ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 6, с. 752–768

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.8+517.956.328

О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ И ФУНКЦИЯХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА В ОБЛАСТИ С ДЫРЧАТЫМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

© 2021 г. С. А. Назаров

Найдена асимптотика собственных пар спектральных задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в области, разделённой несколькими перегородками с отверстиями малых диаметров и распадающейся на несколько независимых ячеек в пределе при стремлении диаметров к нулю. При помощи асимптотических методов, обслуживающих сингулярно возмущённые области, изучены расщепление кратного собственного числа предельных задач, например, нулевого при краевых условиях Неймана, и локализация собственной функции в случае простого собственного числа.

DOI: 10.31857/S0374064121060042

1. Исходная и предельные задачи. Пусть Ω – ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$. Систему декартовых координат $x=(y,z)\in\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}$ выберем так, чтобы отрезок $\Upsilon=(z^0,z^J)$ оси $z=x_d$ лежал внутри области Ω, а его концевые точки – на её границе $\partial\Omega$. Точками $z^1<\ldots<z^{j-1}$ разобьём Υ на меньшие отрезки, а “перегородками”

$$\Theta_j=\{x\in\Omega:\ z=z^j\},\quad j=\overline{1,J-1},$$

область Ω – на “ячейки” $\omega_1,\ \ldots,\ \omega_J$, которые считаем (связными) областями с липшицевыми границами. На каждом сечении Θ_j, $j=\overline{1,J-1}$, зафиксируем точку $x^j=(y^j,z^j)$ и образуем вокруг неё мелкое отверстие

$$\theta_j^\varepsilon=\{x:\eta^j:=\varepsilon^{-1}(y-y^j)\in\theta_j,\ \ z=z^j\},\quad j=\overline{1,J-1}. \tag{1}$$

Здесь θ_j – области в $\mathbb{R}^{d-1}$ с липшицевыми границами $\partial\theta_j$ и компактными замыканиями $\overline{\theta_j}=\theta_j\bigcup\partial\theta_j$, $\varepsilon>0$ – малый параметр, а число $\varepsilon_0>0$ таково, что $\overline{\theta_j^\varepsilon}\subset\Theta_j$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

В области (рис. 1, а)

$$\Omega^\varepsilon=\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{J-1}(\Theta_j\setminus\overline{\theta_j^\varepsilon})$$

рассмотрим для уравнения

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x)=\lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x),\quad x\in\Omega^\varepsilon, \tag{2}$$

спектральные задачи Дирихле

$$u^\varepsilon(x)=0,\quad x\in\partial\Omega^\varepsilon, \tag*{(2)$_D$}$$

и Неймана

$$\partial_\nu u^\varepsilon(x)=0,\quad x\in\partial\Omega^\varepsilon. \tag*{(2)$_N$}$$

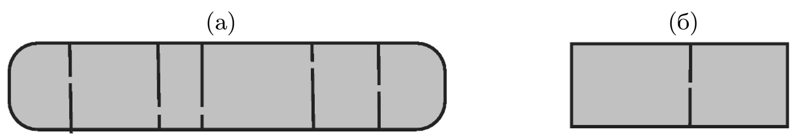

Рис. 1. Область с дырчатыми перегородками (а) и перегородка в цилиндре с одной дыркой (б).

Здесь $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ – оператор Лапласа, $\nabla_x = \mathrm{grad}$, ∂_ν – производная вдоль внешней нормали, λ^ε – спектральный параметр.

Из-за возможных иррегулярностей собственных функций u^ε нужна обобщённая постановка задач (2), $(2)_D$ и (2), $(2)_N$ как интегральных тождеств [1, гл. 2, § 2 и 5]

$$(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad \text{для всех} \quad \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon_M. \tag{3}$$

Здесь $(\,\cdot\,,\cdot\,)_{\Omega^\varepsilon}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega^\varepsilon)$, индекс M здесь и далее принимает значения D и N, $\mathcal{H}^\varepsilon_N = H^1(\Omega^\varepsilon)$ – пространство Соболева, а $\mathcal{H}^\varepsilon_D = H^1_0(\Omega^\varepsilon)$ – его подпространство, выделенное условием Дирихле $(2)_D$ на $\partial\Omega^\varepsilon$.

Ввиду компактности вложения $H^1(\Omega^\varepsilon) \subset L^2(\Omega^\varepsilon)$ задача (3) (или (2), $(2)_D$ и (2), $(2)_N$) имеет дискретный спектр, который образует неограниченную монотонную последовательность

$$0 \leqslant \lambda^\varepsilon_{M1} < \lambda^\varepsilon_{M2} \leqslant \lambda^\varepsilon_{M3} \leqslant \ldots \leqslant \lambda^\varepsilon_{Mn} \leqslant \ldots \to +\infty, \tag{4}$$

составленную с учётом кратностей собственных чисел. Соответствующие собственные функции $u^\varepsilon_{M1}, u^\varepsilon_{M2}, u^\varepsilon_{M3}, \ldots, u^\varepsilon_{Mn}, \ldots \in \mathcal{H}^\varepsilon_M$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u^\varepsilon_{Mn}, u^\varepsilon_{Mm})_{\Omega^\varepsilon} = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

где $\delta_{m,n}$ – символ Кронекера. Даже в случае гладких поверхностей $\partial\Omega$ и $\partial\theta_1, \ldots, \partial\theta_{J-1}$ функции u^ε_{Mn}, вообще говоря, не принадлежат пространству Соболева $H^2(\Omega^\varepsilon)$ из-за известных корневых сингулярностей градиента $\nabla_x u^\varepsilon_{Mn}$ на рёбрах трещин (1) (см., например, [2; гл. 2 и 10]). Первое собственное число λ^ε_{M1} простое, причём $\lambda^\varepsilon_{D1} > 0$ и

$$\lambda^\varepsilon_{N1} = 0, \quad u^\varepsilon_{N1} = |\Omega^\varepsilon|^{-1/2}, \tag{6}$$

где $|\Omega^\varepsilon|$ – объём тела Ω^ε.

Основная цель статьи – построить асимптотику нескольких собственных пар $\{\lambda^\varepsilon_{Mn}, u^\varepsilon_{Mn}\}$. Сама работа инициирована публикацией [3], в которой изучена первая собственная функция задачи Дирихле на двух соосных цилиндрах с одинаковым сечением (рис. 1, б), соединённых через малое отверстие θ^ε_1 (случай $J = 2$ для областей ω_1 и ω_2 частной формы). При этом собственная функция раскладывается на цилиндрах в ряды Фурье, которые посредством весьма громоздких вычислений согласуются на малом множестве θ^ε_1. Этот неоправданно тяжеловесный подход назван в [3] "мощным методом", который может быть применён и в "нецилиндрических областях с вращательной симметрией". Между тем более тридцати лет назад были разработаны общие асимптотические методы исследования статических и спектральных, скалярных и векторных эллиптических краевых задач в областях с разнообразными сингулярно возмущёнными границами (см. монографии [4–6] и др.). Очень близкими по тематике являются давние статьи [7–9], в которых используется метод сращиваемых разложений [10, 5] и конструируются полные асимптотические разложения решений спектральных задач для эллиптических уравнений второго порядка со сменой краевых условий на малых участках границы.

В данной работе применяется метод составных разложений (см. статьи [11–14], монографии [4, 6] и др.) к задачам в областях общих форм с произвольно перфорированными перегородками. Помимо упомянутой в [3] локализации собственной функции u^ε_{D1} в случае простого, не обязательно первого, как в [3], собственного числа задач Дирихле и Неймана на ячейках ω_j (см. п. 4), внимание уделяется кратным собственным числам, для которых в первую очередь требуется построить младшие члены асимптотики и тем самым показать, как они (числа) расцепляются при $\varepsilon > 0$.

Конкретизация асимптотических процедур [12, 4] для задач (2), $(2)_D$ и (2), $(2)_N$ требует детального описания характеристик предельных ($\varepsilon = 0$) задач. В п. 2 вводится несколько используемых в работе классических объектов гармонического анализа. В п. 3 изучается поведение при $\varepsilon \to +0$ первых J собственных пар задачи Неймана – построение и обоснование асимптотик описано во всех деталях. Схема анализа повторяется с упрощениями в п. 4 для возмущённого простого собственного числа предельных задач Дирихле в $\Omega^0 = \omega_1 \bigcup \ldots \bigcup \omega_J$, однако для сокращения объёма статьи обстоятельно рассматриваются только интересные для приложений случаи $d = 2$ и $d = 3$. Наконец, в п. 5 обсуждаются доступные обобщения и общие свойства спектральных пар в областях с перфорированными перегородками.

Перечислим возникающие предельные задачи. При $\varepsilon = 0$ отверстия $\theta_1^\varepsilon, \ldots, \theta_{J-1}^\varepsilon$ исчезают и исходная задача распадается на J независимых спектральных задач

$$-\Delta_x u^{j0}(x) = \lambda^{j0} u^{j0}(x), \quad x \in \omega_j, \tag{7}$$

$$u^{j0}(x) = 0, \quad x \in \partial\omega_j, \quad j = \overline{1, J}, \tag*{$(7)_D$}$$

или

$$\partial_\nu u^{j0}(x) = 0, \quad x \in \partial\omega_j, \quad j = \overline{1, J}. \tag*{$(7)_N$}$$

Их собственные числа образуют последовательности

$$0 \leqslant \lambda_{M1}^{j0} < \lambda_{M2}^{j0} \leqslant \lambda_{M3}^{j0} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{Mn}^{j0} \leqslant \ldots \to +\infty, \tag{8}$$

а соответствующие собственные функции $u_{M1}^{j0}, u_{M2}^{j0}, u_{M3}^{j0}, \ldots, u_{Mn}^{j0}, \ldots \in \mathcal{H}_M^0(\omega_j)$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{Mn}^{j0}, u_{Mm}^{j0})_{\omega_j} = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Понятно, что $\lambda_{D1}^{j0} > 0$, а для задачи Неймана верны формулы

$$\lambda_{N1}^{j0} = 0, \quad u_{N1}^{j0} = |\omega_j|^{-1/2}. \tag{10}$$

Задачи (7), $(7)_D$ и (7), $(7)_N$ нуждаются в обобщённой постановке [1, гл. 2, § 2 и 5], однако соответствующие интегральные тождества приводить не будем ввиду их очевидности и простоты.

Ещё одно семейство предельных задач появляется в результате растяжений координат

$$x \mapsto \xi^j = (\eta^j, \zeta^j) = (\varepsilon^{-1}(y - y^j), \varepsilon^{-1}(z - z^j)), \tag{11}$$

где $j = \overline{1, J-1}$. Замена (11) и формальный переход к $\varepsilon = 0$ превращают конечную область Ω^ε в два полупространства $\mathbb{R}^d_\pm = \{\xi^j : \pm\zeta^j > 0\}$, соединённых через отверстие $\theta_j(0) = \theta_j \times \{0\}$ в стенке $\partial\mathbb{R}^d_\pm$:

$$\Xi^j = \mathbb{R}^d_- \bigcup \theta_j(0) \bigcup \mathbb{R}^d_+. \tag{12}$$

Поскольку $\Delta_x + \lambda = \varepsilon^{-2}\Delta_{\xi^j} + \lambda$, главным членом оператора Гельмгольца в быстрых переменных ξ^j служит оператор Лапласа, т.е. предельная задача в области (12) выглядит так:

$$-\Delta_{\xi^j} w^{j0}(\xi^j) = 0, \quad \xi^j \in \Xi^j, \tag{13}$$

$$w^{j0}(\eta^j, \pm 0) = 0 \quad \text{при} \quad \eta^j \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus \overline{\theta_j} \tag*{$(13)_D$}$$

или

$$\mp\partial_{\zeta^j} w^{j0}(\xi^j) = 0 \quad \text{при} \quad \eta^j \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus \overline{\theta_j}. \tag*{$(13)_N$}$$

В асимптотических конструкциях будут востребованы специальные решения однородных задач (13), $(13)_D$ и (13), $(13)_N$, описываемые в следующем пункте.

2. Вспомогательные объекты. 1°. *Ёмкость.* Пусть $d \geqslant 3$ (см. замечание в конце п. 3 по поводу плоской задачи). Ёмкостной потенциал P_j – затухающее при $|\xi^j| \to \infty$ решение задачи Дирихле во внешности трещины $\theta_j(0) = \{\xi^j : \eta^j \in \theta_j, \zeta^j = 0\}$

$$-\Delta_{\xi^j} P_j(\xi^j) = 0, \quad \xi^j \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\theta_j(0)}, \quad P_j(\xi^j) = 1, \quad \xi^j \in \overline{\theta_j(0)}. \tag{14}$$

Справедливо асимптотическое представление

$$P_j(\xi^j) = C(\theta_j)\Phi(\xi^j) + O(|\xi^j|^{1-d}) \quad \text{при} \quad |\xi^j| \to +\infty, \tag{15}$$

в котором $\Phi(\xi^j) = |\xi^j|^{2-d}\Phi(|\xi^j|^{-1}\xi^j)$ – фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$, а $C(\theta_j) = \|\nabla_{\xi^j} P_j; L^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\theta_j(0)})\|^2 > 0$ – коэффициент, пропорциональный гармонической емкости $\operatorname{cap}_d(\theta_j)$ множества $\overline{\theta_j(0)}$ (см. монографии [15, 16] и др.). Функция P_j чётная относительно переменной $\zeta^j = \xi^j_d$, а значит, гармоническая функция W_j, определённая равенством

$$W_j(\xi^j) = 1 - P_j(\xi^j), \quad \zeta^j > 0, \quad W_j(\xi^j) = -1 + P_j(\xi^j), \quad \zeta^j < 0, \tag{16}$$

является нечётной по ζ^j и гладкой в области Ξ^j вплоть до границы вне ребра $\partial\theta^j \times \{0\}$, а также удовлетворяет задаче Неймана (13), $(13)_N$.

2°. *Тензор виртуальной массы.* При $d \geqslant 2$ задача Неймана во внешности трещины

$$-\Delta_{\xi^j} Q_j(\xi^j) = 0, \quad \xi^j \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\theta_j(0)},$$

$$\mp\partial_{\zeta^j} Q_j(\eta^j, \pm 0) = \pm 1, \quad \eta^j \in \theta_j(0), \tag{17}$$

имеет затухающее на бесконечности решение, допускающее асимптотическое представление

$$Q_j(\xi^j) = M(\theta_j)\partial_{\zeta^j}\Phi(\xi^j) + O(|\xi^j|^{-d}) \quad \text{при} \quad |\xi^j| \to \infty, \tag{18}$$

в котором $M(\theta_j) = \|\nabla_{\xi^j} Q_j; L^2\mathbb{R}^d \setminus \overline{\theta_j(0)})\|^2$ – положительный коэффициент, зависящий от формы трещины. Линейно растущее решение $\zeta^j + Q_j(\xi^j)$ однородной задачи Неймана (17) – классический объект гармонического анализа [15, приложение G], а $M(\theta_j)$ – единственный ненулевой элемент матрицы (тензора) виртуальной массы, поскольку в случае прямой трещины $\theta_j(0)$ другие решения с линейным ростом – мономы $\xi^j_p = \eta^j_p$, $p = \overline{1, d-1}$, – полностью удовлетворяют задаче Неймана. В пространственном случае $d = 3$ коэффициент $M(\theta_j)$ известен, например, для эллиптической трещины, а в плоском имеет место равенство $M(\theta_j) = \pi L_j^2/8$, где L_j – длина трещины θ_j, которое находится при помощи конформного преобразования Жуковского и издавна используется в механике трещин (см. монографии [17, гл. XI; 18, гл. 12] и др.).

Функция Q_j нечётна по переменной ζ^j, но далее понадобится чётная гладкая в Ξ^j функция W_j, являющаяся решением задачи Дирихле (13), $(13)_D$:

$$W_j(\xi^j) = \zeta^j + Q_j(\xi^j) \quad \text{при} \quad \zeta^j > 0, \quad W_j(\xi^j) = -\zeta^j - Q_j(\xi^j) \quad \text{при} \quad \zeta^j < 0. \tag{19}$$

3°. *Матрица.* Пусть $T = T^1 + \ldots + T^J$, где T^j – блочно-диагональная $J \times J$-матрица с единственным ненулевым 2×2-блоком в строках и столбцах с номерами j и $j+1$

$$\begin{pmatrix} C_j\tau_j^2 & -C_j\tau_j \\ -C_j\tau_j & C_j \end{pmatrix}, \quad C_j > 0, \quad \tau_j > 0, \quad j = \overline{1, J-1}. \tag{20}$$

Лемма 1. *Матрица T положительная, и её (одномерное) корневое пространство натянуто на столбец $t = (t_1, \ldots, t_J)^{\mathrm{т}}$ ($^{\mathrm{т}}$ – знак транспонирования) с компонентами $t_1 = 1$ и $t_j = \tau_1 \times \ldots \times \tau_{j-1}$, $j = \overline{2, J}$.*

Доказательство. Поскольку блоки (20) – положительные симметричные матрицы, равенство $a^{\mathrm{т}}Ta = 0 \in \mathbb{R}^J$ для столбца $a \in \mathbb{R}^J$ означает, что $T^1a = 0, \ \ldots, \ T^Ja = 0$. Нужное утверждение вытекает из записанных покомпонентно последних равенств:

$$C_j\tau_j^2 a_j - C_j\tau_j a_{j+1} = 0, \quad -C_j\tau_j a_j + C_j a_{j+1} = 0,$$

откуда следует, что $a_{j+1} = \tau_j a_j$. Лемма доказана.

3. Собственные числа задачи Неймана. Конечно же, далее речь пойдёт только о возмущении положительных собственных чисел задачи (2), $(2)_N$ (ср. собственные пары (10) и (6)). Кроме того, считаем, что $d \geqslant 3$, а двумерный случай обсудим в замечании в конце этого пункта.

В качестве основного асимптотического приближения к собственной функции $u_k^\varepsilon := u_{Nk}^\varepsilon$, отвечающей собственному числу

$$\lambda_k^\varepsilon := \lambda_{nk}^\varepsilon = 0 + \varepsilon^{d-2}\lambda_k' + \widetilde{\lambda}_k^\varepsilon, \tag{21}$$

возьмём кусочно-постоянную функцию u_k^0, т.е.

$$u_k^0(x) = a_j^k, \quad x \in \omega_j, \quad j = \overline{1, J}, \quad a^k = (a_1^k, \ldots, a_J^k)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^J. \tag{22}$$

Числа λ_k' и столбцы a^k подлежат определению, а малые остатки $\widetilde{\lambda}_k^\varepsilon$ – оцениванию, но, разумеется, $\lambda_1' = \widetilde{\lambda}_1^\varepsilon = 0$ и $a_1^1 = \ldots = a_J^1 = |\Omega^0|^{-1/2}$.

Скачки функции (22) на отверстиях (1) компенсируем при помощи слагаемых типа пограничного слоя

$$\chi_j(x)w_{kj}'(\xi^j) := \frac{1}{2}(a_j - a_{j-1})\chi_j(x)\mathbf{w}_j(\xi^j), \quad j = \overline{1, J-1}, \tag{23}$$

где $\chi_j(x) = \chi(r_j)$ и $r_j = |x - x^j|$. Кроме того, $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ – срезающая функция с малым носителем, равная единице в окрестности начала координат и служащая для локализации пограничного слоя, а $\mathbf{w}_j$ – функция, имеющая скачок -2 на множестве $\theta_j(0)$ и определяемая при помощи гармонической функции (16) равенствами

$$\mathbf{w}_j(\xi^j) = W_j(\xi^j) - 1 \quad \text{при} \quad \zeta^j > 0, \quad \mathbf{w}_j(\xi^j) = W_j(\xi^j) + 1 \quad \text{при} \quad \zeta^j < 0. \tag{24}$$

В качестве поправочных слагаемых члена регулярного типа $\varepsilon^{d-2}u_k'$ возьмём функцию со скачками на отверстиях (1), но принадлежащую пространствам $H^1(\omega_j)$, $j = \overline{1, J}$. К $u_k^0 + \varepsilon^{d-2}u_k'$ добавим сумму выражений (23) и подставим результат в задачу (2), $(2)_N$ со спектральным параметром (21). При учёте соотношения $\Phi(\xi^j) = \varepsilon^{d-2}\Phi(x - x^j)$ и представлений (16), (15) для функций (24) соберём члены порядка ε^{d-2}. В итоге получим предельные задачи

$$-\Delta_x u_k'(x) = \lambda_k' u_k^0(x) + f_{kj}'(x), \quad x \in \omega_j,$$

$$\partial_\nu u_k'(x) = 0, \quad x \in \partial\omega_j, \tag{25}$$

с однородными условиями Неймана (поскольку $\partial_\nu \chi_j = 0$ на $\partial\Theta_j$) и следующими фрагментами правых частей уравнений Пуассона:

$$f_{kj}'(x) = \frac{1}{2}(a_{j+1} - a_j)C(\theta_j)[\Delta_x, \chi_j(x)]\Phi(x - x^j) -$$

$$- \frac{1}{2}(a_j - a_{j-1})C(\theta_{j-1})[\Delta_x, \chi_{j-1}(x)]\Phi(x - x^{j-1}). \tag{26}$$

Подчеркнём, что при $j = 1$ и $j = J$ выражения в (26) содержат только по одному члену, и достаточно в (26) положить $C(\theta_0) = 0$ и $C(\theta_J) = 0$ для несуществующих отверстий θ_0^ε и θ_J^ε. Далее аналогичные и понятные упрощения формул отдельно оговаривать не будем.

Поскольку по предназначению фундаментального решения выполнено равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} [\Delta_x, \chi_j(x)]\Phi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{S}_R} \partial_{|x|}\Phi(x)\,ds_x = -1, \tag{27}$$

где $\mathbb{S}_R$ – сфера большого радиуса $R > 0$, условия разрешимости $\int_{\omega_j} f'_{kj}(x)\,dx = 0$ задач Неймана (25) превращаются в соотношения

$$\lambda'_k |\omega_j| a^k_j = \frac{1}{4}(a_j - a_{j-1})C(\theta_{j-1}) - \frac{1}{4}(a_{j+1} - a_j)C(\theta_j), \quad j = \overline{1, J}, \tag{28}$$

где замена $1/2 \mapsto 1/4$ (ср. формулы (26) и (28)) обусловлена тем, что в отличие от (27) интегрирование ведётся по полусфере. В итоге получена система J линейных уравнений

$$Ta^k = \lambda'_k Ba^k, \tag{29}$$

где T – $J \times J$-матрица, составленная из диагональных 2×2-блоков (20), в которых $\tau_j = 1$ и $C_j = C(\theta_j)/4$, а $B = \operatorname{diag}\{|\omega_1|, \ldots, |\omega_J|\}$ – диагональная $J \times J$-матрица. В силу леммы 1 алгебраическая система (29) имеет собственные числа

$$0 = \lambda'_1 < \lambda'_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_J, \tag{30}$$

а соответствующие собственные векторы $a^1, \ldots, a^J \in \mathbb{R}^J$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(a^\ell)^{\mathrm{T}} Ba^k = \delta_{k,\ell}, \quad k, \ell = \overline{1, J}. \tag{31}$$

Компоненты особенного столбца a^1 указаны после формулы (22).

Итак, найдены все выделенные члены асимптотических анзацев для собственных пар задачи (2), $(2)_N$. Обоснование асимптотики начнём с простого утверждения.

Лемма 2. *На сегменте $[0, \Lambda_N)$ с концевой точкой $\Lambda_N = \max\{\lambda^{10}_{N2}, \ldots, \lambda^{J0}_{N2}\}$ (см. последовательности (7_N)) расположено не более J собственных чисел задачи (2), $(2)_N$.*

Доказательство. Применим максиминимальный принцип (см. [19, теорема 10.2.2])

$$\lambda^\varepsilon_{Mm} = \max_{\mathcal{E}^\varepsilon_{Mm}} \inf_{\psi^\varepsilon \in \mathcal{E}^\varepsilon_{Mm} \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla_x \psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2}{\|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{32}$$

где $\mathcal{E}^\varepsilon_{Mm}$ – любое подпространство в $\mathcal{H}^\varepsilon_M$ с коразмерностью $m-1$, в частности, $\mathcal{E}^\varepsilon_{M1} = \mathcal{H}^\varepsilon_M$. В качестве пробного подпространства при $m = J+1$ и $M = N$ возьмём

$$\mathcal{E}^\perp_{NJ+1} = \{\psi^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon) : (\psi^\varepsilon, 1)_{\omega_j} = 0, \quad j = \overline{1, J}\}. \tag{33}$$

На ячейках $\omega_1, \ldots, \omega_J$ в силу условий ортогональности из определения (33) выполняются неравенства Пуанкаре, а значит, для функции $\psi^\varepsilon \in \mathcal{E}^\perp_{NJ+1}$ справедливы неравенства

$$\|\nabla_x \psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \geqslant \sum_{j=1}^{J} \lambda^{j0}_{N2} \|\psi^\varepsilon; L^2(\omega_j)\|^2 \geqslant \Lambda_N \|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2. \tag{34}$$

Учитывая (33) и (34) в формуле (32) с $m = J+1$ и $M = N$, уменьшаем максимум и оцениваем снизу инфимум величиной Λ_N, которая тем самым оказывается меньше $\lambda^\varepsilon_{NJ+1}$. Лемма доказана.

Введём в пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon = H^1(\Omega^\varepsilon)$ (индекс N не пишем) скалярное произведение

$$\langle v^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle = (\nabla_x v^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} + (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \tag{35}$$

и положительный самосопряжённый оператор $\mathcal{K}^\varepsilon$,

$$\langle \mathcal{K}^\varepsilon v^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle = (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad \text{для всех} \quad v^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon. \tag{36}$$

В результате интегральное тождество (3) преобразуется в абстрактное уравнение с новым спектральным параметром, а именно,

$$\mathcal{K}^\varepsilon \mathcal{U}^\varepsilon = \kappa^\varepsilon \mathcal{U}^\varepsilon \quad \text{в} \quad \mathcal{H}^\varepsilon, \quad \text{где} \quad \kappa^\varepsilon = (1 + \lambda^\varepsilon)^{-1}.$$

Справедливость следующего утверждения, известного [11] как лемма о “почти собственных” числах и векторах, обеспечена спектральным разложением резольвенты (см., например, [19, гл. 6]).

Лемма 3. *Пусть для* $\mathbf{v}^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ *и* $\mathbf{k}^\varepsilon \in \mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ *выполнены соотношения*

$$\|\mathbf{v}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathcal{K}^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{k}^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| =: h \in (0, \mathbf{k}^\varepsilon). \tag{37}$$

Тогда у оператора $\mathcal{K}^\varepsilon$ *имеется собственное число* κ^ε, *удовлетворяющее неравенству* $|\kappa^\varepsilon - \mathbf{k}^\varepsilon| \leqslant h$. *Более того, для любого* $\mathbf{h} \in (h, \mathbf{k}^\varepsilon)$ *найдутся такие коэффициенты* $\mathbf{c}^\varepsilon_{\mathcal{N}^\varepsilon}, \ldots, \mathbf{c}^\varepsilon_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}$, *что*

$$\left\|\mathbf{v}^\varepsilon - \sum_{p=\mathcal{N}^\varepsilon}^{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1} \mathbf{c}^\varepsilon_p \mathcal{U}^\varepsilon_p; \mathcal{H}^\varepsilon\right\| \leqslant 2\frac{h}{\mathbf{h}}, \quad \sum_{p=\mathcal{N}^\varepsilon}^{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1} |\mathbf{c}^\varepsilon_p|^2 = 1. \tag{38}$$

При этом $\{\kappa^\varepsilon_{\mathcal{N}^\varepsilon}, \ldots, \kappa^\varepsilon_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}\}$ *– набор всех собственных чисел оператора* $\mathcal{K}^\varepsilon$ *на замкнутом сегменте* $[\mathbf{k}^\varepsilon - \mathbf{h}, \mathbf{k}^\varepsilon + \mathbf{h}]$, *а соответствующие собственные векторы* $\mathcal{U}^\varepsilon_{\mathcal{N}^\varepsilon}, \ldots, \mathcal{U}^\varepsilon_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}$ *подчинены условиям ортогональности и нормировки*

$$\langle \mathcal{U}^\varepsilon_p, \mathcal{U}^\varepsilon_q \rangle = \delta_{p,q}, \quad p, q = \overline{\mathcal{N}^\varepsilon, \mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}. \tag{39}$$

В качестве “почти собственных” пар оператора $\mathcal{K}^\varepsilon$ возьмём пары

$$\mathbf{k}^\varepsilon_k = (1 + \varepsilon^{d-2}\lambda'_k)^{-1}, \quad \mathbf{v}^\varepsilon_k = \|\mathbf{u}^\varepsilon_k; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1}\mathbf{u}^\varepsilon_k, \tag{40}$$

где

$$\mathbf{u}^\varepsilon_k(x) = u^0_k(x) + \varepsilon^{d-2}X^\varepsilon(x)u'_k(x) + \sum_{j=1}^{J-1}\chi_j(x)w'_{kj}\left(\frac{x - x^j}{\varepsilon}\right), \quad X^\varepsilon(x) = 1 - \sum_{j=1}^{J-1}\chi\left(\frac{r_j}{2R\varepsilon}\right). \tag{41}$$

Здесь $u'_k \in H^1(\Omega^0)$ – какое-либо решение задач (25), существующее в силу равенств (28), а срезка X^ε введена для уничтожения скачков функции u'_k на отверстиях, т.е. размер $R > 0$ выбран так, что $X^\varepsilon = 0$ на $\theta^\varepsilon_1 \bigcup \ldots \bigcup \theta^\varepsilon_{J-1}$. В результате $\mathbf{u}^\varepsilon_k \in \mathcal{H}^\varepsilon_N$. Отметим, что функция u'_k гладкая внутри ячеек ω_j вплоть до прямых участков Θ_j и Θ_{j-1} их границ. Благодаря соотношению (31) и затуханию членов пограничного слоя получаем, что

$$|\langle \mathbf{u}^\varepsilon_k, \mathbf{u}^\varepsilon_\ell \rangle - \delta_{k,\ell}| = |\langle \mathbf{u}^\varepsilon_k, \mathbf{u}^\varepsilon_\ell \rangle - (a^\ell)^{\mathrm{T}} B a^k| = |\langle \mathbf{u}^\varepsilon_k, \mathbf{u}^\varepsilon_\ell \rangle - (u^0_k, u^0_\ell)_{\Omega^\varepsilon}| \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \left(\left(1 + \varepsilon^{d-2} + \sum_{j=1}^{J-1} \frac{\chi(r_j)}{(1 + \varepsilon r_j)^{d-2}}\right)^2 - 1\right) dx \leqslant C\varepsilon^{d-2}. \tag{42}$$

Теперь оценим величину h из (37) для конкретной пары (40) – обозначим эту величину h_k. Согласно определениям (35) и (36) имеем

$$h_k = \sup |\langle \mathcal{K}^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon - \mathbf{k}^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle| =$$

$$= (1 + \varepsilon^{d-2}\lambda'_k)^{-1} \|\mathbf{u}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup |(\nabla_x \mathbf{u}^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - \varepsilon^{d-2}\lambda'_k(\mathbf{u}^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}|; \tag{43}$$

здесь супремум вычисляется по всем функциям $\psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$, для которых $\|\psi^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1$. В силу одномерного неравенства Харди, записанного в радиальной переменной $r_j = |x - x^j|$ и проинтегрированного по угловым переменным, при $d \geqslant 3$ выполнена весовая оценка

$$\|(\varepsilon + r_j)^{-1}\psi^\varepsilon; L^2(\omega_j \bigcup \omega_{j-1})\| \leqslant c\|\psi^\varepsilon; H^1(\omega_j \bigcup \omega_{j-1})\|. \tag{44}$$

Разность скалярных произведений в $L^2(\Omega^\varepsilon)$ под знаком модуля в (43) представим как сумму выражений

$$I_j^u(\psi^\varepsilon), \quad S_j^u(\psi^\varepsilon), \quad j=\overline{1,J}, \quad I_\ell^w(\psi^\varepsilon), \quad S_\ell^w(\psi^\varepsilon), \quad \ell=\overline{1,J-1}. \tag{45}$$

Укажем и преобразуем каждое из них. Прежде всего верны равенства

$$\varepsilon^{2-d} I_j^u(\psi^\varepsilon) = (\nabla_x u_k', \nabla_x(X^\varepsilon \psi^\varepsilon))_{\omega_j} + \lambda_k'(a_j^k, X^\varepsilon\psi^\varepsilon)_{\omega_j}, \tag{46}$$

$$\varepsilon^{2-d} S_j^u(\psi^\varepsilon) = (u_k'\nabla_x X^\varepsilon, \nabla_x\psi^\varepsilon)_{\omega_j} - (\nabla_x u_k', \psi^\varepsilon\nabla_x X^\varepsilon)_{\omega_j} + \\ + \lambda_k' a_j^k(1-X^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\omega_j} + \varepsilon^{d-2}\lambda_k'(X^\varepsilon u_k', \psi^\varepsilon)_{\omega_j}. \tag{47}$$

Первые два слагаемых в правой части равенства (47) появились в результате переноса срезки X^ε от u_k' к ψ^ε и сопутствующего коммутирования с оператор-градиентом, а третье – из-за введения множителя X^ε в последнее скалярное произведение из (46). Примем во внимание неравенства $|u_k'(x)| + |\nabla_x u_k'(x)| \leqslant \mathbf{n}_j'$ при $x \in \overline{\omega_j} \bigcap (\operatorname{supp}\chi_j \bigcup \operatorname{supp}\chi_{j-1})$ с некоторой мажорантой $\mathbf{n}_j'$ (напоминаем, что u_k' — гладкая функция вблизи прямых участков Θ_j и Θ_{j-1} границы $\partial\omega_j$), а также соотношение $\mathbf{r}_j = \min\{r_j, r_{j-1}\} \leqslant c\varepsilon$ на пересечении ячейки ω_j и множества $\operatorname{supp}(1-X^\varepsilon)$, содержащего носитель функции $|\nabla_x X^\varepsilon(x)| \leqslant c\varepsilon^{-1}$. В результате получим, что

$$\varepsilon^{2-d}|S_j^u(\psi^\varepsilon)| \leqslant c(\varepsilon^{-1}\mathbf{n}_j' I_{Xj}^{1/2}\|\nabla_x\psi^\varepsilon; L^2(\omega_j)\| + \\ + I_{Xj}^{1/2}(\mathbf{n}_j' + |a_j^k|)\|(\varepsilon+\mathbf{r}_j)^{-1}\psi^\varepsilon; L^2(\omega_j)\| + \varepsilon^{d-2}|\lambda_k'|\|u_k'; L^2(\omega_j)\|\,\|\psi^\varepsilon; L^2(\omega_j)\|) \leqslant \\ \leqslant c(\varepsilon^{-1+(d-2)/2} + \varepsilon^{d/2} + \varepsilon^{d-2})\|\psi^\varepsilon; H^1(\omega_j)\| \leqslant C\varepsilon^{\min\{-1+(d-2)/2, d-2\}}.$$

Наконец,

$$I_{Xj} = \int\limits_{\operatorname{supp}(1-X^\varepsilon)} dx \leqslant C_X \int\limits_0^{c_j} \mathbf{r}_j^{d-1} d\mathbf{r}_j = C_j\varepsilon^d.$$

Далее при $\ell = \overline{1, J-1}$ имеем

$$I_\ell^w(\psi^\varepsilon) = (\nabla_x \mathcal{W}_{k\ell}, \nabla_x(\chi_\ell\psi^\varepsilon))_{\omega_\ell\bigcup\omega_{\ell+1}}, \tag{48}$$

$$S_\ell^w(\psi^\varepsilon) = \varepsilon^{d-2}\lambda_k'(\chi_\ell w_{k\ell}', \psi^\varepsilon)_{\omega_\ell\bigcup\omega_{\ell+1}} + (w_{k\ell}'\nabla_x\chi_\ell, \nabla_x\psi^\varepsilon)_{\omega_\ell\bigcup\omega_{\ell+1}} - (\nabla_x w_{k\ell}', \psi^\varepsilon\nabla_x\chi_\ell)_{\omega_\ell\bigcup\omega_{\ell+1}}. \tag{49}$$

При этом $\mathcal{W}_{k\ell} = ((a_{\ell+1}^k + a_\ell^k) + (a_{\ell+1}^k - a_\ell^k)W_\ell)/2 \in H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Xi^j})$ – ограниченное решение задачи (13), $(13)_N$, а значит, скалярное произведение (48) обращается в нуль, так как пробная функция $\xi^j \mapsto \chi_\ell(x)\psi^\varepsilon(x)$ обладает компактным носителем. Выделим из слагаемого типа пограничного слоя (23) член

$$\varphi_{k\ell}^\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(a_{\ell+1}^k + a_\ell^k)C(\theta_\ell)\Phi(\xi^\ell) = \varepsilon^{d-2}\frac{1}{2}(a_{\ell+1}^k + a_\ell^k)C(\theta_\ell)\Phi(x - x^\ell), \tag{50}$$

входящий в правую часть (26) задачи (25). Остаток представляет собой величину порядка $(1+|\xi^\ell|)^{1-d}$, превращающуюся в бесконечно малую $O(\varepsilon^{1-d})$ на носителе $\operatorname{supp}|\nabla_x\chi_\ell|$ вектор-функции $\nabla_x\chi_\ell$, удалённом от точки x^ℓ. Отщепим от последних двух слагаемых, возникших в (49) вследствие переброски срезки χ_j от $w_{k\ell}'$ к ψ^ε, скалярные произведения, содержащие функции (50), а оставшееся выражение преобразуем и оценим следующим образом:

$$|S_\ell^w(\psi^\varepsilon) - (\varphi_{k\ell}^\varepsilon\nabla_x\chi_\ell, \nabla_x\psi^\varepsilon)_{\omega_\ell\bigcup\omega_{\ell+1}} + (\nabla_x\varphi_{k\ell}^\varepsilon, \psi^\varepsilon\nabla_x\chi_\ell)_{\omega_\ell\bigcup\omega_{\ell+1}}| \leqslant c(\varepsilon^{d-2}\lambda_k' \times \\ \times \sup_{x\in\omega_\ell\bigcup\omega_{\ell+1}} |(\varepsilon+r_\ell)\mathbf{w}_\ell(\xi^\ell)|\,\|(\varepsilon+r_\ell)^{-1}\psi^\varepsilon; L^2(\omega_\ell\bigcup\omega_{\ell+1})\| + \varepsilon^{d-1}\|\psi^\varepsilon; H^1(\omega_\ell\bigcup\omega_{\ell+1})\|) \leqslant c\varepsilon^{d-1}. \tag{51}$$

Гармоническая в $\mathbb{R}^d_\pm$ функция φ^ε_ℓ с нулевыми данными Неймана на $\partial\mathbb{R}^d_\pm\setminus\{0\}$ удовлетворяет равенству

$$([\Delta_x,\chi_j]\varphi^\varepsilon_{k\ell},\psi^\varepsilon)_{\omega_\ell\bigcup\omega_{\ell+1}}=(\varphi^\varepsilon_{k\ell}\nabla_x\chi_j,\nabla_x\psi^\varepsilon)_{\omega_\ell\bigcup\omega_{\ell+1}}-(\nabla_x\varphi^\varepsilon_{k\ell},\psi^\varepsilon\nabla_x\chi_j)_{\omega_\ell\bigcup\omega_{\ell+1}}. \tag{52}$$

Следовательно, сумма по $\ell=\overline{1,J-1}$ "лишних" слагаемых из левой части (51) и сумма по $j=\overline{1,J}$ выражений (45) взаимно уничтожаются благодаря интегральным тождествам, обслуживающим задачи (25) с правыми частями (26). Таким образом, при учёте определений (40) и (41) приходим к следующей оценке величин (43):

$$h_k\leqslant c_k\varepsilon^{d-2+\alpha_d},\quad \alpha_d=\min\{1,-1+d/2\}\geqslant 1/2. \tag{53}$$

Теорема 1. *В случае $d\geqslant 3$ найдутся такие положительные константы ε_0 и c_0, что при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ первые J собственных чисел задачи Неймана (2), (2)$_N$ удовлетворяют соотношениям $\lambda^\varepsilon_{N1}=0$ и*

$$|\lambda^\varepsilon_k-\varepsilon^{d-2}\lambda'_k|\leqslant c_0\varepsilon^{d-2+\alpha_d},\quad k=\overline{2,J},$$

где α_d – показатель из оценки (53), а $\lambda'_2,\ \ldots,\ \lambda'_J$ – положительные собственные числа алгебраической системы (29).

Доказательство. Согласно лемме 3 и оценке (53) найдутся собственные числа $\kappa^\varepsilon_{Nm(2)},\ \ldots$ $\ldots,\ \kappa^\varepsilon_{Nm(J)}$ оператора $\mathcal{K}^\varepsilon$ и собственные числа $\lambda^\varepsilon_{Nm(2)},\ldots,\ \lambda^\varepsilon_{Nm(J)}$ задачи (2), (2)$_N$, для которых

$$|\kappa^\varepsilon_{Nm(k)}-\mathbf{k}^\varepsilon_k|\leqslant h_k\leqslant c_k\varepsilon^{d-2+\alpha_d},\quad k=\overline{2,J},$$

и, следовательно,

$$\begin{cases}|\lambda^\varepsilon_{Nm(k)}-\varepsilon^{d-2}\lambda'_k|\leqslant c_k\varepsilon^{d-2+\alpha_d}(1+\lambda^\varepsilon_{Nm(k)})(1+\varepsilon^{d-2}\lambda'_k),\\ 1+\lambda^\varepsilon_{Nm(k)}\leqslant 2(1+\varepsilon^{d-2}\lambda'_k)\ \text{ при }\ c_k\varepsilon^{d-2+\alpha_d}(1+\varepsilon^{d-2}\lambda'_k)\leqslant 1/2,\end{cases}$$

а значит,

$$|\lambda^\varepsilon_{Nm(k)}-\varepsilon^{d-2}\lambda'_k|\leqslant 2c_k\varepsilon^{d-2+\alpha_d}(1+\varepsilon^{d-2}\lambda'_k)^2\leqslant C_k\varepsilon^{d-2+\alpha_d}\quad\text{при}\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_k],\quad \varepsilon_k>0. \tag{54}$$

Если собственные числа $\lambda'_2,\ \ldots,\ \lambda'_J$ системы (29) простые, то в силу неравенств (54) при малом ε величины $\kappa^\varepsilon_{Nm(2)},\ \ldots,\ \kappa^\varepsilon_{Nm(J)}$ попарно не совпадают. В итоге на интервале $(0,C\varepsilon^{d-2})$ найдены различные удовлетворяющие последней оценке из (54) положительные собственные числа задачи Неймана (2), (2)$_N$ в количестве $J-1$ штуки. По лемме 2 других собственных чисел на интервале $(0,\Lambda_N)$ нет, т.е. утверждение теоремы проверено.

Рассмотрим теперь случай кратного собственного числа λ'_{Nq}. Пусть

$$\lambda'_{Nq-1}<\lambda'_{Nq}=\ldots=\lambda'_{Nq+\mathcal{Q}_q-1}<\lambda'_{Nq+\mathcal{Q}_q},\quad \mathcal{Q}_q>1, \tag{55}$$

и убедимся в том, что обнаруженные собственные числа $\kappa'_{Nm(q)},\ \ldots,\ \kappa'_{Nm(q+\mathcal{Q}_q-1)}$ оператора $\mathcal{K}^\varepsilon$ также можно взять различными. Применим вторую часть леммы 3, положив в ней $h=\max\{h_1,\ldots,h_J\}$ и $\mathbf{h}=h\varrho$, где $\varrho>1$ – большое число. Пусть параметр ε настолько мал, что сегмент $\sigma^\varepsilon_q=[\mathbf{k}^\varepsilon_q-\mathbf{h},\mathbf{k}^\varepsilon_q+\mathbf{h}]$ содержит среди найденных только точки $\kappa'_{Nm(q)},\ \ldots$ $\ldots,\ \kappa'_{Nm(q+\mathcal{Q}_q-1)}$. Обозначим через $\mathcal{S}^\varepsilon_q,\ \ldots,\ \mathcal{S}^\varepsilon_{q+\mathcal{Q}-1}$ указанные в (38) линейные комбинации собственных векторов $\mathcal{U}^\varepsilon_p$ оператора $\mathcal{K}^\varepsilon$, а через $\mathbf{c}^\varepsilon_{(q)},\ \ldots,\ \mathbf{c}^\varepsilon_{(q+\mathcal{Q}-1)}$ – соответствующие столбцы коэффициентов, нормированные в $\mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon}$. Поскольку векторы $a^1,\ \ldots,\ a^J$ и $\mathcal{U}^\varepsilon_{\mathcal{N}^\varepsilon},\ \ldots$ $\ldots,\ \mathcal{U}^\varepsilon_{\mathcal{N}^\varepsilon+\mathcal{X}^\varepsilon-1}$ подчинены условиям ортогональности и нормировки (31) и (39), выводим из (38) и (42), (40) соотношения

$$|\langle\mathbf{v}^\varepsilon_k,\mathbf{v}^\varepsilon_\ell\rangle-\delta_{k,\ell}|\leqslant c\varepsilon^{d-2},$$

$$|(\mathbf{c}^\varepsilon_\ell)^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^\varepsilon_k-\delta_{k,\ell}|=|\langle\mathcal{S}^\varepsilon_k,\mathcal{S}^\varepsilon_\ell\rangle-\delta_{k,\ell}|=|\langle\mathcal{S}^\varepsilon_k-\mathbf{v}^\varepsilon_k,\mathcal{S}^\varepsilon_\ell\rangle-\langle\mathbf{v}^\varepsilon_k,\mathbf{v}^\varepsilon_\ell-\mathcal{S}^\varepsilon_\ell\rangle\langle\mathbf{v}^\varepsilon_k,\mathbf{v}^\varepsilon_\ell\rangle-\delta_{k,\ell}|\leqslant 4\varrho^{-1}+c\varepsilon^{d-2}.$$

Таким образом, при малом ε и большом ϱ столбцы $\mathbf{c}^\varepsilon_{(q)}, \ldots, \mathbf{c}^\varepsilon_{(q+\mathcal{Q}-1)}$ "почти ортонормированы" в $\mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon}$, а значит, $\mathcal{Q} \leqslant \mathcal{X}^\varepsilon$, и на сегменте σ^ε_q действительно присутствуют не менее $\mathcal{Q}$ собственных чисел оператора $\mathcal{K}^\varepsilon$. Именно в этом и требовалось убедиться, так как по лемме 2 строгое неравенство $\mathcal{Q} < \mathcal{X}^\varepsilon$ невозможно. Теорема доказана.

Выполненные вычисления позволяют вывести асимптотические формулы для собственных функций $u^\varepsilon_{N2}, \ldots, u^\varepsilon_{NJ}$. Вместе с тем поправочные слагаемые u'_k не определяются однозначно из задач (25), и то же самое можно сказать о собственных векторах системы (29) при наличии кратных (55) среди собственных чисел (30). Поэтому ограничимся формулировкой упрощённого результата – его переформулировка для случая (55) нуждается в стандартных, но достаточно громоздких изменениях и доставляет менее явные формулы. Применим вторую часть леммы 3, в которой возьмём $h_k = c_k\varepsilon^{d-2+\alpha_d}$ и $\mathbf{h}_k = \mathbf{c}_k\varepsilon^{d-2}$. Множители $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_J$ зафиксируем малыми настолько, чтобы в $\mathbf{c}_k\varepsilon^{d-2}$-окрестности точки $(1+\varepsilon^{d-2}\lambda'_k)^{-1}$ располагалось только одно собственное число оператора $\mathcal{K}^\varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть $d \geqslant 3$ и все собственные числа (30) простые. Тогда для собственных функций $u^\varepsilon_{N2}, \ldots, u^\varepsilon_{NJ}$ верны асимптотические формулы*

$$\left\| u^\varepsilon_{Nk} - u^0_k - \sum_{j=1}^{J-1} \chi_j w'_{kj}; H^1(\Omega^\varepsilon) \right\| \leqslant c_k \varepsilon^{\alpha_d}, \quad j = \overline{2, J}, \tag{56}$$

функции в которых заданы равенствами (22), (23) и $\alpha_d = \min\{1, -1 + d/2\} \geqslant 1/2$.

Подчеркнём, что $H^1(\omega_j)$-нормы слагаемых $w'_{kj}(\xi^j)$ типа пограничного слоя равны $O(\varepsilon^{d-2})$, однако эти слагаемые нельзя убрать из левой части оценок (56), так как кусочно-постоянные функции $u^0_2, \ldots, u^0_J$ не принадлежат пространству Соболева $H^1(\Omega^\varepsilon)$.

Замечание. При $d = 2$ асимптотические конструкции и процедура их обоснования разрушаются. Причина состоит в том, что для плоской задачи (14) решение $P_j(\xi^j) = 1$ тривиально, и вместо гармонической емкости вводится [16] логарифмическая ёмкость множества $\overline{\theta_j(0)}$ как коэффициент в разложении

$$P^{\log}_j(\xi^j) = -(2\pi)^{-1}(\ln|\xi^j| - \ln c_{\log}(\theta_j)) + O(|\xi^j|^{-1}), \quad |\xi^j| \to +\infty,$$

функции $P^{\log}_j$, гармонической в области $\Xi^j = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\theta_j(0)}$ и обращающейся в нуль на трещине $\theta_j(0)$.

Разработано несколько подходов к вычислению асимптотики собственных пар спектральных задач в такой необычной ситуации. Во-первых, простейшим оказывается итерационный процесс построения бесконечных рядов по обратным степеням большого параметра $|\ln\varepsilon|$. Во-вторых, при помощи усовершенствованного метода [13] (см. также [4, гл. 9]) можно просуммировать упомянутые ряды и вывести формулы

$$\lambda^\varepsilon_{Nk} = |\ln\varepsilon|^{-1}\Lambda_k(|\ln\varepsilon|^{-1}) + \widetilde{\lambda}^\varepsilon_{Nk}, \quad |\widetilde{\lambda}^\varepsilon_{Nk}| \leqslant c_k\varepsilon^\tau, \quad \tau \in (0, 1),$$

где $t \mapsto \Lambda_k(t)$ – вещественные аналитические функции. Первый подход обеспечивает малосодержательный результат, а второй, достаточно сложный и громоздкий в исполнении, воспроизводить в данной статье не будем.

4. Простое собственное число задачи Дирихле. Предположим, что для первых членов последовательностей (8) собственных чисел задач (7), $(7)_D$ справедливы неравенства

$$\lambda^{\mathbf{j}0}_{D1} < \lambda^{j0}_{D1} \quad \text{при} \quad j = \overline{1, J}, \quad j \neq \mathbf{j}, \tag{57}$$

и построим асимптотику первого (заведомо простого; ср. п. 5, 3°) собственного числа λ^ε_{D1} задачи (2), $(2)_D$. Для определённости будем сначала считать, что $1 < \mathbf{j} < J$, – в случаях $\mathbf{j} = 1$ и $\mathbf{j} = J$ формулы укорачиваются. Не будем писать индекс D и примем такие асимптотические анзацы для собственных пар:

$$\lambda^\varepsilon_1 = \lambda^{\mathbf{j}0}_1 + \varepsilon^d\lambda'_1 + \ldots, \tag{58}$$

$$u_1^\varepsilon(x) = u_1^{\mathbf{j}0}(x) + \varepsilon^d u'_{\mathbf{j}}(x) + \varepsilon\chi_{\mathbf{j}}(x)w'_{\mathbf{j}}(\xi^{\mathbf{j}}) + \varepsilon\chi_{\mathbf{j}-1}(x)w'_{\mathbf{j}-1}(\xi^{\mathbf{j}-1}) + \ldots. \tag{59}$$

Здесь многоточие заменяет несущественные младшие асимптотические члены, причём тривиальные анзацы $u_1^\varepsilon(x) = \ldots$ на ячейках ω_j с номерами $j \neq \mathbf{j}$ при формальном анализе не понадобятся. Поскольку $\lambda_1^{\mathbf{j}0}$ – первое собственное число задачи Дирихле в $\omega_{\mathbf{j}}$ и нормированная в $L^2(\omega_{\mathbf{j}})$ собственная функция выбрана положительной, справедливы неравенства

$$A_{\mathbf{j}} := \partial_z u_1^{\mathbf{j}0}(x^{\mathbf{j}}) < 0, \quad A_{\mathbf{j}-1} := \partial_z u_1^{\mathbf{j}0}(x^{\mathbf{j}-1}) > 0. \tag{60}$$

Вспомнив, что $u_1^{\mathbf{j}\pm 10} = 0$, компенсируем скачки производной по z на отверстиях $\theta_{\mathbf{j}}^\varepsilon$ и $\theta_{\mathbf{j}-1}^\varepsilon$ при помощи слагаемых типа пограничного слоя

$$w'_{\mathbf{j}}(\xi^{\mathbf{j}}) = -\frac{1}{2}A_{\mathbf{j}}\mathbf{w}_{\mathbf{j}}(\xi^{\mathbf{j}}), \quad w'_{\mathbf{j}-1}(\xi^{\mathbf{j}-1}) = \frac{1}{2}A_{\mathbf{j}-1}\mathbf{w}_{\mathbf{j}-1}(\xi^{\mathbf{j}-1}), \tag{61}$$

где фигурируют построенные по решению (19) задачи (13), $(13)_D$ и затухающие при $|\xi^j| \to \to +\infty$ функции

$$\mathbf{w}_j(\xi^j) = W_j(\xi^j) - \zeta^j \quad \text{при} \quad \zeta^j > 0, \quad \mathbf{w}_j(\xi^j) = W_j(\xi^j) + \zeta^j \quad \text{при} \quad \zeta^j < 0, \tag{62}$$

у которых скачок производной по z на $\theta_j(0)$ равен -2. Учитывая поведение функций (62) при $\zeta^j \to \pm\infty$, унаследованное от решений Q_j задачи (17) (см. формулы (19) и (18)), собираем множители при ε^d в уравнении (2) на ячейке $\omega_{\mathbf{j}}$ после подстановки в него анзацев (58) и (59). В результате приходим к задаче Дирихле

$$-\Delta_x u'_j(x) - \lambda_1^{j0}u'_j(x) = \lambda'_1 u_j^0(x) + f'_j(x), \quad x \in \omega_j,$$
$$u'_j(x) = 0, \quad x \in \partial\omega_j, \tag{63}$$

с индексом $j = \mathbf{j}$ и фрагментом правой части

$$f'_{\mathbf{j}}(x) = \frac{1}{2}A_{\mathbf{j}}M(\theta_{\mathbf{j}})\Psi_{\mathbf{j}}(x) - \frac{1}{2}A_{\mathbf{j}-1}M(\theta_{\mathbf{j}-1})\Psi_{\mathbf{j}-1}(x), \tag{64}$$

где

$$\Psi_j(x) = ([\Delta_x, \chi_j(x)] + \lambda_1^{\mathbf{j}0}\chi_j(x))\partial_z\Phi(x - x^j). \tag{65}$$

Способ вывода формул (64) и (65) мало отличается от представленного в п. 3 ввиду соотношения $\partial_{\zeta^j}\Phi(\xi^j) = \varepsilon^{d-1}\partial_z\Phi(x - x^j)$ для выделенного в представлении (18) члена. Вместе с тем из-за иррегулярности $O(\mathbf{r}_{\mathbf{j}}^{1-d})$ у функции (65) задача (63) с $j = \mathbf{j}$ не имеет решения в классе $H_0^1(\omega_{\mathbf{j}})$ при $d \geqslant 4$. На помощь приходит теория Кондратьева [20] (см. также монографии [2, 21] и др.), следуя которой введём весовое пространство Соболева $V_\beta^l(\omega_j)$ как пополнение линейного множества $C_c^\infty(\overline{\omega_j} \setminus \{x^j, x^{j-1}\})$ (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями) по норме

$$\|g; V_\beta^l(\omega_j)\| = \left(\sum_{p=0}^{l} \|\mathbf{r}_j^{\beta-l+p}\nabla_x^p g; L_2(\omega_j)\|^2\right)^{1/2}.$$

Здесь $\nabla_x^p g$ – набор всех производных функции g порядка p, а $l \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ – показатели гладкости и веса. Подпространство функций $u \in V_\beta^1(\omega_j)$, обращающихся в нуль на $\partial\omega_j$, обозначим $V_{\beta,0}^1(\omega_j)$. Сопряжённое пространство $V_{\beta,0}^1(\omega_j)^*$ включено в $V_{1-\beta}^0(\omega_j)$, а оператор $B_\beta^j(\lambda) = -(\Delta_x + \lambda) : V_{\beta,0}^1(\omega_j) \to V_{\beta,0}^1(\omega_j)^*$ при $|\beta| < d/2$ наследует все основные свойства отображения $-(\Delta_x + \lambda) : H_0^1(\omega_j) \to H_0^1(\omega_j)^*$ и, более того, при $\beta = 0$ совпадает с ним. Иными словами, в силу предположения (57) оператор $B^j_\beta(\lambda_1^{\mathbf{j}0})$ – изоморфизм при $j \neq \mathbf{j}$, а $B^{\mathbf{j}}_\beta(\lambda_1^{\mathbf{j}0})$ – фредгольмово отображение с одномерными ядром и коядром, натянутыми на собственную функцию $u_1^{\mathbf{j}0}$. Все эти факты вытекают из общей теории, и их можно почерпнуть, например, из источников [4, гл. 1; 2, гл. 2; 22, § 2 и теорема 2.7].

Учтём, что $u_1^{\mathbf{j}0} \in V^1_{\beta,0}(\omega_{\mathbf{j}})$, $\Psi_{\mathbf{j}}, \Psi_{\mathbf{j}-1} \in V^0_{1-\beta}(\omega_{\mathbf{j}})$ при $\beta \in (-d/2, 2-d/2)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} (z - z^j + c)[\Delta_x, \chi_j(x)]\partial_z \Phi(x - x^j)\,dx = \int\limits_{\mathbb{S}_R} (\Phi(x)\partial_{|x|} z - (z+c)\partial_z\Phi(x))\,ds_x = 1. \tag{66}$$

В результате вытекающее из (64) и (65) условие разрешимости задачи (63) будет выглядеть так:

$$\lambda_1' = \lambda_1' \|u_1^{\mathbf{j}0}; L^2(\omega_{\mathbf{j}})\|^2 = -\int\limits_{\omega_{\mathbf{j}}} u_1^{\mathbf{j}0}(x)(\Delta_x u'_{\mathbf{j}}(x) + \lambda_1^{\mathbf{j}0} u'_{\mathbf{j}}(x))\,dx =$$

$$= \int\limits_{\omega_{\mathbf{j}}} u_1^{\mathbf{j}0}(x) f'_{\mathbf{j}}(x)\,dx = -\frac{1}{4}(M(\theta_{\mathbf{j}})|\partial_z u_1^{\mathbf{j}0}(x^{\mathbf{j}})|^2 + M(\theta_{\mathbf{j}-1})|\partial_z u_1^{\mathbf{j}0}(x^{\mathbf{j}-1})|^2). \tag{67}$$

Появление дроби $1/4$ на месте дроби $1/2$ обусловлено интегрированием по полусфере, а не по сфере, как в формуле (66). В ситуациях $\mathbf{j} = 1$ или $\mathbf{j} = J$ ($\omega_{\mathbf{j}}$ – концевая ячейка) следует положить $M(\theta_{\mathbf{j}-1}) = 0$ или $M(\theta_{\mathbf{j}}) = 0$ соответственно (отверстий θ_0^ε и θ_J^ε нет), а значит, в правой части равенства (67) остаётся лишь одно слагаемое. Похожий, но частный случай при помощи иного подхода рассматривался в публикации [3], а именно, $J = 2$ и $\mathbf{j} = 1$, а ω_1 и ω_2 – соосные цилиндры с одинаковым сечением.

Итак, получена формула (67) для поправки в представлении (58) первого собственного числа λ_{N1}^ε задачи (2), $(2)_D$, причём в дополнение к пограничным слоям (61) поправка регулярного типа u_1' в анзаце (59) для собственной функции u_{D1}^ε находится из ставшей по причине (67) разрешимой задачи (63). Очевидное неравенство $\lambda_1' < 0$ согласуется с простым следствием $\lambda_{D1}^\varepsilon < \lambda_{D1}^{\mathbf{j}0}$ минимального принципа (см., например, [19, теорема 10.2.1]).

Сильные особенности $O(\mathbf{r}_{\mathbf{j}}^{3-d})$ при $d > 3$ у поправки $u'_{\mathbf{j}}$ регулярного типа привносят новые трудности в процедуру обоснования формальной асимптотики, устраняемые в методе [4] введением в почти собственную спектральную пару младших асимптотических членов. Сформулируем результат, однако для сокращения объёма статьи исключим описание не нужных по существу конструкций, т.е. ограничимся при доказательстве случаями $d = 2$ и $d = 3$. При больших размерностях $d \geqslant 4$ для проверки доказываемой далее оценки (68) нетрудно приспособить упоминавшуюся общую схему оправдания асимптотики из монографии [4].

Теорема 3. *При ограничениях (57) и* $d \geqslant 2$ *найдутся такие положительные константы* ε_1 *и* c_1, C_1, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *для первого собственного числа* λ_{D1}^ε *задачи (2), $(2)_D$ справедливо неравенство*

$$|\lambda_{D1}^\varepsilon - \lambda_{D1}^{\mathbf{j}0} - \varepsilon^d \lambda_1'| \leqslant c_1 \varepsilon^d \alpha_d(\varepsilon), \tag{68}$$

и других собственных чисел на интервале $(0, \Lambda_D - C_1\varepsilon^d)$ *нет. Здесь* $\lambda_1' > 0$ *– величина (57),* $\Lambda_D = \min\{\lambda^{j0}_{D1+\delta_{j,\mathbf{j}}}\,|\, j = \overline{1, J},\} > 0$ *и* $\alpha_2(\varepsilon) = \varepsilon(1 + |\ln\varepsilon|)$, $\alpha_3(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}$, *но* $\alpha_d(\varepsilon) = \varepsilon$ *при* $d \geqslant 4$.

Доказательство следует той же схеме, что и в п. 3. Укажем заменители леммы 3 и вычислений, приведших к теореме 1.

Сначала обратимся к смешанным краевым задачам

$$-\Delta_x v^{j\varepsilon}(x) = \mu^{j\varepsilon} v^{j\varepsilon}(x), \quad x \in \omega_j,$$

$$v^{j\varepsilon}(x) = 0, \quad x \in \partial\omega_j \setminus (\overline{\theta_j^\varepsilon} \bigcup \overline{\theta_{j-1}^\varepsilon}), \quad \partial_z v^{j\varepsilon}(x) = 0, \quad x \in (\theta_j^\varepsilon \bigcup \theta_{j-1}^\varepsilon). \tag{69}$$

Как известно (см. [7–9] и др.) и нетрудно проверить при помощи метода [4, гл. 5; 9; 13], для первых двух собственных чисел задачи (69) верны оценки

$$|\mu_q^{j\varepsilon} - \lambda_{Dq}^{j0}| \leqslant c_q^j \varepsilon^d \quad \text{при} \quad q = 1, 2 \quad \text{и} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_k^j] \tag{70}$$

с некоторыми положительными c_k^j и ε_k^j. Таким образом, применив неравенства Фридрихса–Пуанкаре на ячейках $\omega_1, \ldots, \omega_J$, обнаруживаем, что для функции $\psi^\varepsilon \in \mathcal{H}_D^\varepsilon$ лишь при одном условии ортогональности $(\psi^\varepsilon, v_1^{\mathbf{j}\varepsilon})_{\omega_\mathbf{j}} = 0$ выполнено неравенство

$$\|\nabla_x \psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \geqslant \min\{\mu_{1+\delta_{j,\mathbf{j}}}^{j\varepsilon} \,|\, j = \overline{1, J}\} \, \|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2.$$

Осталось применить оценки (70) и соотношение (32) с индексами $m = 2$ и $M = D$, т.е. второе утверждение теоремы проверено аналогично лемме 2.

Введём в пространстве $\mathcal{H}_D^\varepsilon$ скалярное произведение (35) и оператор (36), а в качестве “почти собственной” пары возьмём

$$\mathbf{k}^\varepsilon = (1 + \lambda_{D1}^{\mathbf{j}0} + \varepsilon^d \lambda_1')^{-1}, \quad \mathbf{v}^\varepsilon = \|\mathbf{u}^\varepsilon; \mathcal{H}_D^\varepsilon\|^{-1} \mathbf{u}^\varepsilon, \tag{71}$$

где

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x) = u_{D1}^{\mathbf{j}0}(x) + \varepsilon^d X^\varepsilon(x) \sum_{j=\mathbf{j}-1}^{\mathbf{j}+1} u_j'(x) + \varepsilon \sum_{j=\mathbf{j}-1}^{\mathbf{j}} \chi_j(x) w_j'(\xi^j). \tag{72}$$

Здесь собственная функция $u_{D1}^{\mathbf{j}0}$ продолжена нулём с ячейки $\omega_\mathbf{j}$ на всю область Ω^ε. Кроме того, использованы те же срезки, что и в п. 3, функции w_j' взяты из (61), а функции u_j' – решения задач (63), однако при $j = \mathbf{j}+1$ и $j = \mathbf{j}-1$, во-первых, $u_j' = 0$ и, во-вторых, $f_{\mathbf{j}+1}'$ или $f_{\mathbf{j}-1}'$ содержат только первое или только второе слагаемое из формулы (64) соответственно. Подчеркнём, что последние две задачи однозначно разрешимы согласно предположению (57). Далее индекс D не пишем. Как и ранее, при $\mathbf{j} = 1$ и $\mathbf{j} = J$ суммы в (72) укорачиваются.

Как уже упоминалось, считаем, что $d = 2, 3$, а значит, $u_j' \in H^1(\omega_j)$, $j = \mathbf{j}, \mathbf{j} \pm 1$, поскольку из результатов работ [20, 23] (см. также [4, гл. 1; 2, гл. 3]) следует, что в окрестностях точек $x^\mathbf{j}$ и $x^{\mathbf{j}-1}$ на прямых участках границы $\partial\omega_\mathbf{j}$ верны такие неравенства:

$$\begin{gathered} |u_j'(x)| + \mathbf{r}_\mathbf{j} |\nabla_x u_j'(x)| \leqslant c_j \quad \text{при} \quad d = 3, \\ |u_j'(x)| + \mathbf{r}_\mathbf{j} |\nabla_x u_j'(x)| \leqslant c_j \mathbf{r}_\mathbf{j} (1 + |\ln \mathbf{r}_\mathbf{j}|) \quad \text{при} \quad d = 2. \end{gathered} \tag{73}$$

Сразу же заметим, что вместо оценки (42) выполнена оценка

$$|\langle \mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon \rangle - 1| \leqslant c \int_{\Omega^0} \left(\left(1 + \varepsilon^d + \varepsilon \sum_{j=\mathbf{j}-1}^{\mathbf{j}} \frac{\chi(r_j)}{(1 + \varepsilon r_j)^{d-1}} \right)^2 - 1 \right) dx \leqslant C \varepsilon^d. \tag{74}$$

Величину h, определённую в (37), для пары (71) преобразуем аналогично (43) и получим в силу (71) и (74) неравенство

$$h \leqslant c \sup |(\nabla_x \mathbf{u}^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - \varepsilon^{d-2} \lambda_k' (\mathbf{u}^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}|. \tag{75}$$

Выражение под знаком модуля представим как сумму скалярных произведений

$$I_0^u(\psi^\varepsilon) = (\nabla_x u_1^{\mathbf{j}0}, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\omega_\mathbf{j}} - \lambda_1^{\mathbf{j}0} (u_1^{\mathbf{j}0}, \psi^\varepsilon)_{\omega_\mathbf{j}}, \quad I_0^{u\lambda}(\psi^\varepsilon) = \varepsilon^d \lambda_1' (u_1^{\mathbf{j}0}, \psi^\varepsilon)_{\omega_\mathbf{j}},$$

$$I_j^u(\psi^\varepsilon) = \varepsilon^d (\nabla_x (X^\varepsilon u_j'), \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\omega_j} - \varepsilon^d \lambda_1^{\mathbf{j}0} (X^\varepsilon u_j', \psi^\varepsilon)_{\omega_j}, \quad I_j^{u\lambda}(\psi^\varepsilon) = \varepsilon^{2d} \lambda_1' (X^\varepsilon u_j', \psi^\varepsilon)_{\omega_j}, \quad j = \mathbf{j}, \mathbf{j} \pm 1,$$

$$I_j^w(\psi^\varepsilon) = \varepsilon (\nabla_x (\chi_j w_j'), \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\omega_j \bigcup \omega_{j+1}}, \quad I_j^{w\lambda}(\psi^\varepsilon) = \varepsilon (\lambda_1^{\mathbf{j}0} + \varepsilon^d \lambda_1') (\chi_j w_j', \psi^\varepsilon)_{\omega_j \bigcup \omega_{j+1}}, \quad j = \mathbf{j} - 1, \mathbf{j}.$$

Для главного $u_1^{\mathbf{j}0}$ и поправочных u_j' членов регулярного типа верны соотношения

$$\begin{gathered} I_0^u(\psi^\varepsilon) = (\partial_z u_1^{\mathbf{j}0}, \psi^\varepsilon)_{\theta_\mathbf{j}^\varepsilon} - (\partial_z u_1^{\mathbf{j}0}, \psi^\varepsilon)_{\theta_{\mathbf{j}-1}^\varepsilon}, \quad |I_0^{u\lambda}(\psi^\varepsilon) - \varepsilon^d \lambda_1' (u_1^{\mathbf{j}0}, X^\varepsilon \psi^\varepsilon)_{\omega_\mathbf{j}}| \leqslant c \varepsilon^{d+1}, \\ |I_j^{u\lambda}(\psi^\varepsilon)| \leqslant c \varepsilon^{2d} \|u_j'; L^2(\omega_j)\| \, \|\psi^\varepsilon; L^2(\omega_j)\| \leqslant C \varepsilon^{2d}. \end{gathered} \tag{76}$$

Интегралы по отверстиям $\theta^\varepsilon_{\mathbf{j}}$ и $\theta^\varepsilon_{\mathbf{j}-1}$ возникли потому, что пробная функция ψ^ε не обязательно обращается на них в нуль, а мажоранта во второй оценке (76) обусловлена тем, что $|u_1^{\mathbf{j}0}(x)| \leqslant c\varepsilon$ на $\omega_{\mathbf{j}} \bigcap \operatorname{supp}(1 - X^\varepsilon)$ в силу условия Дирихле.

Отщепим от умноженных на ε членов (61) пограничного слоя (см. анзац (59)) величины

$$\varphi_j^\varepsilon(x) = -\varepsilon \frac{1}{2}(-1)^{\mathbf{j}-j} A_j M(\theta_j)\partial_{\zeta^j}\Phi(\xi^j) = -\varepsilon^d \frac{1}{2}(-1)^{\mathbf{j}-j} A_j M(\theta_j)\partial_z \Phi(x - x^j), \quad j = \mathbf{j}-1, \mathbf{j}, \tag{77}$$

где A_j – коэффициенты (60). Вследствие соотношений (62) и (19), (18) остаток затухает как $O(|\xi^j|^{-d})$ и оказывается бесконечно малой $O(\varepsilon^d)$ на множестве $\operatorname{supp}|\nabla_x \chi_j|$, удалённом от точки x^j. Таким образом,

$$|I_j^{w\lambda}(\psi^\varepsilon) - \varepsilon\lambda_1^{\mathbf{j}0}(\chi_j\varphi_j^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\omega_j \bigcup \omega_{j+1}}| \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon^{d+1}\Bigg(\int\limits_{\omega_j \bigcup \omega_{j+1}} \frac{(\varepsilon + r_j)^2\,dx}{(\varepsilon + r_j)^{2d}} + \varepsilon^{2(d-1)} \int\limits_{\omega_j \bigcup \omega_{j+1}} \frac{(\varepsilon + r_j)^2\,dx}{(\varepsilon + r_j)^{2(d-1)}}\Bigg)^{1/2} \times$$

$$\times\, \|(\varepsilon + r_j)^{-1}\psi^\varepsilon; L^2(\omega_j \textstyle\bigcup \omega_{j+1})\| \leqslant C\varepsilon^d \alpha_d(\varepsilon). \tag{78}$$

Здесь выражения для множителей $\alpha_2(\varepsilon)$ и $\alpha_3(\varepsilon)$ указаны в формулировке теоремы, а весовая норма пробной функции ψ^ε обеспечена неравенством (44), теряющим своё отношение к неравенству Харди при $d = 2$, но справедливым вследствие неравенств Фридрихса по угловой переменной $\phi \in (0, \pi)$ и в $R\varepsilon$-окрестностях точек $x^{\mathbf{j}}$ и $x^{\mathbf{j}-1}$ благодаря краевому условию Дирихле на $\Theta_{\mathbf{j}} \setminus \overline{\theta^\varepsilon_{\mathbf{j}}}$ и $\Theta_{\mathbf{j}-1} \setminus \overline{\theta^\varepsilon_{\mathbf{j}-1}}$.

По тем же причинам, переводя срезку X^ε от $u'_{\mathbf{j}}$ к ψ^ε, обнаруживаем, что при $j = \mathbf{j}, \mathbf{j} \pm 1$ имеют место неравенства

$$|I_j^u(\psi^\varepsilon) - \varepsilon^d(\nabla_x u'_j, \nabla_x(X^\varepsilon\psi^\varepsilon))_{\omega_j} - \lambda_1^{\mathbf{j}0}(u'_j, X^\varepsilon\psi^\varepsilon)_{\omega_j}| \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon^{d-1}\Bigg(\int\limits_{\operatorname{supp}|\nabla_x X^\varepsilon|} (|u'_j(x)|^2 + \mathbf{r}_j^2 |\nabla_x u'_j(x)|^2)\,dx\Bigg)^{1/2} \|\psi^\varepsilon; H^1(\Omega^\varepsilon)\| \leqslant c\varepsilon^d \alpha_d(\varepsilon), \tag{79}$$

в котором использованы оценки (73) и выполнено интегрирование. Подчеркнём, что при $d > 3$ нарушены именно оценки (73) и (79) из-за больших сингулярностей функций u'_j, однако привлечение младших асимптотических членов по схеме [4] устраняет это препятствие в доказательстве.

Наконец, учитывая, что $w'_j \in H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Xi^j})$ – гармоническая функция в полупространствах $\mathbb{R}^d_\pm$ – обращается в нуль на $\partial\Xi^j$, но приобретает скачок производной на отверстии $\theta_j(0)$, при помощи изложенных выше соображений выводим, что

$$|I_j^w(\psi^\varepsilon) - (\varphi_j^\varepsilon \nabla_x\chi_j, \nabla_x\psi^\varepsilon)_{\omega_j \bigcup \omega_{j+1}} + (\nabla_x\varphi_j^\varepsilon, \psi^\varepsilon\nabla_x\chi_j)_{\omega_j \bigcup \omega_{j+1}} + (\partial_z u_1^{\mathbf{j}0}, \psi^\varepsilon)_{\theta_j^\varepsilon}| \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon^{1+d}\|\psi^\varepsilon; H^1(\Omega^\varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon^{1+d}. \tag{80}$$

Закончим преобразования и подведём итог. Последние "лишние" члены из левых частей неравенства (80), $j = \mathbf{j}$ и $j = \mathbf{j} - 1$, взаимно уничтожаются с $I_0^u(\psi^\varepsilon)$ согласно первой формуле в (76). Оставшиеся "лишние" члены из (80) вместе с вычитаемыми под знаками модуля в (78) и (76) также превращаются в нуль, так как u'_j – решения задач (63) с правыми частями f'_j, а для функции (77) выполнено аналогичное (52) тождество. Следовательно, $h \leqslant c\varepsilon^d\alpha_d(\varepsilon)$, и лемма 3 доставляет собственное число κ^ε оператора $\mathcal{K}^\varepsilon$, расположенное в $c\varepsilon^d\alpha_d(\varepsilon)$-окрестности точки $\mathbf{k}^\varepsilon$. Повторив выкладки (54), находим собственное число задачи (2), $(2)_D$ с асимптотикой (79). Поскольку по доказанному ранее других собственных чисел на интервале $(0, \lambda_1^{\mathbf{j}0} + C\varepsilon^d)$ нет, проверка первого утверждения теоремы также закончена. Теорема доказана.

Благодаря единственности собственного числа Дирихле на интервале $(0, \Lambda_D - C_1\varepsilon^d)$ вторая часть леммы 3 при доказательстве теоремы 3 не применялась. Вместе с тем, положив $h = c\varepsilon^d$ и $\mathbf{h} = (\Lambda_D - \lambda_1^{\mathbf{j}0})/3$ в неравенстве (38) и присоединив слагаемые $\varepsilon^d X^\varepsilon u_j'$ из (72) к остатку (это нужно сделать из-за неопределённости в выборе u_j' и "плохой" мажоранты в неравенстве (75) для нормы функции $\mathbf{u}^\varepsilon$), получаем асимптотику собственной функции u_{D1}^ε.

Теорема 4. *При ограничениях (57) и $d \geqslant 2$ найдутся такие положительные константы ε_2 и c_2, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ для первой собственной функции задачи (2), (2)$_D$, нормированной равенством (5), выполняется неравенство*

$$\|u_{D1}^\varepsilon - u_{D1}^{\mathbf{j}0} - \varepsilon(\chi_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}}' + \chi_{\mathbf{j}-1} w_{\mathbf{j}-1}'); H^1(\Omega^\varepsilon)\| \leqslant c_2\varepsilon^\tau, \quad \tau > 0. \tag{81}$$

Поскольку собственная функция $u_{D1}^{\mathbf{j}0}$, продолженная нулём с ячейки $\omega_{\mathbf{j}}$ на всю область Ω^ε, возмущена в (81) слагаемыми типа пограничного слоя, приобретающими порядок ε^{d-1} при удалении от точек $x^{\mathbf{j}}$ и $x^{\mathbf{j}-1}$ вовнутрь $\Omega^\varepsilon \setminus \omega_{\mathbf{j}}$, теорема 4 как раз устанавливает свойство локализации собственной функции u_{D1}^ε. В отличие от теоремы 2 сама функция $u_{D1}^{\mathbf{j}0}$ принадлежит пространству $\mathcal{H}_D^\varepsilon = H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ и, поскольку $H^1(\omega_j)$-нормы слагаемых типа пограничного слоя – величины $O(\varepsilon^{1+d/2})$, члены $\varepsilon\chi_j w_j'$ из неравенства (81) можно убрать, уменьшив, может быть, показатель $\tau > 0$.

5. Несколько замечаний. 1°. *Доступные обобщения.* Многие геометрические ограничения в работе введены исключительно для упрощения изложения. Так, лишь с понятными изменениями в выкладках и рассуждениях можно допустить перфорацию несколькими отверстиями, несвязные ячейки и косые или изломанные перегородки (рис. 2, а и б). Разработанные в монографиях [4, 5] методы допускают многие другие в некотором смысле усложнения объекта анализа, например, векторные краевые задачи, в том числе для систем уравнений теории упругости. Наконец, метод составных разложений позволяет построить и обосновать бесконечные асимптотические ряды для собственных чисел и функций.

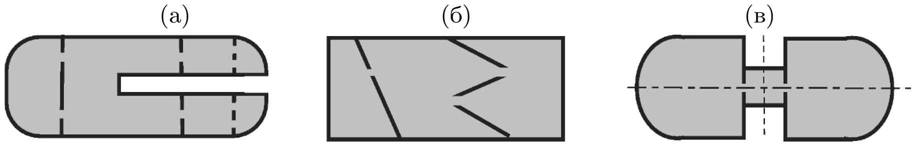

Рис. 2. Области с несвязными ячейками (а) и косыми или изломанными перегородками (б). Область, обладающая вращательной и зеркальной симметриями (в).

2°. *Локализация собственных функций.* Описанные конструкции и приёмы асимптотического анализа пригодны и для собственных чисел с любыми номерами. Пусть, например, при $d \geqslant 3$ собственное число $\lambda_{Np}^{\mathbf{j}0}$ задачи Неймана (13), (13)$_N$ с номером $\mathbf{j} \in \{1, \ldots, J\}$ не принадлежит спектрам (7)$_N$ задач в других областях ω_j, т.е. при $j \neq \mathbf{j}$. Тогда, совместив рассуждения из п. 3 и п. 4, заключаем, что в последовательности (4)$_N$ имеется собственное число

$$\lambda_{N\mathcal{P}}^\varepsilon = \lambda_{Np}^{\mathbf{j}0} + \varepsilon^{d-2}\frac{1}{4}(C(\theta_{\mathbf{j}})|u_{Np}^{\mathbf{j}0}(x^{\mathbf{j}})|^2 + C(\theta_{\mathbf{j}-1})|u_{Np}^{\mathbf{j}0}(x^{\mathbf{j}-1})|^2) + O(\varepsilon^{d-2+\alpha}), \quad \alpha > 0,$$

где $\mathcal{P}$ – количество членов последовательностей (7)$_N$, строго меньших $\lambda_{Np}^{\mathbf{j}0}$. Для соответствующей собственной функции выполнено похожее на (7) неравенство

$$\left\| u_{NP+1}^\varepsilon - u_{Np}^{\mathbf{j}0} + \frac{1}{2}(\chi_{\mathbf{j}} C(\theta_{\mathbf{j}}) u_{Np}^{\mathbf{j}0}(x^{\mathbf{j}})\mathbf{w}_{\mathbf{j}} - \chi_{\mathbf{j}-1} C(\theta_{\mathbf{j}-1}) u_{Np}^{\mathbf{j}0}(x^{\mathbf{j}-1})\mathbf{w}_{\mathbf{j}-1}); H^1(\Omega^\varepsilon) \right\| \leqslant c\varepsilon^\tau, \quad \tau > 0.$$

Конечно же схему обоснования асимптотик приходится изменить, так как лемма 2 становится бесполезной, и вместо неё нужно проверить так называемую “теорему о сходимости”, а сильные сингулярности, обсуждавшиеся перед формулировкой теоремы 3, возникают не только в задаче Дирихле, но и в задаче Неймана при $\lambda_{Np}^{\mathbf{j}0} \neq 0$.

Итак, замеченная в [3] локализация собственной функции не является прерогативой первой собственной функции задачи Дирихле. На самом деле локализация обусловлена лишь тем обстоятельством, что какое-то число является собственным для одной и только для одной из предельных задач (13), $(13)_D$ и (13), $(13)_N$.

3°. *Кратное собственное число задачи Дирихле.* Предположим, что $\lambda^0 := \lambda_{D1}^{10} = \ldots = \lambda_{D1}^{J0}$ (например, Ω – цилиндр $\varpi \times (0, J) \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ и $z^p = p$) и подчиним собственные функции u_{D1}^{j0} условиям нормировки (9). Тогда главный член асимптотики собственных функций u_{Dk}^{ε}, отвечающих собственным числам

$$\lambda_{Dk}^{\varepsilon} = \lambda^0 - \varepsilon^d \lambda_k' + \ldots, \quad k = \overline{1, J}, \tag{82}$$

задачи (2), $(2)_D$, имеет вид $u_k^0(x) = a_j^k u_{D1}^{j0}(x)$ при $x \in \omega_j$, $j = \overline{1, J}$ (ср. (57) и (22)). Повторив асимптотический анализ из п. 4, видоизменённый согласно п. 3, получаем, что асимптотические поправки (30) в анзаце (82) суть собственные числа $J \times J$-матрицы T, образованной 2×2-блоками (20), в которых $C_j = M(\theta_j)(\partial_z u_{D1}^{j+10}(x^{j+1}))^{-2}$ и $\tau_j = \partial_z u_{D1}^{j0}(x^j)/\partial_z u_{D1}^{j+10}(x^{j-1})$. Обратим внимание на знак минус в правой части равенства в (82) (собственные числа уменьшаются) и вспомним неравенства (60) (знаменатели не обращаются в нуль).

4°. *Расцепление собственных чисел.* Найденные асимптотические формулы приводят к выводу: расцепление кратных собственных чисел в задачах Дирихле и Неймана происходит за счёт возмущений порядков ε^d при $d \geqslant 2$ и ε^{d-2} при $d > 2$ или $|\ln \varepsilon|^{-1}$ при $d = 2$ соответственно. Вместе с тем этот эффект может вообще отсутствовать или проявляться в членах $O(\varepsilon^q)$ с бо́льшими показателями q. Пусть, например, область Ω^ε обладает вращательной и зеркальной симметриями относительно оси z и плоскости $\{x : z = 0\}$ (рис. 2, в). Тогда, например, в задаче Неймана собственные функции u_{Np}^{j0} с номерами $p > 1$ и $j = 1, 3$ могут обратиться (и обращаются) в нуль при $z = 0$, а значит, в аналогичных (21) асимптотиках главная поправка λ_p' аннулируется. Кроме того, нетрудно проверить, что в случае $\lambda_{D1}^{20} > \lambda_{D1}^{10} = \lambda_{D1}^{30}$ несколько первых асимптотических членов в асимптотике собственных чисел $\lambda_{D1}^{\varepsilon}$ и $\lambda_{D2}^{\varepsilon}$ совпадают. Наконец, из-за симметрии в последовательностях (4) заведомо имеются кратные собственные числа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
2. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; New York, 1994.
3. *Delitsyn A., Grebenkov D.S* Mode matching methods for spectral and scattering problems // Q. J. Mech. Appl. Math. 2018. V. 71. № 4. P. 537–580.
4. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Bd. 1–2. Berlin, 1991.
5. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М., 1989.
6. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic Analysis of Fields in Multi-Structures. Oxford, 1999.
7. *Гадыльшин Р.Р.* Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной самосопряженной эллиптической задачи с малым параметром в граничных условиях // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 4. С. 640–652.
8. *Гадыльшин Р.Р.* Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Мат. заметки. 1992. Т. 52. № 4. С. 42–55.
9. *Гадыльшин Р.Р.* О возмущении спектра лапласиана при смене типа граничного условия на малой части границы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1996. Т 36. № 7. С. 77–88.
10. *Van-Dyke M.* Perturbation Methods in Fkuid Mechanics. New York; London, 1964.

11. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
12. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области // Проблемы мат. анализа. Вып. 8. Л., 1981. С. 72–153.
13. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
14. *Мазья В.Г., Назаров С.А.* Об особенностях решений задачи Неймана в конической точке // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30. № 3. С. 52–63.
15. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М., 1962.
16. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М., 1966.
17. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. II. М., 1976.
18. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М., 1988.
19. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л., 1980.
20. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
21. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J.* Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities. Providence, 1997.
22. *Назаров С.А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
23. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 23.08.2020 г.
После доработки 09.12.2020 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.