(x)-\frac{a_1b}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{p(bx+a)-c}{p(bt+a)-c}\frac{\tau_1(t)\,dt}{p(bt+a)-p(bx+a)}+\frac{\mu bb_2}{\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}\frac{1-q(bx+a)}{1-q(bt+a)}\left(\frac{1}{q(bt+a)-q(bx+a)}+\frac{1}{1-q(bx+a)q(bt+a)}\right)\tau_1(t)\,dt=$$

$$=\frac{a}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{p(bx+a)-c}{at-b-c}\frac{\tau_0(t)\,dt}{at-b-p(bx+a)}-\frac{b}{\pi}\times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} \left[\frac{p(bx+a)-c}{q(bt+a)-c} \frac{b_2}{q(bt+a)-p(bx+a)} - \frac{1-q(bx+a)}{1-p(bt+a)} \frac{\mu a_1}{p(bt+a)-q(bx+a)} \right] \tau_1(t)\,dt +$$

$$+ (1+x)R_0[\tau_0] + (1+x)R_1[\tau_1] + (1+x)E_2(x), \quad x \in I, \tag{24}$$

где $\tau_0(x) = \tau(ax-b)$, $\tau_1(x) = \tau(q(bx+a))$, а $(1+x)T[\tau_1]$, $(1+x)R_0[\tau_0]$, $(1+x)R_1[\tau_1]$ – регулярные операторы.

Уравнения (23) и (24) являются неклассическими интегральными уравнениями Трикоми, так как они имеют две особенности:

1) несингулярные части ядра имеют некарлемановские сдвиги видов $ax-b$, $p(bx+a)$, $q(bx+a)$;

2) интегральные операторы в правых частях уравнений (23) и (24) не являются регулярными, поскольку ядра этих операторов при $(x,t)=(1,-1)$ в (23) и при $(x,t)=(-1,1)$, $(x,t)=(1,1)$ в (24) имеют изолированные особенности первого порядка (и поэтому они выделены отдельно).

3.2. Исключение неизвестной функции $\tau_0(x)$ из системы уравнений (23) и (24). Временно считая правую часть уравнения (23) известной функцией и учитывая тождество

$$p(bt+a) - ax + b = \frac{1+c_1}{2}(b_0 t - a_0 x + 1),$$

в котором $a_0 = (1+c)/(1+c_1)$, $b_0 = (c_1 - c)/(1+c_1)$, $a_0 + b_0 = 1$, запишем (23) в виде

$$\tau_0(x) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{1+t} \right) \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) \tau_0(t)\,dt = g_0(t), \quad x \in (-1,1), \tag{25}$$

где

$$g_0(x) = \frac{a_1 b}{\pi(1+c_1)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+x)\tau_1(t)\,dt}{b_0 t - a_0 x + 1} + (1+x)T[\tau_1] + (1+x)F_2(x), \quad x \in (-1,1). \tag{26}$$

Решение уравнения (25) будем искать в классе функций Гёльдера $H(-1,1)$, в котором функция $(1+x)^{-1}\tau_0(x)$ может быть неограниченной в точке $x=-1$ и ограничена на правом конце отрезка $[-1,1]$, т.е. в классе $h(1)$ [6, с. 43].

Применяя к уравнению (25) метод регуляризации Карлемана, развитый С.Г. Михлиным [13], получаем решение

$$\tau_0(x) = \frac{g_0(x)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{1/4} \left(\frac{1+x}{1+t} \right)^{1/2} \left(\frac{1-c(ax-b}{1-c(at-b)} \right)^{1/4} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) g_0(t)\,dt, \quad x \in I. \tag{27}$$

Теперь, заменяя в выражении (27) функцию $g_0(x)$ её представлением (26), приходим к уравнению

$$\tau_0(x) = \frac{a_1 b}{\pi(1+c_1)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+x)\tau_1(t)\,dt}{b_0 t - a_0 x + 1} + \frac{a_1 b}{\pi^2(1+c_1)} \int\limits_{-1}^{1} \tau_1(s)\,ds \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{1/4} \times$$

$$\times \frac{(1+x)^{1/2}(1+t)^{1/2}}{t-x} \frac{dt}{b_0 s - a_0 t + 1} + (1+x)T_1[\tau_1] + (1+x)F_3(x), \tag{28}$$

в котором $T_1[\tau_1]$ – регулярный оператор, а $(1+x)F_3(x)$ – известная функция.

Вычислим внутренний интеграл в (28):

$$A(x,s)=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1/4}\frac{(1+x)^{1/2}}{t-x}\frac{(1+t)^{1/2}}{b_0s-a_0t+1}\,dt. \tag{29}$$

Рациональную часть подынтегрального выражения в (29) разложим на простые дроби и к получившимся интегралам применим формулы [9, с. 125; 14]

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{t-x}\,dt=\frac{\pi\operatorname{ctg}(\beta\pi)}{(1+x)^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}-\frac{2^{\beta-1}B(\alpha,\beta-1)}{(1+x)^{1-\alpha}}F\left(\alpha,1-\beta,2-\beta;\frac{1-x}{2}\right);$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{bs-at+1}\,dt=\frac{\pi}{\sin(\beta\pi)}\frac{b^{\beta-1}a^{1-\alpha-\beta}}{(1+a-bs)^{1-\alpha}(1+s)^{1-\beta}}+$$
$$+\frac{B(\alpha,\beta-1)}{2^{2-\alpha-\beta}a}F\left(2-\alpha-\beta,1,2-\beta;-\frac{b(1+s)}{2a}\right), \tag{30}$$

здесь $\alpha=3/2$, $\beta=3/4$, $B(\alpha,\beta)$ – бета-функция Эйлера, $F(a,b,c;x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [6, с. 6]. В силу (30) находим интеграл (29):

$$A(x,s)=\frac{(1-x)^{1/4}(1+x)^{1/2}}{b_0s-a_0x+1}\left\{-\frac{\pi(1+x)^{1/2}}{(1-x)^{1/4}}-2^{1/4}B\left(3/2,-1/4\right)F\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{5}{4};\frac{1-x}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{2}\pi a_0b_0^{-1/4}}{(1+a_0-b_0s)^{-1/2}(1+s)^{1/4}}+\frac{B(3/2,-1/4)}{2^{1/4}}F\left(-\frac{1}{4},1,\frac{5}{4};-\frac{b_0(1+s)}{2a_0}\right)\right\}. \tag{31}$$

Вследствие (31) уравнение (28) принимает вид

$$\tau_0(x)=\frac{a_0^{-1/4}b_0^{-1/4}a_1b}{\pi(1+c_1)}(1+x)^{1/2}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+s}\right)^{1/4}\frac{\tau_1(s)\,ds}{b_0s-a_0x+1}+$$
$$+(1+x)^{1/2}T_2[\tau_1]+(1+x)F_3(x),\quad x\in I, \tag{32}$$

где

$$(1+x)^{1/2}T_2[\tau_1]=\frac{\sqrt{2}a_0^{-1/4}b_0^{-1/4}a_1b}{\pi(1+c_1)}(1+x)^{1/2}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+s}\right)^{1/4}\left[\left(1+a_0-b_0s\right)^{1/2}-2^{1/2}\right]\frac{\tau_1(s)\,ds}{b_0s-a_0x+1}-$$
$$-\frac{a_1b2^{1/4}B(3/2,-1/4)}{\pi^2(1+c_1)}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-x)^{1/4}}{b_0s-a_0x+1}\left[F\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{5}{4};\frac{1-x}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-F\left(-\frac{1}{4},1,\frac{5}{4};-\frac{b_0(1+s)}{2a_0}\right)\right]\tau_1(s)\,ds+(1+x)T_1[\tau_1]$$

– регулярный оператор.

Подставляя выражение для $\tau_0(x)$ из (32) в первый интеграл и в регулярный оператор $R_0[\tau_0]$ правой части (24), будем иметь

$$(1-\mu)\tau_1(x)-\frac{ba_1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{p(bx+a)-c}{p(bt+a)-c}\right)\frac{\tau_1(t)\,dt}{p(bt+a)-p(bx+a)}+\frac{\mu bb_2}{\pi}\times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1-q(bx+a)}{1-q(bt+a)}\right)\left(\frac{1}{q(bt+a)-q(bx+a)} + \frac{1}{1-q(bx+a)q(bt+a)}\right)\tau_1(t)\,dt =$$

$$= \frac{\lambda_0}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{p(bx+a)-c}{(1+s)^{1/4}}\tau_1(s)\,ds \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+t)^{1/2}(1-t)^{-3/4}\,dt}{(b_0 s - a_0 t + 1)(at - b - p(bx+a))} -$$

$$-\frac{b}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left[\left(\frac{p(bx+a)-c}{q(bt+a)-c}\right)\frac{b_2}{q(bt+a)-p(bx+a)} - \left(\frac{1-q(bx+a)}{1-p(bt+a)}\right)\frac{\mu a_1}{at-b-q(bx+a)}\right]\tau_1(t)\,dt +$$

$$+(1+x)R_2[\tau_1] + (1+x)E_3(x), \tag{33}$$

где $\lambda_0 = -a_0^{-1/4} b_0^{-1/4} a_1 b(1+c_1)$, $R_2[\tau_1]$ – регулярный оператор, $(1+x)E_3(x)$ – известная функция.

Вычислим внутренний интеграл в правой части уравнения (33):

$$I(x,s) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+t)^{1/2}(1-t)^{-3/4}\,dt}{(b_0 s - a_0 t + 1)(at - b - p(bx+a))}. \tag{34}$$

Разложив рациональную часть подынтегрального выражения в (34) на простые дроби, получим

$$I(x,s) = \frac{1}{\omega(x,s)}(a_0 I_1(s) + a I_2(x)), \tag{35}$$

где

$$I_1(s) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+t)^{1/2}(1-t)^{-3/4}\,dt}{b_0 s - a_0 t + 1} = \frac{2^{3/4}(b_0(1+s))^{-3/4}}{(b_0 s + a_0 + 1)^{1/4}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}; \frac{2a_0}{b_0 s + a_0 + 1}\right), \tag{36}$$

$$I_2(x) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+t)^{1/2}(1-t)^{-3/4}\,dt}{at - b - p(bx+a)} =$$

$$= -\frac{2^{3/4}(p(bx+a)-c)^{-3/4}}{(1+p(bx+a))^{1/4}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}; \frac{2a}{1+p(bx+a)}\right), \tag{37}$$

$$\omega(x,s) = ab_0 s + a - a_0 b - a_0 p(bx+a) = ab_0(s-1) - a_0 a_1 b(x-1) = ab_0(s-x). \tag{38}$$

При вычислении интегралов (36) и (37) сделаны замены переменной интегрирования $t = -1 + 2\sigma$, затем использованы интегральное представление гипергеометрической функции Гаусса $F(a,b,c;x)$ [6, с. 8] и формула автотрансформации для гипергеометрических функций [6, с. 10].

В силу (36)–(38) равенство (35) запишем в виде

$$I(x,s) = (1+s)^{-3/4} K(x,s), \tag{39}$$

где

$$K(x,s) = \frac{2^{3/4} B(3/2, 1/4)}{ab_0(s-x)} \left\{ \frac{a_0 b_0^{-3/4}}{(b_0 s + a_0 + 1)^{1/4}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}; \frac{2a_0}{b_0 s + a_0 + 1}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{(1+p(bx+a))^{1/4}} \left(\frac{1+s}{p(bx+a)-c}\right)^{3/4} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}; \frac{2a}{1+p(bx+a)}\right) \right\},$$

и с учётом тождеств $2a_0/(b_0s+a_0+1)=2a/(1+p(bs+a))$, $a/a_1b=a_0/b_0$ заключаем, что $K(x,s)$ – регулярное ядро.

Вследствие равенства (39) двойной интеграл в правой части уравнения (33) преобразуется к виду

$$\frac{\lambda_0}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(bx+a)-c}{(1+s)^{1/4}}\tau_1(s)\,ds\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{1/2}(1-t)^{-3/4}\,dt}{(b_0s-at+1)(at-b-p(bx+a))}=$$

$$=\frac{\lambda_0}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{p(bx+a)-c}{(1+s)}\right)K(x,s)\tau_1(s)\,ds. \tag{40}$$

С учётом равенства (40) и тождеств

$$p(bx+a)-c=ba_1(1+x),\quad 1-q(bx+a)=bb_2(1+x),\quad p(bt+a)-p(bx+a)=ba_1(t-x),$$

$$q(bt+a)-q(bx+a)=-bb_2(t-x),\quad q(bt+a)-p(bx+a)=-b(b_2t+a_1x-1),$$

$$p(bt+a)-q(bx+a)=b(a_1t+b_2x-1),$$

уравнение (33) принимает вид

$$(1-\mu)\tau_1(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\left(\frac{1+\mu}{t-x}-\frac{\mu bb_2}{1-q(bx+a)q(bt+a)}\right)\tau_1(t)\,dt=$$

$$=\frac{1+x}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{b_2}{b_2t+a_1x-1}+\frac{\mu a_1}{a_1t+b_2x-1}\right)\tau_1(t)\,dt-$$

$$-\lambda_0ba_1\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)K(x,t)\tau_1(t)\,dt+\frac{1+x}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{ba_1(1+t)}{q(bt+a)-c}-1\right)\frac{b_2}{b_2t+a_1x-1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{bb_2(1+t)}{1-p(bt+a)}-1\right)\frac{\mu a_1}{a_1t+b_2x-1}\right]\tau_1(t)\,dt-(1+x)R_2[\tau_1]-(1+x)E_3(x). \tag{41}$$

Уравнение (41) является неклассическим сингулярным интегральным уравнением, так как оно имеет две особенности:

1) “несингулярная” часть ядра имеет некарлемановские сдвиги $q(bx+a)$, $q(bt+a)$, причём $q(bx+a)q(bt+a)|_{x=-1,t=-1}=q(c)q(c)=1$;

2) первый интегральный оператор в его правой части не является регулярным, поскольку при $t=1$, $x=1$ ядро этого оператора имеет изолированную особенность первого порядка (и поэтому он выделен отдельно первым).

Временно считая правую часть уравнения (41) известной функцией и вводя обозначение $\rho(x)=(1+x)^{-1}\tau_1(x)$, запишем его в виде

$$(1-\mu)\rho(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+\mu}{t-x}-\frac{\mu bb_2}{1-q(bx+a)q(bt+a)}\right)\rho(t)\,dt=g(x),\quad x\in I, \tag{42}$$

где

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{b_2}{b_2t+a_1x-1}+\frac{\mu a_1}{a_1t+b_2x-1}\right)\rho(t)\,dt+R_3[\rho]-E_3(x),\quad x\in I, \tag{43}$$

$$R_3[\rho] = -\lambda_0 ba_1 \int_{-1}^{1} K(x,t)\rho(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\biggl[\biggl(\frac{ba_1(1+t)}{q(bt+a)-c}-1\biggr)\frac{b_2}{b_2t+a_1x-1} +$$
$$+\biggl(\frac{bb_2(1+t)}{1-p(bt+a)}-1\biggr)\frac{\mu a_1}{a_1t+b_2x-1}\biggr]\rho(t)\,dt - R_2[\rho]$$

– регулярный оператор, а $R_2[\rho]$ получается из $R_2[\tau_1]$ заменой $\tau_1(x)=(1+x)\rho(x)$.

Решение $\rho(x)$ уравнения (42) будем искать в классе функций Гёльдера $H(-1,1)$, в котором функция $\rho(x)$ может быть неограниченной в точке $x=-1$ и ограничена на правом конце отрезка $[-1,1]$, т.е. в классе $h(1)$ [6, с. 43].

С учётом тождеств $q(bx+a)=a_3-b_3x$, $bb_2=b_3$, где $a_3=(1+c_1)/2$, $b_3=(1-c_1)/2$, запишем уравнение (42) в виде

$$\rho(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\biggl(\frac{\alpha}{t-x} - \frac{\beta b_3}{1-(b_3x-a_3)(b_3t-a_3)}\biggr)\rho(t)\,dt = (\alpha-\beta)g(x), \quad x\in I, \tag{44}$$

где $\alpha=(1+\mu)/(1-\mu)$, $\beta=\mu/(1-\mu)$, $\alpha=1-2\beta$.

3.3. Решение нестандартного сингулярного интегрального уравнения (44).

Теорема 3. *Если функция* $g(x)\in L_p(-1,1)$, $p>1$, *удовлетворяет условию Гёльдера при* $x\in(-1,1)$, *то для решения* $\rho(x)$ *уравнения (44) в классе функций* $H(-1,1)$, *в котором функция может быть неограниченной в точке* $x=-1$ *и ограничена при* $x=1$, *справедлива формула*

$$\rho(x) = \frac{\alpha-\beta}{1+\alpha^2}g(x) + \frac{\alpha-\beta}{\pi(1+\alpha^2)}\int_{-1}^{1}\biggl(\biggl(\frac{1+t}{1+x}\biggr)^2\frac{1-x}{1-t}\,\frac{1-c_1(b_3x-a_3)}{1-c_1(b_3t-a_3)}\biggr)^{\theta}\times$$
$$\times\biggl(\frac{\alpha}{t-x} + \frac{b_3\beta((1+\alpha i)/(1+\beta i))}{1-(b_3x-a_3)(b_3t-a_3)}\biggr)g(t)\,dt, \tag{45}$$

где $\theta\pi=\operatorname{arctg}\alpha$, $0<\theta<1/2$.

Доказательство. Хотя метод доказательства теоремы 3 такой же, как и в работах [13, 14], однако имеет свои особенности, обусловленные наличием двух различных параметров α и β в уравнении (44), поэтому приведём схему доказательства теоремы 3.

Пусть z – произвольная точка комплексной плоскости. Следуя подходу Карлемана, развитому С.Г. Михлиным [13], положим

$$\Phi(\alpha,\beta;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\biggl(\frac{\alpha}{t-z} - \frac{\beta b_3}{1-(b_3z-a_3)(b_3t-a_3)}\biggr)\rho(t)\,dt.$$

Очевидно, что функция $\Phi(\alpha,\beta;z)$ голоморфна как в верхней, так и в нижней полуплоскостях и обращается в нуль на бесконечности. Обозначим через $\Phi^+(\alpha,\beta;x)$ и $\Phi^-(\alpha,\beta;x)$ её предельные значения, когда z стремится к точке x действительной оси соответственно из верхней или из нижней полуплоскостей. Нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$\Phi\biggl(\alpha,\beta;\frac{1+a_3+a_3z}{b_3z-a_3}\biggr) = (b_3z-a_3)\Phi(\beta,\alpha;z). \tag{46}$$

Дробно-линейное преобразование $W(z)=(1+a_3+a_3z)/(b_3z-a_3)$ переводит верхнюю полуплоскость в нижнюю и наоборот. При этом промежуток $(-1,1)$ переходит в множество Δ, совпадающее с объединением интервалов $(-\infty,-1)\bigcup(-(2+c_1)/c_1,+\infty)$, если $c_1<0$, с интервалом $(-\infty,-1)$, если $c_1=0$, и с интервалом $(-(2+c_1)/c_1,-1)$, если $c_1>0$.

Формулы Сохоцкого–Племеля [10, с. 145] для функции $\Phi(\alpha,\beta;z)$ имеют вид

$$\Phi^{\pm}(\alpha,\beta;x)=\pm\frac{\alpha\rho(x)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{\alpha}{t-x}-\frac{\beta b_3}{1-(b_3x-a_3)(b_3t-a_3)}\right)\rho(t)\,dt. \tag{47}$$

В силу формул (47) уравнение (44) принимает вид

$$\Phi^{+}(\alpha,\beta;x)-\frac{1+\alpha i}{1-\alpha i}\Phi^{-}(\alpha,\beta;x)=\frac{\alpha(\alpha-\beta)g(x)}{1-\alpha i},\quad x\in I. \tag{48}$$

Заменив в (48) x на $W(x)$, с учётом соотношения (46) получим равенство

$$\Phi^{+}(\beta,\alpha;W(x))-\frac{1-\alpha i}{1+\alpha i}\Phi^{-}(\beta,\alpha;W(x))=-\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{1+\alpha i}\frac{g(W(x))}{b_3x-a_3},$$

поменяв в котором α и β местами, будем иметь

$$\Phi^{+}(\alpha,\beta;W(x))-\frac{1-\beta i}{1+\beta i}\Phi^{-}(\alpha,\beta;W(x))=-\frac{\beta(\beta-\alpha)}{1+\beta i}\frac{g(W(x))}{b_3x-a_3},\quad x\in\Delta. \tag{49}$$

Таким образом, в силу (48) и (49) нахождение решения интегрального уравнения (44) сводится к следующей задаче теории функции комплексной переменной: найти исчезающую на бесконечности функцию $\Phi(\alpha,\beta;z)$, голоморфную как в верхней, так и в нижней полуплоскостях, и удовлетворяющую граничному условию

$$\Phi^{+}(\alpha,\beta;x)-G(x)\Phi^{-}(\alpha,\beta;x)=h(x),\quad x\in(-\infty,+\infty), \tag{50}$$

где

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\alpha i}{1-\alpha i} & \text{при } x\in I,\\[2mm] \dfrac{1-\beta i}{1+\beta i} & \text{при } x\in\Delta,\\[2mm] 1 & \text{при } x\notin I\bigcup\Delta,\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\alpha-\beta)g(x)}{1-\alpha i} & \text{при } x\in I,\\[2mm] -\dfrac{\beta(\beta-\alpha)}{1+\beta i}\dfrac{g(W(x))}{b_3x-a_3} & \text{при } x\in\Delta,\\[2mm] 0 & \text{при } x\notin I\bigcup\Delta.\end{cases} \tag{51}$$

Метод решения краевой задачи (50), (51) такой же, как и в работе [13].

3.4. Вывод интегрального уравнения Винера–Хопфа. Решение (45) с учётом обозначений $\alpha=(1+\mu)/(1-\mu)$, $\beta=\mu/(1-\mu)$ запишем в виде

$$\rho(x)=\frac{(1-\mu)g(x)}{2(1+\mu^2)}+\frac{1}{\pi(1+\mu^2)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^2\frac{1-x}{1-t}\frac{1-c_1(b_3x-a_3)}{1-c_1(b_3t-a_3)}\right)^{\theta}\times$$
$$\times\left(\frac{1+\mu}{t-x}+\frac{b_3\mu((1-\mu+(1+\mu)i)/(1-\mu+\mu i))}{1-(b_3x-a_3)(b_3t-a_3)}\right)g(t)\,dt. \tag{52}$$

Заменяя в (52) $g(x)$ его выражением из (43), получаем

$$\rho(x)=\frac{1-\mu}{2\pi(1+\mu^2)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{b_2}{b_2t+a_1x-1}+\frac{\mu a_1}{a_1t+b_2x-1}\right)\rho(t)\,dt+$$

$$+\frac{1+\mu}{\pi^2(1+\mu^2)}\int\limits_{-1}^{1}\rho(s)\,ds\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\theta}\left(\frac{b_2}{a_1t+b_2s-1}+\frac{\mu a_1}{b_2t+a_1s-1}\right)\frac{dt}{t-x}+R_4[\rho]+E_4(x), \tag{53}$$

где $R_4[\rho]$ – регулярный оператор, $E_4(x)$ – известная функция.

Вычислим внутренний интеграл в (53):

$$B(x,s)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{(1-t)^{\theta}}\left(\frac{b_2}{a_1t+b_2s-1}+\frac{\mu a_1}{b_2t+a_1s-1}\right)\frac{dt}{t-x}. \tag{54}$$

Разложив в равенстве (54) рациональную часть подынтегрального выражения на простые дроби, запишем это равенство в виде

$$B(x,s)=\frac{b_2}{a_1(a_1x+b_2s-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a_1}{a_1t+b_2s-1}\right)\frac{dt}{(1-t)^{\theta}}+$$

$$+\frac{\mu a_1}{b_2(b_2x+a_1s-1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b_2}{b_2t+a_1s-1}\right)\frac{dt}{(1-t)^{\theta}}. \tag{55}$$

Согласно первой формуле в (30) имеем

$$I_3(x)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-t)^{-\theta}}{t-x}\,dt=-\frac{\pi\operatorname{ctg}(\theta\pi)}{(1-x)^{\theta}}-\frac{B(1,-\theta)}{2^{\theta}}F(1,\theta,1+\theta;(1-x)/2). \tag{56}$$

Теперь, используя разложение [6, с. 55]

$$F(a,b,a+b;1-\sigma)=-\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(a,b,1;\sigma)\ln\sigma+\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{(k!)^2}\times$$

$$\times\left[2\frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)}-\frac{\Gamma'(a+k)}{\Gamma(a+k)}-\frac{\Gamma'(b+k)}{\Gamma(b+k)}\right]\sigma^k,$$

с учётом тождеств $B(1,-\theta)=-1/\theta$ и $F(a,b,b;\sigma)=(1-\sigma)^{-a}$ правую часть равенства (56) запишем в виде

$$I_3(x)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-t)^{-\theta}}{t-x}\,dt=-\frac{\pi\operatorname{ctg}(\theta\pi)}{(1-x)^{\theta}}-\frac{1}{(1-x)^{\theta}}\ln\frac{1+x}{2}+Q(x), \tag{57}$$

где

$$Q(x)=\frac{2^{-\theta}}{\Gamma(\theta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+k)\Gamma(\theta+k)}{(k!)^2}\left[\frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)}-\frac{\Gamma'(\theta+k)}{\Gamma(\theta+k)}\right]\left(\frac{1+x}{2}\right)^k.$$

Нетрудно вычислить, что

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{(1-t)^{\theta}}\frac{a\,dt}{at+bs-1}=-\frac{2^{1-\theta}ab^{-\theta}}{(1-\theta)(1-s)^{\theta}(1+a-bs)^{1-\theta}}F\left(1-\theta,1-\theta,2-\theta;\frac{2a}{1+a-bs}\right). \tag{58}$$

Таким образом, с учётом (57) и (58) равенство (55) запишется в виде

$$B(x,s)=\left[-\frac{b_2\pi\operatorname{ctg}(\theta\pi)}{a_1(1-x)^{\theta}}-\frac{\pi(2b_2)^{1-\theta}}{\sin(\theta\pi)(1+a_1-b_2s)^{1-\theta}(1-s)^{\theta}}\right]\frac{1}{(a_1x+b_2s-1)}+$$

$$+\left[-\frac{a_1\pi\operatorname{ctg}(\theta\pi)}{b_2(1-x)^{\theta}}-\frac{\pi(2a_1)^{1-\theta}}{\sin(\theta\pi)(1+b_2-a_1s)^{1-\theta}(1-s)^{\theta}}\right]\frac{\mu}{(b_2x+a_1s-1)}+B_0(x,s), \tag{59}$$

где
$$B_0(x,s)=\left(-\ln\frac{1+x}{2}+Q(x)\right)\left(\frac{b_2}{a_1(a_1x+b_2s-1)}+\frac{\mu a_1}{b_2(b_2x+a_1s-1)}\right)+$$
$$+\frac{(2b_2)^{1-\theta}(1+a_1-b_2s)^{\theta-1}}{(1-\theta)(1-s)^\theta}\left[F\left(1-\theta,1-\theta,2-\theta;\frac{2a_1}{1+a_1-b_2s}\right)-F\left(1-\theta,1-\theta,2-\theta;1\right)\right]\times$$
$$\times\frac{1}{a_1x+b_2s-1}+\frac{(2a_1)^{1-\theta}}{(1-\theta)(1-s)^\theta(1+b_2-a_1s)^{1-\theta}}\times$$
$$\times\left[F\left(1-\theta,1-\theta,2-\theta;\frac{2b_2}{1+b_2-a_1s}\right)-F\left(1-\theta,1-\theta,2-\theta;1\right)\right]\frac{\mu}{b_2x+a_1s-1},$$
здесь $(1-x)^\theta B_0(x,s)$ – регулярное ядро.

Следовательно, в силу (59) уравнение (53) принимает вид
$$\rho(x)=\frac{1-\mu}{2\pi(1+\mu^2)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{b_2}{b_2t+a_1x-1}+\frac{\mu a_1}{a_1t+b_2x-1}\right)\rho(t)\,dt-$$
$$-\frac{1-\mu}{\pi^2(1+\mu^2)}\int\limits_{-1}^{1}\left\{\left[\frac{b_2\pi\operatorname{ctg}(\theta\pi)}{a_1}+\frac{\pi(2b_2)^{1-\theta}}{\sin(\theta\pi)(1+a_1-b_2s)^{1-\theta}}\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^\theta\right]\frac{1}{a_1x+b_2s-1}+\right.$$
$$+\left[\frac{a_1\pi\operatorname{ctg}(\theta\pi)}{b_2}+\frac{\pi(2a_1)^{1-\theta}}{\sin(\theta\pi)(1+b_2-a_1s)^{1-\theta}}\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^\theta\right]\frac{\mu}{b_2x+a_1s-1}+$$
$$\left.+(1-x)^\theta B_0(x,s)\right\}\rho(s)\,ds+R_4[\rho]+E_4(x). \tag{60}$$
Запишем уравнение (60), выделив в нём ядро с неподвижными особенностями первого порядка при $x=1,\ \ s=1,$ в виде
$$\rho(x)=-\frac{1-\mu}{\pi(1+\mu^2)}\int\limits_{-1}^{1}\left\{\frac{b_2}{a_1\sin(\theta\pi)}\left[\cos(\theta\pi)-\frac{a_1\sin(\theta\pi)}{2}+\left(\frac{a_1}{b_2}\right)^\theta\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^\theta\right]\frac{1}{a_1x+b_2s-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu a_1}{b_2\sin(\theta\pi)}\left[\cos(\theta\pi)-\frac{b_2\sin(\theta\pi)}{2}+\left(\frac{b_2}{a_1}\right)^\theta\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^\theta\right]\frac{1}{b_2x+a_1s-1}\right\}\rho(s)\,ds+R_5[\rho]+E_4(x), \tag{61}$$
где $x\in I,$ а
$$R_5[\rho]=R_4[\rho]-\frac{1-\mu}{\pi^2(1+\mu^2)}\int\limits_{-1}^{1}\left\{\frac{\pi}{\sin(\theta\pi)}\left[\left(\frac{2b_2}{1+a_1-b_2s}\right)^{1-\theta}-\left(\frac{b_2}{a_1}\right)^{1-\theta}\right]\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^\theta\frac{1}{a_1x+b_2s-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{\sin(\theta\pi)}\left[\left(\frac{2a_1}{1+b_2-a_1s}\right)^{1-\theta}-\left(\frac{a_1}{b_2}\right)^{1-\theta}\right]\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^\theta\frac{\mu}{b_2x+a_1s-1}+(1-x)^\theta B_0(x,s)\right\}\rho(s)\,ds$$
– регулярный оператор.

С учётом тождеств $a_1x+b_2s-1=b_2(s-1)+a_1(x-1),\ \ b_2x+a_1s-1=a_1(s-1)+b_2(x-1),$ сделав замену переменных $x=1-2e^{-y},\ \ s=1-2e^{-t},$ запишем уравнение (61) в виде
$$\rho(1-2e^{-y})e^{-y/2}=\frac{1-\mu}{b_2\pi\sin(\theta\pi)(1+\mu^2)}\int\limits_{0}^{\infty}\left\{k^{-1}[a_1^*+k^\theta e^{\theta(t-y)}]\frac{1}{ke^{-(y-t)/2}+e^{(y-t)/2}}+\right.$$

$$+\,\mu k[b_2^*+k^{-\theta}e^{\theta(t-y)}]\frac{1}{e^{-(y-t)/2}+ke^{(y-t)/2}}\biggr\}e^{-t/2}\rho(t)\,dt+e^{-y/2}R_5[\rho]+e^{-y/2}E_4(1-2e^{-y/2}),\quad (62)$$

где $0\leqslant y<\infty$ и $k=a_1/b_2$, $a_1^*=\cos(\theta\pi)-0.5a_1\sin(\theta\pi)$, $b_2^*=\cos(\theta\pi)-0.5b_2\sin(\theta\pi)$.

В обозначениях $\rho_1(y)=\rho(1-2e^{-y})e^{-y/2}$ и

$$K_0(x)=\frac{\sqrt{2/\pi}(1-\mu)}{b_2\sin(\theta\pi)(1+\mu^2)}\biggl\{\frac{k^{-1}[a_1^*+k^{\theta}e^{-\theta x}]}{ke^{-x/2}+e^{x/2}}+\frac{\mu k[b_2^*+k^{-\theta}e^{-\theta x}]}{e^{-x/2}+ke^{x/2}}\biggr\}\quad (63)$$

уравнение (62) примет вид

$$\rho_1(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\infty}K_0(y-t)\rho_1(t)\,dt+R_6[y]+E_5(y),\quad 0\leqslant y<\infty,\quad (64)$$

где $R_6[y]=e^{-y/2}R_5[\rho]$, $E_5(y)=e^{-y/2}E_4(y)$.

Уравнение (64) представляет собой интегральное уравнение Винера–Хопфа [15, с. 55; 16, 17]. Так как в (63) $0<\theta<1/2$, то функция $K_0(x)$ имеет показательный порядок убывания на бесконечности, причём $K_0'(x)\in C[0,\infty]$. Тогда $K_0(x)\in L_2\bigcap H_\alpha=\{0\}$ [15, с. 12].

3.5. Исследование интегрального уравнения Винера–Хопфа (64). Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свёртки применимы лишь в случае, когда индекс этих уравнений равен нулю. Индекс уравнения (64) совпадает с индексом выражения $1-K^\wedge(x)$, взятым с обратным знаком, т.е. $\chi=-\mathrm{Ind}\,(1-K^\wedge(x))$, здесь

$$K^\wedge(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_0(t)e^{ixt}\,dt=$$

$$=\frac{1-\mu}{b_2\pi\sin(\theta\pi)(1+\mu^2)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\biggl\{\frac{k^{-1}[a_1^*+k^{\theta}e^{-\theta t}]}{ke^{-t/2}+e^{t/2}}+\frac{\mu k[b_2^*+k^{-\theta}e^{-\theta t}]}{e^{-t/2}+ke^{t/2}}\biggr\}e^{ixt\theta}\,dt=$$

$$=-\frac{1-\mu}{b_2\pi\sin(\theta\pi)(1+\mu^2)}\biggl[\mu k^{1-\theta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\theta t}e^{ixt}\,dt}{ke^{t/2}+e^{-t/2}}+\mu kb_2^*\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixt}\,dt}{ke^{t/2}+e^{-t/2}}+$$

$$+\,k^{\theta-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\theta t}e^{ixt}\,dt}{e^{t/2}+ke^{-t/2}}+k^{-1}a_1^*\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixt}\,dt}{e^{t/2}+ke^{-t/2}}\biggr]=\frac{1-\mu}{b_2\pi\sin(\theta\pi)(1+\mu^2)}\times$$

$$\times\biggl[\mu k^{1-\theta}J(k,\theta;x)+\mu kb_2^*J(k,0;x)+k^{\theta-2}J\biggl(\frac{1}{k},\theta;x\biggr)+k^{-2}a_1^*J\biggl(\frac{1}{k},0;x\biggr)\biggr],\quad (65)$$

где

$$J(k,\theta;x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\theta t}e^{ixt}\,dt}{ke^{t/2}+e^{-t/2}}.$$

Вычислим интеграл Фурье (65) с помощью теории вычетов [15, с. 18]. Имеем

$$J(k,\theta;x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t/4}e^{-ixt}\,dt}{(ke^{t/2}+e^{-t/2})}=\frac{2\pi e^{-(\theta\pi+x\ln k)i}(1-e^{-2\pi x}e^{-2\theta\pi i})}{k^{0.5-\theta}e^{\pi x}(1-e^{-4\pi(x+\theta i)})}=$$

$$=\frac{2\pi e^{-ix\ln k}}{k^{0.5-\theta}(e^{\pi(x+\theta i)}+e^{-\pi(x+\theta i)})}=\frac{\pi e^{-ix\ln k}}{k^{0.5-\theta}\,\mathrm{ch}(\pi(x+\theta i))}=A(k,\theta;x)+iB(k,\theta;x),\quad (66)$$

где

$$A(k,\theta;x)=\frac{\pi[\cos(x\ln k)-\mathrm{tg}(\theta\pi)\sin(x\ln k)\,\mathrm{th}(\pi x)]}{k^{0.5-\theta}\cos(\theta\pi)\,\mathrm{ch}(\pi x)[1+\mathrm{tg}^2(\pi\theta)\,\mathrm{th}^2(\pi x)]},\tag{67}$$

$$B(k,\theta;x)=-\frac{\pi[\sin(x\ln k)+\mathrm{tg}(\theta\pi)\cos(x\ln k)\,\mathrm{th}(\pi x)]}{k^{0.5-\theta}\cos(\theta\pi)\,\mathrm{ch}(\pi x)[1+\mathrm{tg}^2(\pi\theta)\,\mathrm{th}^2(\pi x)]}.\tag{68}$$

В силу того, что $0<\theta<1/2$, $|\cos(x\ln k)|\leqslant 1$, $|\cos(x\ln k)|\leqslant 1$, $|\mathrm{th}(\pi x)|<1$, из равенств (67) и (68) вытекает оценка

$$\left.\begin{array}{l}|A(k,\theta;x)|\\|B(k,\theta;x)|\end{array}\right\}\leqslant\frac{\pi(1+\mathrm{tg}(\theta\pi))}{k^{0.5-\theta}\cos(\theta\pi)\,\mathrm{ch}(\pi x)},\tag{69}$$

причём $A(k,\theta;x)=O(1/\mathrm{ch}(\pi x))$, $B(k,\theta;x)=O(1/\mathrm{ch}(\pi x))$ для достаточно больших $|x|$.

Вследствие представлений (65) и (66) имеем $1-K^\wedge(x)=1-A^*(x)-iB^*(x)$, где

$$A^*(x)=\frac{1-\mu}{b_2\pi\sin(\theta\pi)(1+\mu^2)}\left[\mu k^{1-\theta}A(k,\theta;x)+\mu kb_2^*A(k,0;x)+k^{\theta-2}A\left(\frac{1}{k},\theta;x\right)+k^{-2}a_1^*A\left(\frac{1}{k},0;x\right)\right],$$

$$B^*(x)=\frac{-(1-\mu)}{b_2\pi\sin(\theta\pi)(1+\mu^2)}\left[\mu k^{1-\theta}B(k,\theta;x)+\mu kb_2^*B(k,0;x)+k^{\theta-2}B\left(\frac{1}{k},\theta;x\right)+k^{-2}a_1^*B\left(\frac{1}{k},0;x\right)\right].$$

Из определения функций $A^*(x)$ и $B^*(x)$ и оценки (69) следует, что

$$\left.\begin{array}{l}|A^*(x)|\\|B^*(x)|\end{array}\right\}\leqslant\frac{2(1-\mu)(1+\mathrm{tg}(\theta\pi))\sqrt{k}[(\mu(1+b_2^*)+(1+a_1^*)k^2)]}{b_2\sin(2\theta\pi)(1+\mu^2)\,\mathrm{ch}(\pi x)},\tag{70}$$

причём $A^*(x)=O(1/\mathrm{ch}(\pi x))$, $B^*(x)=O(1/\mathrm{ch}(\pi x))$ для достаточно больших $|x|$.

Так как $\mathrm{tg}(\theta\pi)=(1+\mu)/(1-\mu)$, то

$$\left|\frac{(1-\mu)(1+\mathrm{tg}(\theta\pi))}{\sin(2\theta\pi)}\right|=\frac{2(1+\mu^2)}{(1-\mu^2)}.$$

Отсюда и из оценки (70) с учётом того, что $k=a_1/b_2=(c_1-c)/(1-c_1)$ и $\mathrm{ch}(\pi x)\geqslant 1$, в силу условия (12) теоремы 2 вытекает неравенство

$$\left.\begin{array}{l}|A^*(x)|\\|B^*(x)|\end{array}\right\}\leqslant\frac{4}{(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{c_1-c}{1-c_1}}\left(\mu(1+b_2^*)+\left(\frac{1-c_1}{c_1-c}\right)^2(1+a_1^*)\right)<1.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Re}\,(1-K^\wedge(x))=1-A^*(x)>0.\tag{71}$$

Индекс χ уравнения (64), т.е. изменение аргумента комплекснозначной функции $1-K^\wedge(x)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах и взятое с обратным знаком [15, с. 28, с. 56], с учётом неравенства (71) равен

$$\chi=-\mathrm{Ind}\,(1-K^\wedge(x))=-\frac{1}{2\pi}[\arg(1-K^\wedge(x))]_{-\infty}^{\infty}=-\frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,(1-K^\wedge(x))}{\mathrm{Re}\,(1-K^\wedge(x))}\right]_{-\infty}^{\infty}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{-B^*(x)}{1-A^*(x)}\right]_{-\infty}^{\infty}=-\frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{0}{1}-\mathrm{arctg}\,\frac{0}{1}\right]=0,$$

так как $A^*(\pm\infty)=0$, $B^*(\pm\infty)=0$. Следовательно, уравнение (64) однозначно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи TF. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа. М.; Л., 1947.
2. *Франкль Ф.И.* Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20. № 2. С. 196–202.
3. *Девингталь Ю.В.* О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И. Франкля // Изв. вузов. Математика. 1958. № 2 (3). С. 39–51.
4. *Линь Цзянь-бин.* О некоторых задачах Франкля // Вестн. Ленингр. гос. ун-та. Математика, механика и астрономия. 1961. Т. 3. № 13. С. 28–39.
5. *Капустин Н.Ю., Сабитов К.Б.* О решении одной проблемы в теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 60–68.
6. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М., 1985.
7. *Жегалов В.И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на переходной линии // Учен. зап. Казанск. ун-та. 1962. Т. 122. № 3. С. 3–16.
8. *Нахушев А.М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 44–59.
9. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент, 2005.
10. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
11. *Бабенко К.И.* К теории уравнений смешанного типа: дис. … д-ра физ.-мат. наук. М., 1952.
12. *Мирсабуров М.* Задача с аналогами условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 6. С. 778–788.
13. *Михлин С.Г.* Об интегральном уравнении F. Trikomi // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. № 6. С. 1053–1056.
14. *Мирсабуров М., Хуррамов Н.* Задача с условием Бицадзе–Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1073–1094.
15. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.Н.* Уравнения типа свертки. М., 1978.
16. *Полосин А.А.* Об однозначной разрешимость задачи Трикоми для специальной области // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 3. С. 394–401.
17. *Мирсабуров М.* Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 9. С. 1281–1284.

Термезский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 27.07.2020 г.
После доработки 27.04.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.