ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 6, с. 769–783

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.74

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМ ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЧАСТИ И С НЕСКОЛЬКИМИ БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ЯДРАМИ

 А. А. Бободжанов, М. А. Бободжанова, В. Ф. Сафонов

Рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с нулевым оператором дифференциальной части, интегральный оператор которого содержит несколько быстро изменяющихся ядер. Работа является продолжением исследований, проведённых ранее для уравнений с только одним быстро изменяющимся ядром. Доказано, что условия разрешимости соответствующих итерационных задач, как и в линейном случае, имеют вид не дифференциальных (как в задачах с ненулевым оператором дифференциальной части), а интегро-дифференциальных уравнений, причём на структуру этих уравнений существенное влияние оказывает нелинейность. В нелинейном случае могут возникнуть так называемые резонансы, которые значительно усложняют разработку соответствующего алгоритма метода регуляризации. В работе рассматривается нерезонансный случай.

DOI: 10.31857/S0374064121060054

Введение. В настоящей работе метод регуляризации Ломова [1, 2] обобщается на интегро-дифференциальные уравнения, интегральный оператор которых содержит несколько быстро изменяющихся ядер, имеющие вид

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)K_j(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds+\varepsilon f(y,t),\quad y(0,\varepsilon)=y^0,\quad t\in[0,T], \tag{1}$$

где

$$E_\varepsilon^j(t,s)\equiv\exp\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\mu_j(\theta)\,d\theta\biggr).$$

Работа является продолжением исследований, проведённых ранее для уравнений, содержащих только одно быстро изменяющееся ядро. Основные идеи такого обобщения и тонкости, возникающие при разработке соответствующего алгоритма метода регуляризации, полностью просматриваются в случае двух быстро изменяющихся ядер, поэтому ради сокращения выкладок рассмотрен именно этот случай.

Аналогичная задача с одним спектральным значением ядра интегрального оператора изучалась в одной из работ авторов. В этом случае сингулярности в решении задачи описываются только спектральным значением ядра.

Следствием равенства нулю оператора дифференциальной части уравнения (1) является то, что в первом приближении асимптотика решения рассматриваемой задачи не содержит функции пограничного слоя, а сам предельный оператор является вырожденным (но не нулевым). При этом условия разрешимости соответствующих итерационных задач, как и в линейном случае, имеют вид не дифференциальных (как это было в задачах с ненулевым оператором дифференциальной части), а интегро-дифференциальных уравнений, причём на структуру этих уравнений существенное влияние оказывает нелинейность. Кроме того, в нелинейном случае могут возникнуть так называемые резонансы, которые значительно усложняют разработку соответствующего алгоритма метода регуляризации. В настоящей работе рассматривается нерезонансный случай.

Задача (1) рассматривается при следующих предположениях:

1) $\mu_j(t) \in \mathrm{C}^\infty([0,T],\mathbb{C})$, $K_j(t,s) \in \mathrm{C}^\infty(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,\mathbb{C})$, $j=1,2$;

2) $\mu_1(t) \neq \mu_2(t)$ для любого $t \in [0,T]$;

3) $\mu_j(t) \neq 0$, $\operatorname{Re}\mu_j(t) \leqslant 0$ при всех $t \in [0,T]$, $j=1,2$;

4) $f(y,t)$ – многочлен*) по y, т.е. $f(y,t) = \sum_{m=0}^N f_m(t)y^m$ с коэффициентами

$$f_m(t) \in C^\infty([0,T],\mathbb{C}), \quad m=\overline{0,N}, \quad N<\infty;$$

5) спектральные значения $\mu_j(t)$, $j=1,2$, ядер интегрального оператора таковы, что при всех $t \in [0,T]$ выполняются неравенства ($m=(m_1,m_2)$ – мультииндекс, $|m|=m_1+m_2$)

$$(m,\mu(t)) \equiv m_1\mu_1(t)+m_2\mu_2(t) \neq 0, \quad |m| \geqslant 2,$$

$$(m,\mu(t)) \neq \mu_j(t), \quad |m| \geqslant 2, \quad j \in 1,2$$

(т.е. рассматривается нерезонансный случай).

Как сказано выше, работа является продолжением исследований [3, 4], проведённых ранее для одного быстро изменяющегося ядра. В отличие от линейного случая в правой части задачи (1) отсутствует неоднородность соответствующей линейной задачи. Наличие её в задаче повлекло бы за собой появление в асимптотическом решении членов с отрицательными степенями параметра ε, причём в нелинейном случае таких степеней оказалось бы бесконечно много, а соответствующее формальное асимптотическое решение имело бы вид ряда Лорана. Это сделало бы разработку алгоритма асимптотических решений проблематичной, поэтому в настоящей работе, стремясь оставаться в рамках асимптотических решений типа рядов Тейлора, мы исключили неоднородность. Переходя к разработке алгоритма, отметим, что всюду в работе векторы-столбцы записываются в фигурных скобках, а векторы-строки – в круглых скобках.

1. Эквивалентная интегро-дифференциальная система и её регуляризация. Введём две новые неизвестные функции

$$z_1 = \int\limits_0^t E_\varepsilon^1(t,s)K_1(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds, \quad z_2 = \int\limits_0^t E_\varepsilon^2(t,s)K_2(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds.$$

Дифференцируя их по t, будем иметь

$$\frac{dz_j}{dt} = K_j(t,t)y + \frac{\mu_j(t)}{\varepsilon}\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)K_j(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds + \int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)\frac{\partial K_j(t,s)}{\partial t}y(s,\varepsilon)\,ds,$$

т.е.

$$\varepsilon\frac{dz_j}{dt} = \mu_j(t)z_j + \varepsilon K_j(t,t)y + \varepsilon\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)\frac{\partial K_j(t,s)}{\partial t}y(s,\varepsilon)\,ds, \quad j=1,2.$$

Вместо (1) получаем систему

$$\varepsilon\frac{dw}{dt} = A(t)w + \varepsilon A_1(t)w + \varepsilon\int\limits_0^t E_\varepsilon^1(t,s)G_1(t,s)w(s,\varepsilon)\,ds + \varepsilon\int\limits_0^t E_\varepsilon^2(t,s)G_2(t,s)w(s,\varepsilon)\,ds + \varepsilon F(w,t),$$

$$w(0,\varepsilon) = \{y^0,0,0\}, \tag{2}$$

*) Функция $f(y,t)$ взята в виде многочлена ради упрощения выкладок. Можно считать, что $f(y,t)$ является аналитической по y, т.е. тогда в 4) $N=\infty$.

где $w=\{y,z_1,z_2\}$, $F(w,t)=\{f(y,t),0,0\}$, а матрицы $A(t)$, $A_1(t)$, $G_j(t,s)$ имеют вид

$$A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & \mu_1(t) & 0\\ 0 & 0 & \mu_2(t)\end{pmatrix},\quad A_1(t)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ K_1(t,t) & 0 & 0\\ K_2(t,t) & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$G_1(t,s)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \partial K_1(t,s)/\partial t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad G_2(t,s)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \partial K_2(t,s)/\partial t & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Так как спектр $\sigma(A(t))=\{0,\mu_1(t),\mu_2(t)\}$ матрицы $A(t)$ имеет два ненулевых собственных значения $\mu_j(t)$, то регуляризацию задачи (2) проведём с помощью переменных

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_j(\theta)\,d\theta\equiv\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\quad j=1,2.$$

Для расширения $\tilde w=\{\tilde y(t,\tau,\varepsilon),\tilde z_1(t,\tau,\varepsilon),\tilde z_2(t,\tau,\varepsilon)\}$ получим следующую систему:

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde w}{\partial t}+\mu_1(t)\frac{\partial\tilde w}{\partial\tau_1}+\mu_2(t)\frac{\partial\tilde w}{\partial\tau_2}-A(t)\tilde w-\varepsilon A_1(t)\tilde w-$$

$$-\varepsilon\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)G_j(t,s)\tilde w(s,\psi(s)/\varepsilon,\varepsilon)\,ds=\varepsilon F(\tilde w,t),$$

$$\tilde w(0,0,\varepsilon)=\{y^0,0,0\}q\quad(\tau=(\tau_1,\tau_2),\quad\psi(t)=(\psi_1(t),\psi_1(t))).\tag{3}$$

Однако задачу (3) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не проведена регуляризация интегрального оператора

$$J\tilde w\equiv J\left(\tilde w(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{\substack{t=s\\ \tau=\psi(s)/\varepsilon}}\right)=\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)G_j(t,s)\tilde w(s,\psi(s)/\varepsilon,\varepsilon)\,ds.$$

Для регуляризации оператора $J\tilde w$ введём класс $M_\varepsilon=U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$, асимптотически инвариантный относительно оператора J (см. [1, с. 62]). При этом в качестве U возьмём пространство вектор-функций $w(t,\tau)$, представимых суммами вида

$$w(t,\tau)=w_0(t)+\sum_{|m|=1}^{N_w}w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)},\tag{4}$$

где $w_0(t),w^{(m)}(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^3)$, $|m|=\overline{1,N_w}$.

Покажем, что класс M_ε асимптотически инвариантен относительно оператора J. Для этого надо показать, что образ $Jw(t,\tau)$ на функциях вида (4) представим в виде ряда

$$Jw(t,\tau)=\sum_{k=0}^\infty\varepsilon^k\left(\sum_{1\leqslant|m|\leqslant N_{w_k}}w_k^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}+w_k^{(0)}(t)\right)\Bigg|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon},$$

сходящегося асимптотически к Jw (при $\varepsilon\to+0$) равномерно по $t\in[0,T]$. Подставляя ряд (4) в определение для $Jw(t,\tau)$, будем иметь

$$Jw(t,\tau)=\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)\sum_{|m|=1}^{N_w}G_j(t,s)w^{(m)}(s)E_\varepsilon^{[m]}(s)\,ds+\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)G_j(t,s)w_0(s)\,ds,\tag{5}$$

здесь и ниже принято обозначение

$$E_\varepsilon^{[m]}(s) \equiv \exp\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^s (m,\mu(\theta))\,d\theta\biggr).$$

Обозначим $w^{(1,0)}(t) \equiv w_1(t)$, $w^{(0,1)}(t) \equiv w_2(t)$ и преобразуем первую сумму в (5):

$$\sum_{j=1}^2 \int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s) \sum_{|m|=1}^{N_w} G_j(t,s) w^{(m)}(s) E_\varepsilon^{[m]}(s)\,ds = \sum_{j=1}^2 \sum_{|m|=1}^{N_w} \int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s) E_\varepsilon^{[m]}(s) G_j(t,s) w^{(m)}(s)\,ds =$$

$$= \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t,0) \sum_{|m|=1}^{N_w} \int\limits_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s) E_\varepsilon^j(0,s) G_j(t,s) w^{(m)}(s)\,ds =$$

$$= \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t,0) \int\limits_0^t E_\varepsilon^1(s,0) E_\varepsilon^j(0,s) G_j(t,s) w_1(s)\,ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t,0) \int\limits_0^t E_\varepsilon^2(s,0) E_\varepsilon^j(0,s) G_j(t,s) w_2(s)\,ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t,0) \sum_{|m|=2}^{N_w} \int\limits_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s) E_\varepsilon^j(0,s) G_j(t,s) w^{(m)}(s)\,ds.$$

Рассмотрим по отдельности каждую из последних сумм:

$$S_1 = \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t,0) \int\limits_0^t E_\varepsilon^1(s,0) E_\varepsilon^j(0,s) G_j(t,s) w_1(s)\,ds \equiv$$

$$\equiv E_\varepsilon^1(t,0) \int\limits_0^t G_1(t,s) w_1(s)\,ds + E_\varepsilon^2(t,0) \int\limits_0^t E_\varepsilon^1(s,0) E_\varepsilon^2(0,s) G_2(t,s) w_1(s)\,ds,$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t,0) \int\limits_0^t E_\varepsilon^2(s,0) E_\varepsilon^j(0,s) G_j(t,s) w_2(s)\,ds \equiv$$

$$\equiv E_\varepsilon^2(t,0) \int\limits_0^t G_2(t,s) w_2(s)\,ds + E_\varepsilon^1(t,0) \int\limits_0^t E_\varepsilon^2(s,0) E_\varepsilon^1(0,s) G_1(t,s) w_2(s)\,ds,$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t,0) \sum_{|m|=2}^{N_w} \int\limits_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s) E_\varepsilon^j(0,s) G_j(t,s) w^{(m)}(s)\,ds.$$

Первые слагаемые в полученных представлениях сумм S_1 и S_2 не нуждаются в регуляризации. Проведём регуляризацию вторых слагаемых в S_1 и S_2, используя операцию интегрирования по частям:

$$E_\varepsilon^2(t,0) \int\limits_0^t E_\varepsilon^1(s,0) E_\varepsilon^2(0,s) G_2(t,s) w_1(s)\,ds = \varepsilon E_\varepsilon^2(t,0) \int\limits_0^t \frac{G_2(t,s) w_1(s)}{\mu_1(s)-\mu_2(s)} d(E_\varepsilon^1(s,0) E_\varepsilon^2(0,s)) =$$

$$= \varepsilon E_\varepsilon^2(t,0)\left[\frac{G_2(t,t)w_1(t)}{\mu_1(t)-\mu_2(t)}E_\varepsilon^1(t,0)E_\varepsilon^2(0,t) - \frac{G_2(t,0)w_1(0)}{\mu_1(0)-\mu_2(0)}\right] -$$

$$-\varepsilon E_\varepsilon^2(t,0)\int\limits_0^t E_\varepsilon^1(s,0)E_\varepsilon^2(0,s)\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G_2(t,s)w_1(s)}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\right)ds =$$

$$= \varepsilon\left[\frac{G_2(t,t)w_1(t)}{\mu_1(t)-\mu_2(t)}E_\varepsilon^1(t,0) - \frac{G_2(t,0)w_1(0)}{\mu_1(0)-\mu_2(0)}E_\varepsilon^2(t,0)\right] -$$

$$- \varepsilon E_\varepsilon^2(t,0)\int\limits_0^t E_\varepsilon^1(s,0)E_\varepsilon^2(0,s)\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G_2(t,s)w_1(s)}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\right)ds;$$

$$E_\varepsilon^1(t,0)\int\limits_0^t E_\varepsilon^2(s,0)E_\varepsilon^1(0,s)G_1(t,s)w_2(s)\,ds = \varepsilon E_\varepsilon^1(t,0)\int\limits_0^t \frac{G_1(t,s)w_2(s)}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}d(E_\varepsilon^2(s,0)E_\varepsilon^1(0,s)) =$$

$$= \varepsilon\left[\frac{G_1(t,t)w_2(t)}{\mu_2(t)-\mu_1(t)}E_\varepsilon^2(t,0) - \frac{G_1(t,0)w_2(0)}{\mu_2(0)-\mu_1(0)}E_\varepsilon^1(t,0)\right] -$$

$$- \varepsilon E_\varepsilon^1(t,0)\int\limits_0^t E_\varepsilon^2(s,0)E_\varepsilon^1(0,s)\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G_1(t,s)w_2(s)}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\right)ds.$$

Переходим к сумме S_3. Проводя аналогичные преобразования, будем иметь

$$S_3 = \varepsilon\sum_{j=1}^{2}E_\varepsilon^j(t,0)\sum_{|m|=2}^{N_w}\int\limits_0^t \frac{G_j(t,s)w^{(m)}(s)}{(m,\mu(s))-\mu_j(s)}d(E_\varepsilon^{[m]}(s)E_\varepsilon^j(0,s)) =$$

$$= \varepsilon\sum_{j=1}^{2}E_\varepsilon^j(t,0)\sum_{|m|=2}^{N_w}\left[\frac{G_j(t,t)w^{(m)}(t)}{(m,\mu(t))-\mu_j(t)}E_\varepsilon^{[m]}(t)E_\varepsilon^j(0,t) - \frac{G_j(t,0)w^{(m)}(0)}{(m,\mu(0))-\mu_j(0)}\right] -$$

$$- \varepsilon\sum_{j=1}^{2}E_\varepsilon^j(t,0)\sum_{|m|=2}^{N_w}\int\limits_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s)E_\varepsilon^j(0,s)\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G_j(t,s)w^{(m)}(s)}{(m,\mu(s))-\mu_j(s)}\right)ds =$$

$$= \varepsilon\sum_{j=1}^{2}\sum_{|m|=2}^{N_w}\left[\frac{G_j(t,t)w^{(m)}(t)}{(m,\mu(t))-\mu_j(t)}E_\varepsilon^{[m]}(t) - \frac{G_j(t,0)w^{(m)}(0)}{(m,\mu(0))-\mu_j(0)}E_\varepsilon^j(t,0)\right] -$$

$$- \varepsilon\sum_{j=1}^{2}E_\varepsilon^j(t,0)\sum_{|m|=2}^{N_w}\int\limits_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s)E_\varepsilon^j(0,s)\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G_j(t,s)w^{(m)}(s)}{(m,\mu(s))-\mu_j(s)}\right)ds.$$

В итоге первая сумма в (5) преобразуется к виду

$$\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)\sum_{|m|=1}^{N_w}G_j(t,s)w^{(m)}(s)E_\varepsilon^{[m]}(s)\,ds =$$

$$= E_\varepsilon^1(t,0)\int\limits_0^t G_1(t,s)w_1(s)\,ds + E_\varepsilon^2(t,0)\int\limits_0^t G_2(t,s)w_2(s)\,ds +$$

$$+\varepsilon\left[\frac{G_2(t,t)w_1(t)}{\mu_1(t)-\mu_2(t)}E_\varepsilon^1(t,0)-\frac{G_2(t,0)w_1(0)}{\mu_1(0)-\mu_2(0)}E_\varepsilon^2(t,0)\right]-$$

$$-\varepsilon E_\varepsilon^2(t,0)\int\limits_0^t E_\varepsilon^1(s,0)E_\varepsilon^2(0,s)\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G_2(t,s)w_1(s)}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\right)ds+$$

$$+\varepsilon\left[\frac{G_1(t,t)w_2(t)}{\mu_2(t)-\mu_1(t)}E_\varepsilon^2(t,0)-\frac{G_1(t,0)w_2(0)}{\mu_2(0)-\mu_1(0)}E_\varepsilon^1(t,0)\right]-$$

$$-\varepsilon E_\varepsilon^1(t,0)\int\limits_0^t E_\varepsilon^2(s,0)E_\varepsilon^1(0,s)\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G_1(t,s)w_2(s)}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\right)ds+$$

$$+\varepsilon\sum_{j=1}^2\sum_{|m|=2}^{N_w}\left[\frac{G_j(t,t)w^{(m)}(t)}{(m,\mu(t))-\mu_j(t)}E_\varepsilon^{[m]}(t)-\frac{G_j(t,0)w^{(m)}(0)}{(m,\mu(0))-\mu_j(0)}E_\varepsilon^j(t,0)\right]-$$

$$-\varepsilon\sum_{j=1}^2 E_\varepsilon^j(t,0)\sum_{|m|=2}^{N_w}\int\limits_0^t E_\varepsilon^{[m]}(s)E_\varepsilon^j(0,s)\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G_j(t,s)w^{(m)}(s)}{(m,\mu(s))-\mu_j(s)}\right)ds.$$

Преобразуем теперь вторую сумму в (5), используя операцию интегрирования по частям:

$$\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)G_j(t,s)w_0(s)\,ds=\varepsilon\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t\frac{G_j(t,s)w_0(s)}{-\mu_j(s)}dE_\varepsilon^j(t,s)=$$

$$=\varepsilon\sum_{j=1}^2\frac{G_j(t,s)w_0(s)}{-\mu_j(s)}E_\varepsilon^j(t,s)\bigg|_{s=0}^{s=t}-\varepsilon\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{G_j(t,s)w_0(s)}{-\mu_j(s)}\right)ds=$$

$$=\varepsilon\left[\sum_{j=1}^2\frac{G_j(t,t)w_0(t)}{-\mu_j(t)}-\frac{G_j(t,0)w_0(0)}{-\mu_j(0)}E_\varepsilon^j(t,0)\right]-\varepsilon\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{G_j(t,s)w_0(s)}{-\mu_j(s)}\right)ds.$$

Объединяя полученные результаты, будем иметь

$$J(t,\varepsilon)=\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)G_j(t,s)w_0(s)\,ds+\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t E_\varepsilon^j(t,s)\sum_{|m|=1}^{N_w}G_j(t,s)w^{(m)}(s)E_\varepsilon^{[m]}(s)\,ds=$$

$$=E_\varepsilon^1(t,0)\int\limits_0^t G_1(t,s)w_1(s)\,ds+E_\varepsilon^2(t,0)\int\limits_0^t G_2(t,s)w_2(s)\,ds+$$

$$+\varepsilon\left[\frac{G_2(t,t)w_1(t)}{\mu_1(t)-\mu_2(t)}E_\varepsilon^1(t,0)-\frac{G_2(t,0)w_1(0)}{\mu_1(0)-\mu_2(0)}E_\varepsilon^2(t,0)\right]-$$

$$-\varepsilon E_\varepsilon^2(t,0)\int\limits_0^t E_\varepsilon^1(s,0)E_\varepsilon^2(0,s)\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G_2(t,s)w_1(s)}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\right)ds+$$

$$+\varepsilon\left[\frac{G_1(t,t)w_2(t)}{\mu_2(t)-\mu_1(t)}E_\varepsilon^2(t,0)-\frac{G_1(t,0)w_2(0)}{\mu_2(0)-\mu_1(0)}E_\varepsilon^1(t,0)\right]-$$

$$
-\varepsilon E^1_\varepsilon(t,0)\int\limits_0^t E^2_\varepsilon(s,0)E^1_\varepsilon(0,s)\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G_1(t,s)w_2(s)}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\right)ds+
$$

$$
+\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\sum_{|m|=2}^{N_w}\int\limits_0^t\left[\frac{G_j(t,t)w^{(m)}(t)}{(m,\mu(t))-\mu_j(t)}E^{[m]}_\varepsilon(t)-\frac{G_j(t,0)w^{(m)}(0)}{(m,\mu(0))-\mu_j(0)}E^j_\varepsilon(t,0)\right]-
$$

$$
-\varepsilon\sum_{j=1}^{2}E^j_\varepsilon(t,0)\sum_{|m|=2}^{N_w}\int\limits_0^t E^{[m]}_\varepsilon(s)E^j_\varepsilon(0,s)\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G_j(t,s)w^{(m)}(s)}{(m,\mu(s))-\mu_j(s)}\right)ds+
$$

$$
+\varepsilon\left[\sum_{j=1}^{2}\frac{G_j(t,t)w_0(t)}{-\mu_j(t)}-\frac{G_j(t,0)w_0(0)}{-\mu_j(0)}E^j_\varepsilon(t,0)\right]-\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^t E^j_\varepsilon(t,s)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{G_j(t,s)w_0(s)}{-\mu_j(s)}\right)ds.
$$

Продолжая этот процесс далее, приходим к разложению

$$
Jw(t,\tau)=E^1_\varepsilon(t,0)\int\limits_0^t G_1(t,s)w_1(s)\,ds+E^2_\varepsilon(t,0)\int\limits_0^t G_2(t,s)w_2(s)\,ds+
$$

$$
\begin{gathered}
+\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\varepsilon^{\nu+1}\{[(I^\nu_{12}(G_1(t,s)w_2(s)))_{s=t}E^2_\varepsilon(t,0)-(I^\nu_{12}(G_1(t,s)w_2(s)))_{s=0}E^1_\varepsilon(t,0)]+\\
+[(I^\nu_{21}(G_2(t,s)w_1(s)))_{s=t}E^1_\varepsilon(t,0)-(I^\nu_{21}(G_2(t,s)w_1(s)))_{s=0}E^2_\varepsilon(t,0)]+\\
+\sum_{j=1}^{2}[(I^\nu_{j0}(G_j(t,s)w_0(s)))_{s=t}-(I^\nu_{j0}(G_j(t,s)w_0(s)))_{s=0}E^j_\varepsilon(t,s)]+\\
+\sum_{j=1}^{2}\sum_{m|=2}^{N_w}[(I^\nu_{m,j}(G_j(t,s)w^{(m)}(s)))_{s=t}E^{[m]}_\varepsilon(t)-(I^\nu_{m,j}(G_j(t,s)w^{(m)}(s)))_{s=0}E^j_\varepsilon(t,0)]\},
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где введены операторы

$$
I^0_{12}=\frac{1}{\mu_2(s)-\mu_1(s)},\quad I^\nu_{12}=\frac{1}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\frac{\partial}{\partial s}I^{\nu-1}_{12},\quad I^0_{21}=\frac{1}{\mu_1(s)-\mu_2(s)},
$$

$$
I^\nu_{21}=\frac{1}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}I^{\nu-1}_{21},\quad I^0_{m.j}=\frac{1}{(m,\mu(s))-\mu_j(s)},\quad I^\nu_{m.j}=\frac{1}{(m,\mu(s))-\mu_j(s)}\frac{\partial}{\partial s}I^{\nu-1}_{m.j},
$$

$$
I^0_{j0}=\frac{1}{-\mu_j(s)},\quad I^\nu_{j0}=\frac{1}{-\mu_j(s)}\frac{\partial}{\partial s}I^{\nu-1}_{j0},\quad j=1,2,\quad |m|=2,3,\ldots,\quad \nu=1,2,\ldots
$$

При этом нетрудно показать (см. [5, с. 294]), что ряд справа в (6) сходится к функции $Jw(t,\varepsilon)$ (при $\varepsilon\to+0$) равномерно по $t\in[0,T]$.

Введём операторы порядка (по ε) $R_m:U\to U$ равенствами

$$
R_0w(t,\tau)=e^{\tau_1}\int\limits_0^t G_1(t,s)w_1(s)\,ds+e^{\tau_2}\int\limits_0^t G_2(t,s)w_2(s)\,ds,
$$

$$
\begin{gathered}
R_{\nu+1}w(t,\tau)=(-1)^\nu\{[(I^\nu_{12}(G_1(t,s)w_2(s)))_{s=t}e^{\tau_2}-(I^\nu_{12}(G_1(t,s)w_2(s)))_{s=0}e^{\tau_1}]+\\
+[(I^\nu_{21}(G_2(t,s)w_1(s)))_{s=t}e^{\tau_1}-(I^\nu_{21}(G_2(t,s)w_1(s)))_{s=0}e^{\tau_2}]+
\end{gathered}
$$

$$+\sum_{j=1}^{2}[(I_{j0}^{\nu}(G_j(t,s)w_0(s)))_{s=t}-(I_{j0}^{\nu}(G_j(t,s)w_0(s)))_{s=0}e^{\tau_j}]+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{m|=2}^{N_w}[(I_{m,j}^{\nu}(G_j(t,s)w^{(m)}(s)))_{s=t}e^{(m,\tau)}-(I_{m,j}^{\nu}(G_j(t,s)w^{(m)}(s)))_{s=0}e^{\tau_j}]\},\quad \nu\geqslant 0, \tag{7}$$

где $\tau=\psi(t)/\varepsilon$. Тогда образ $Jw(t,\tau)$ можно записать в виде

$$Jw(t,\tau)=R_0w(t,\tau)+\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}R_{m+1}w(t,\tau).$$

Проведём расширение оператора J на рядах вида

$$\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(t,\tau) \tag{8}$$

с коэффициентами $w_k(t,\tau)\in U$, $k\geqslant 0$.

Определение 1. *Формальным расширением* $\tilde{J}$ оператора J на рядах вида (8) называется оператор

$$\tilde{J}\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^{\nu}\sum_{s=0}^{\nu}R_{\nu-s}w_s(t,\tau).$$

Несмотря на то, что расширение $\tilde{J}$ оператора J определено формально, им вполне можно пользоваться (см. ниже теорему 3) при построении асимптотического решения конечного порядка по ε. Теперь несложно записать регуляризованную (по отношению к (2)), задачу

$$L_\varepsilon\tilde{w}\equiv\varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\mu_1(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_1}+\mu_2(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_2}-A(t)\tilde{w}-\varepsilon A_1(t)\tilde{w}-\varepsilon\tilde{J}\tilde{w}=\varepsilon F(\tilde{w},t),$$

$$\tilde{w}(0,0,\varepsilon)=\{y^0,0,0\}. \tag{9}$$

2. Разрешимость итерационных задач. Подставляя ряд (8) в задачу (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующие итерационные задачи:

$$L_0w_0(t,\tau)\equiv\mu_1(t)\frac{\partial w_0}{\partial\tau_1}+\mu_2(t)\frac{\partial w_0}{\partial\tau_2}-A(t)w_0=0,$$

$$w_0(0,0)=w^0; \tag{10_0}$$

$$L_0w_1(t,\tau)=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+A_1(t)w_0+F(w_0,t)+R_0w_0,$$

$$w_1(0,0)=0; \tag{10_1}$$

$$\ldots$$

$$L_0w_k(t,\tau)=-\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t}+A_1(t)w_{k-1}+P_k(w_0,\ldots,w_{k-1},t)+R_0w_{k-1}+R_1w_{k-2}+\ldots+R_kw_{-1},$$

$$w_k(0,0)=0,\quad k\geqslant 1, \tag{10_k}$$

где $P_k(w_0,w_1,\ldots,w_{k-1},t)$ – некоторый многочлен от w_0, $\ldots$, w_{k-1}, линейный относительно w_{k-1}.

Переходя к формулировке теорем о нормальной и однозначной разрешимости итерационных задач (10_k), вычислим собственные векторы $\varphi_j(t)$ и $\chi_j(t)$ матриц $A(t)$ и $A^*(t)$ соответственно. Нетрудно проверить, что они имеют вид

$$\varphi_0(t)=\{1,0,0\},\quad \varphi_1(t)=\Big\{1/\mu_1(t),1,0\Big\},\quad \varphi_2(t)=\Big\{1/\mu_2(t),0,1\Big\},$$

$$\chi_0(t)=\Big\{1,-1/\bar\mu_1(t),-1/\bar\mu_2(t)\Big\},\quad \chi_1(t)=\{0,1,0\},\quad \chi_2(t)=\{0,0,1\},$$

причём векторы $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ соответствуют собственным значениям $\lambda_0(t)\equiv 0$, $\lambda_1(t)\equiv \equiv \mu_1(t)$, $\lambda_2(t)\equiv\mu_2(t)$ матрицы $A(t)$, а векторы $\chi_0(t)$, $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ – собственным значениям $\bar\lambda_0(t)\equiv 0$, $\bar\lambda_1(t)\equiv\bar\mu_1(t)$, $\bar\lambda_2(t)\equiv\bar\mu_2(t)$ матрицы $A^*(t)$ соответственно.

Каждая из итерационных систем (10_k) имеет вид

$$L_0w(t,\tau)\equiv\mu_1(t)\frac{\partial w}{\partial\tau_1}+\mu_2(t)\frac{\partial w}{\partial\tau_2}-A(t)w=P(t,\tau), \tag{11}$$

где $P(t,\tau)=P_0(t)+P_1(t)e^{\tau_1}+P_2(t)e^{\tau_2}+\sum_{|m|=2}^{N_P}P^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\in U$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1)–5) и $P(t,\tau)\in U$. Для того чтобы система (11) имела решение в пространстве U, необходимо и достаточно, чтобы**) имели место тождества

$$(P_j(t),\chi_j(t))\equiv 0,\quad j=0,1,2,\quad t\in[0,T]. \tag{12}$$

Доказательство. Будем искать решение системы (11) в виде суммы (4). Подставляя (4) в (11), получаем равенство

$$\mu_1(t)w_1(t)e^{\tau_1}+\sum_{|m|=2}^{N_w}\mu_1(t)m_1w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}+\mu_2(t)w_2(t)e^{\tau_2}+\sum_{|m|=2}^{N_w}\mu_2(t)m_2w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}-$$

$$-A(t)w_0(t)-A(t)w_1(t)e^{\tau_1}-A(t)w_2(t)e^{\tau_2}-\sum_{|m|=2}^{N_w}A(t)w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}=$$

$$=P_0(t)+P_1(t)e^{\tau_1}+P_2(t)e^{\tau_2}+\sum_{|m|=2}^{N_P}P^{(m)}(t)e^{(m,\tau)},$$

или

$$-A(t)w_0(t)+[\mu_1(t)I-A(t)]e^{\tau_1}+[\mu_2(t)I-A(t)]e^{\tau_2}+\sum_{|m|=2}^{N_w}[(m,\mu(t)I-A(t))]w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}=$$

$$=P_0(t)+P_1(t)e^{\tau_1}+P_2(t)e^{\tau_2}+\sum_{|m|=2}^{N_P}P^{(m)}(t)e^{(m,\tau)},$$

где I – единичная матрица.

В силу линейной независимости экспонент 1, e^{τ_1}, e^{τ_2}, $e^{(m,\tau)}$ $(|m|\geqslant 2)$ это равенство имеет место лишь при $N_w=N_P$. Приравнивая отдельно коэффициенты при одинаковых функциях $e^{(m,\tau)}$ и свободные члены, будем иметь

$$\begin{gathered}[\mu_j(t)I-A(t)]w_j(t)=P_j(t)\quad(j=1,2),\\ -A(t)w_0(t)=P_0(t),\\ [(m,\mu(t))I-A(t)]w^{(m)}(t)=P^{(m)}(t),\quad 2\leqslant|m|\leqslant N_P.\end{gathered} \tag{13}$$

---

*) Здесь и всюду далее через $(\,,)$ обозначено стандартное скалярное произведение в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$.

Так как выполнено предположение 5) об отсутствии резонанса, то последняя система имеет единственное решение при каждом m $(2 \leqslant |m| \leqslant N_P)$:

$$w^{(m)}(t) = [(m, \mu(t))I - A(t)]^{-1} P^{(m)}(t), \quad 2 \leqslant |m| \leqslant N_P. \tag{14}$$

Сделаем в первых трёх системах из (13) замены переменных $w_j(t) = \Phi(t)\xi_j$, $w_0(t) = \Phi(t)\eta$, $j = 1, 2$, где $\Phi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t))$ – матрица из собственных векторов оператора $A(t)$. Умножая полученные системы слева на $\Phi^{-1}(t)$ и учитывая, что $(\Phi^{-1}(t))^* = \chi(t) \equiv (\chi_0(t), \chi_1(t), \chi_2(t))$ – матрица из собственных векторов сопряжённого оператора $A^*(t)$, будем иметь

$$[\mu_j(t)I - \Lambda(t)]\xi_j(t) = \{(P_j(t), \chi_0(t)), (P_j(t), \chi_1(t)), (P_j(t), \chi_2(t))\}, \quad j = 1, 2,$$

$$-\Lambda\eta(t) = \{(P_0(t), \chi_0(t)), (P_0(t), \chi_1(t)), (P_0(t), \chi_2(t))\},$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}(\mu_0(t), \mu_1(t), \mu_2(t)) \equiv \operatorname{diag}(0, \mu_1(t), \mu_2(t))$. Запишем эти системы более подробно (аргумент t везде опускаем и обозначаем $\xi_j = \{\xi_j^1, \xi_j^2, \xi_j^3\}$, $\eta = \{\eta^1, \eta^2, \eta^3\}$):

$$\begin{pmatrix} \mu_j & 0 & 0 \\ 0 & \mu_j - \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_j - \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_j^1 \\ \xi_j^2 \\ \xi_j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_j, \chi_0) \\ (P_j, \chi_1) \\ (P_j, \chi_2) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \tag{14_j}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_0, \chi_0) \\ (P_0, \chi_1) \\ (P_0, \chi_2) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Видим, что вторая строка матрицы системы (14_1) $(j = 1)$ нулевая, поэтому для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество $(P_1(t), \chi_1(t)) \equiv 0$; при этом $\xi_1^2(t) \equiv \alpha_1(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – произвольная скалярная функция. И аналогично, третья строка матрицы системы (14_2) $(j = 2)$ нулевая, поэтому для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество $(P_2(t), \chi_2(t)) \equiv 0$; при этом $\xi_2^3(t) \equiv \alpha_2(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – произвольная скалярная функция. Поскольку в системе (15) первая строка нулевая, то для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество $(P_0(t), \chi_0(t)) \equiv 0$; при этом $\eta^1(t) \equiv \alpha_0(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – произвольная скалярная функция. Таким образом, для разрешимости систем (13) (а значит, и системы (11)) необходимо и достаточно выполнения условий (12). Теорема доказана.

Замечание 1. Если выполнены условия (12), то, как это видно из (14) и уравнений (14_j) и (15) (с учётом того, что $w_j(t) = \Phi(t)\xi_j$, $w_0(t) = \Phi(t)\eta$, $j = 1, 2$), система (11) имеет следующее решение в пространстве U:

$$w(t, \tau) = \left[\alpha_1(t)\varphi_1(t) + \frac{(P_1(t), \chi_0(t))}{\mu_1(t)}\varphi_0(t) + \frac{(P_1(t), \chi_2(t))}{\mu_1(t) - \mu_2(t)}\varphi_2(t)\right] e^{\tau_1} +$$

$$+ \left[\alpha_2(t)\varphi_2(t) + \frac{(P_2(t), \chi_0(t))}{\mu_2(t)}\varphi_0(t) + \frac{(P_2(t), \chi_1(t))}{\mu_2(t) - \mu_1(t)}\varphi_1(t)\right] e^{\tau_2} +$$

$$+ \left[\alpha_0(t)\varphi_0(t) + \frac{(P_0(t), \chi_1(t))}{-\mu_1(t)}\varphi_1(t) + \frac{(P_0(t), \chi_2(t))}{-\mu_2(t)}\varphi_2(t)\right] + \sum_{|m|=2}^{N_P} [(m, \mu(t))I - A(t)]^{-1} P^{(m)}(t) e^{(m, \tau)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{2} \left[\alpha_j(t)\varphi_j(t) + \sum_{k=0, k\neq j}^{2} p_{jk}(t)\varphi_k(t)\right] e^{\tau_j} + \alpha_0(t)\varphi_0(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} p_{0k}(t)\varphi_k(t) + \sum_{|m|=2}^{N_P} [(m, \mu(t))I - A(t)]^{-1} P^{(m)}(t) e^{(m, \tau)}, \tag{16}$$

где $\alpha_j(t) \in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$ – произвольные функции, $p_{jk}(t) \equiv (P_j(t),\chi_k(t))/(\mu_j(t)-\mu_k(t))$, $j,k=0,1,2$.

Обозначим через $U^{(k)}$ подпространство пространства U однородных относительно e^{τ_1}, e^{τ_2} многочленов степени k:

$$z(t,u)=\sum_{|m|=k} z^{(m)}(t)e^{(m,\tau)},\quad z^{(m)}(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^3),\quad |m|=k=0,1,2,\ldots,$$

с присоединённым к ним элементом $0\equiv\sum_{|m|=k}0\cdot e^{(m,\tau)}$. В пространстве $U^{(k)}$ введём скалярное (при каждом $t\in[0,T]$) произведение

$$\langle w^{(k)}(t,u),z^{(k)}(t,u)\rangle \equiv \left\langle \sum_{|m|=k} w^{(k)}(t)e^{(m,\tau)}, z^{(k)}(t)e^{(m,\tau)}\right\rangle \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=}\sum_{|m|=k}(w^{(k)}(t),z^{(k)}(t))=\sum_{|m|=k}(w^{(k)}(t))^{\text{т}}\cdot\overline{z^{(k)}(t)}.$$

Если $w(t,\tau)$ – элемент (4) пространства U, то через $w^{(k)}(t,u)$ будем обозначать сумму его слагаемых, принадлежащую пространству $U^{(k)}$.

Рассмотрим систему (11) при дополнительных условиях

$$w(0,0)=w^*,$$

$$\left\langle -\frac{\partial w^{(1)}}{\partial t}+A_1(t)w^{(1)}+R_0w^{(1)}+Q^{(1)}(t,\tau),\chi_j(t)e^{\tau_j}\right\rangle\equiv 0,\quad j=1,2,\quad t\in[0,T];$$

$$\left\langle -\frac{\partial w^{(0)}}{\partial t}+A_1(t)w^{(0)}+R_0w^{(0)}+Q^{(0)}(t,\tau),\chi_0(t)\right\rangle\equiv 0,\quad t\in[0,T], \tag{17}$$

где $Q(t,\tau)=Q_1(t)e^{\tau_1}+Q_2(t)e^{\tau_2}+Q_0(t)+\sum_{|m|=2}^{N_P}Q^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\in U$ – известная функция, $w^*\in\mathbb{C}^3$ – известный постоянный вектор.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1)–5) и вектор-функция $P(t,\tau)\in U$ удовлетворяет условиям (12). Тогда система (11) при дополнительных условиях (17) однозначно разрешима в пространстве U.*

Доказательство. Так как выполнены условия (12), то система (11) имеет решение (16) в пространстве U, где функции $\alpha_j(t)$ пока произвольны. Подчинив решение (16) начальному условию $w(0,0)=w^*$, получим равенство

$$\sum_{j=0}^{2}\left[\alpha_j(0)\varphi_j(0)+\sum_{k=0,k\neq j}^{2}p_{jk}(0)\varphi_k(0)\right]+\sum_{|m|=2}^{N_w}[(m,\mu(0))I-A(0)]^{-1}P^{(m)}(0)=w^*,$$

т.е.

$$\sum_{j=0}^{2}\alpha_j(0)\varphi_j(0)=w_*, \tag{18}$$

где

$$w_*=w^*-\sum_{j=0}^{2}\left[\sum_{k=0,k\neq j}^{2}p_{jk}(0)\varphi_k(0)\right]-\sum_{|m|=2}^{N_w}[(m,\mu(0))I-A(0)]^{-1}P^{(m)}(0).$$

Умножая равенство (18) скалярно на $\chi_s(0)$, будем иметь

$$\alpha_s(0)=(w_*,\chi_s(0)),\quad s=0,1,2. \tag{19}$$

Вычислим теперь выражения

$$-\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t}+A_1(t)w^{(k)}+R_0w^{(k)}+Q^{(k)}(t,\tau),\quad k=0,1,2.$$

Поскольку в эти выражения не входят экспоненты измерения $|m|\geqslant 2,$ то в решении (16) можно ограничиться суммой

$$\hat{w}(t,\tau)=\sum_{j=1}^{2}\bigg[\alpha_j(t)\varphi_j(t)+\sum_{k=0,k\neq j}^{2}p_{jk}(t)\varphi_k(t)\bigg]e^{\tau_j}+\alpha_0(t)\varphi_0(t)+\sum_{k=1}^{2}p_{0k}(t)\varphi_k(t).$$

Учитывая определение в (7) оператора $R_0,$ будем иметь*)

$$-\frac{\partial\hat{w}}{\partial\tau}+A_1(t)\hat{w}+R_0\hat{w}+\hat{Q}(t,\tau)=-\sum_{j=1}^{2}\bigg[(\alpha_j(t)\varphi_j(t))^{\bullet}+\sum_{k=0,k\neq j}^{2}(p_{jk}(t)\varphi_k(t))^{\bullet}\bigg]e^{\tau_j}-$$

$$-(\alpha_0(t)\varphi_0(t))^{\bullet}+\sum_{k=1}^{2}(p_{0k}(t)\varphi_0(t))^{\bullet}+\sum_{j=1}^{2}\bigg[\alpha_j(t)A_1(t)\varphi_j(t)+\sum_{k=0,k\neq j}^{2}p_{jk}(t)A_1(t)\varphi_k(t)\bigg]e^{\tau_j}+$$

$$+\alpha_0(t)A_1(t)\varphi_0(t)+\sum_{k=1}^{2}p_{0k}(t)A_1(t)\varphi_k(t)+e^{\tau_1}\int_0^t G_1(t,s)\bigg[\alpha_1(s)\varphi_1(s)+\sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{2}p_{1k}(s)\varphi_k(s)\bigg]\,ds+$$

$$+e^{\tau_2}\int_0^t G_2(t,s)\bigg[\alpha_2(s)\varphi_2(s)+\sum_{k=0}^{1}p_{2k}(s)\varphi_k(s)\bigg]\,ds+\sum_{j=1}^{2}Q_j(t)e^{\tau_j}+Q_0(t).$$

Далее эту функцию надо подчинить условиям (17). Начнём с последнего условия в (17), т.е., что равносильно, с условия

$$\bigg\langle-\frac{\partial\hat{w}^{(0)}}{\partial t}+A_1(t)\hat{w}^{(0)}+R_0\hat{w}^{(0)}+Q^{(0)}(t,\tau),\chi_0(t)\bigg\rangle\equiv 0,\quad t\in[0,T].$$

Учитывая биортонормированность систем $\{\varphi_j(t)\}$ и $\{\chi_k(t)\},$ запишем это условие в виде

$$\dot{\alpha}_0(t)=(A_1(t)\varphi_0(t)-\dot{\varphi}_0(t),\chi_0(t))\alpha_0(t)+q_0(t),\tag{20}$$

где обозначено

$$q_0(t)\equiv\bigg(Q_0(t)-\sum_{k=1}^{2}(p_{0k}(t)\varphi_k(t))^{\bullet}+\sum_{k=0}^{1}p_{0k}(t)A_1(t)\varphi_k(t),\chi_0(t)\bigg).$$

Получено дифференциальное уравнение относительно функции $\alpha_0(t).$ В случае первых двух условий в (17) аналогично получим интегро-дифференциальные уравнения

$$\dot{\alpha}_1(t)=(A_1(t)\varphi_1(t)-\dot{\varphi}_1(t),\chi_1(t))\alpha_1(t)+\int_0^t(G_1(t,s)\varphi_1(s),\chi_1(t))\alpha_1(s)\,ds+q_1(t),$$

$$\dot{\alpha}_2(t)=(A_1(t)\varphi_2(t)-\dot{\varphi}_2(t),\chi_2(t))\alpha_2(t)+\int_0^t(G_2(t,s)\varphi_2(s),\chi_2(t))\alpha_2(s)\,ds+q_2(t),\tag{21}$$

*) Жирная точка означает дифференцирование по $t.$

где обозначено

$$q_1(t) \equiv (Q_1(t) - \sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{2} (p_{1k}(t)\varphi_k(t))^{\bullet} + \sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{2} p_{1k}(t)A_1(t)\varphi_k(t) + \sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{2} \int\limits_0^t p_{1k}(s)G_1(t,s)\varphi_k(s)\,ds, \chi_1(t)),$$

$$q_2(t) \equiv (Q_2(t) - \sum_{k=0}^{1} (p_{2k}(t)\varphi_k(t))^{\bullet} + \sum_{k=0}^{1} p_{2k}(t)A_1(t)\varphi_k(t) + \sum_{k=0}^{1} \int\limits_0^t p_{2k}(s)G_2(t,s)\varphi_k(s)\,ds, \chi_2(t)).$$

Присоединяя к уравнениям (20) и (21) начальные условия (19) и решая полученные начальные задачи, найдём однозначно функции $\alpha_j(t)$, а значит, однозначно вычислим в пространстве U решение (16) системы (11) при дополнительных условиях (17). Теорема доказана.

Решения итерационных задач $w_k(t,\tau) \in U$ находятся с помощью применения теорем 1 и 2. Покажем, как это можно сделать на примере первой итерационной задачи (10_0).

3. Построение решений итерационных задач. Рассмотрим первую итерационную задачу (10_0). Построим её решение, не используя выкладки, полученные в предыдущем параграфе. Так как её правая часть $P = P^{(0)}(t,\tau)$ тождественно нулевая, то условия ортогональности (12) для задачи (10_0) выполнены автоматически. Поэтому задача (10_0) имеет следующее решение (см. формулу (16)):

$$w_0(t,\tau) = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), \tag{22}$$

где $\alpha_j^{(0)}(t) \in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$ – пока произвольные функции. При этом система (10_1) принимает вид

$$L_0 w_1(t,\tau) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t)\right) + A_1(t)\left(\sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t)\right) +$$
$$+ F\left(\sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t\right) + R_0 w_0 \equiv P^{(1)}(t,\tau). \tag{23}$$

Эта система будет разрешимой в пространстве U тогда и только тогда, когда свободный член $P_0(t)$ и коэффициенты $P_j(t)$ при экспонентах e^{τ_i} (измерения $|m| = 1$) её правой части $P^{(1)}(t,\tau)$ удовлетворяют условиям ортогональности (12). Выделим $P_0(t)$ и $P_j(t)$ в правой части $P^{(1)}(t,\tau)$. Используя формулу Тейлора, будем иметь

$$F\left(\sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t\right) = F(\alpha_0^{(0)}(t), t) + \frac{\partial F(\alpha_0^{(0)}(t), t)}{\partial w} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + r(e^{\tau_1}, e^{\tau_2}, t),$$

где функция $r(e^{\tau_1}, e^{\tau_2}, t)$ содержит члены с экспонентами $e^{(m,\tau)}$ измерения $|m| \geqslant 2$. Учитывая определение в (7) оператора R_0, выделим в $P^{(1)}(t,\tau)$ выражение $\hat{P}^{(1)}(t,\tau)$, не содержащее экспоненты $e^{(m,\tau)}$ измерения $|m| \geqslant 2$:

$$\hat{P}^{(1)}(t,\tau) = -(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t))^{\bullet} + A_1(t)(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t)) + F(\alpha_0^{(0)}(t), t) - \sum_{j=1}^{2} (\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t))^{\bullet} e^{\tau_j} +$$
$$+ A_1(t)\left(\sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j}\right) + \frac{\partial F(\alpha_0^{(0)}(t), t)}{\partial w} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \sum_{j=1}^{2} e^{\tau_j} \int\limits_0^t G_j(t,s)\alpha_j^{(0)}(s)\varphi_j(s)\,ds.$$

Теперь нетрудно записать условия ортогональности (12) для задачи (23) (при этом нужно учесть, что $\dot{\varphi}_0(t) \equiv 0$):

$$\dot{\alpha}_0^{(0)}(t) = (A_1(t)\varphi_0(t), \chi_0(t))\alpha_0^{(0)}(t) + F(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t),$$

$$\dot{\alpha}_1^{(0)}(t) = (A_1(t)\varphi_1(t) - \dot{\varphi}_1(t), \chi_1(t))\alpha_1^{(0)}(t) + \int\limits_0^t (G_1(t,s)\varphi_1(s), \chi_1(t))\alpha_1^{(0)}(s)\,ds +$$

$$+ \left(\frac{\partial F(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t)}{\partial w}\varphi_1(t), \chi_1(t)\right)\alpha_1^{(0)}(t),$$

$$\dot{\alpha}_2^{(0)}(t) = (A_1(t)\varphi_2(t) - \dot{\varphi}_2(t), \chi_2(t))\alpha_2^{(0)}(t) + \int\limits_0^t (G_2(t,s)\varphi_2(s), \chi_2(t))\alpha_2^{(0)}(s)\,ds +$$

$$+ \left(\frac{\partial F(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t)}{\partial w}\varphi_2(t), \chi_2(t)\right)\alpha_2^{(0)}(t). \qquad (24)$$

Начальные условия для этой системы находим из равенства $w_0(0,0) = w^0$, т.е. равенства

$$\sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{(0)}(0)\varphi_j(0) + \alpha_0^{(0)}(0)\varphi_0(0) = w^0,$$

из которого следует, что

$$\alpha_0^{(0)}(0) = (w^0, \chi_0(0)) = y^0, \quad \alpha_j^{(0)}(0) = (w^0, \chi_j(0)) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Поскольку интегро-дифференциальные уравнения (24) для функций $\alpha_j^{(0)}(t)$ $(j = 1, 2)$ являются однородными, получаем тождества $\alpha_j^{(0)}(t) \equiv 0$ $(j = 1, 2)$. Для функции $\alpha_0^{(0)}(t)$, учитывая вид $A_1(t)$ и равенство $\varphi_0(t) = \{1, 0, 0\}$, приходим к нелинейной задаче Коши

$$\dot{\alpha}_0^{(0)}(t) = -\left(\sum_{j=1}^{2} \frac{K_j(t,t)}{\mu_j(t)}\right)\alpha_0^{(0)}(t) + f(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t), \quad \alpha_0^{(0)}(0) = y^0, \qquad (25)$$

вопрос о разрешимости в целом которой на отрезке $[0, T]$ представляет собой самостоятельную и весьма нетривиальную задачу. Поэтому введём ещё одно предположение:

6) задача (25) разрешима на отрезке $[0, T]$.

В этом случае решение (22) первой итерационной задачи (10_0) будет найдено в пространстве U в виде

$$w_0(t, \tau) = \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t).$$

Оно, как сказано выше, не содержит функций пограничного слоя. Что же касается следующих итерационных задач (10_k), $k \geqslant 1$, то для них уравнения для функций $\alpha_j^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots,$ $j = 0, 1, 2)$ будут линейными и поэтому разрешимыми в целом на отрезке $[0, T]$.

Замечание 2. Для задачи (1) в действительном случае предположение 6) будет выполнено (см. [6, с. 412–413]), если потребовать, чтобы существовала постоянная γ такая, что при всех $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$-\left(\sum_{j=1}^{2} \frac{K_j(t,t)}{\mu_j(t)}\right) + \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \leqslant \gamma. \qquad (26)$$

Это неравенство выполняется, например, для задачи (1), в которой $\mu_1(\theta) = -1$, $\mu_2(\theta) = -\sqrt{2}$ и $f(y,t) = -2y^3$. В этом случае неравенство (26) принимает вид $m(t) - 6y^2 \leqslant \gamma$, где обозначено $m(t) = K_1(t,t) + K_2(t,t)/\sqrt{2}$. Оно выполняется, если взять постоянную γ такой, чтобы $\gamma > \max\{m(t) : t \in [0,T]\}$.

При этом задача (25) будет иметь следующее решение:

$$\alpha_0^{(0)}(t) = \left(\left(4\left(\int_0^t e(s)\,ds\right)(y^0)^2 + 1\right)e(t)y^0\right)^{1/2}\left(4\left(\int_0^t e(s)\,ds\right)y_0^2 + 1\right)^{-1},$$

где $e(s) \equiv \exp(2\int_0^s m(\theta)\,d\theta)$.

При выполнении предположений 1)–6) можно построить ряд (8) с коэффициентами $w_k(t,\tau) \in U$. Так же, как и в [7], доказывается следующий результат.

Теорема 3. *Пусть для системы (2) выполнены предположения 1)–6). Тогда при* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *(*$\varepsilon_0 > 0$ *– достаточно мало) система (2) имеет единственное решение* $w(t,\varepsilon) \in \mathrm{C}^1([0,T],\mathbb{C}^3)$ *и имеет место оценка*

$$\|w(t,\varepsilon) - w_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant c_N\varepsilon^{N+1}, \quad N = 0,1,2,\ldots,$$

где $w_{\varepsilon N}(t)$ *– сужение (при* $\tau = \psi(t)/\varepsilon$*)* N*-й частичной суммы ряда (8) (с коэффициентами* $w_k(t,\tau) \in U$*, удовлетворяющими итерационным задачам (*10_k*)), а постоянная* $c_N > 0$ *не зависит от* ε *при* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Поскольку решение $y(t,\varepsilon)$ исходной задачи (1) является первой компонентой вектор-функции $w(t,\varepsilon)$, то для него (при предположениях 1)–6)) также справедлива оценка

$$\|y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant c_N\varepsilon^{N+1}, \quad N = 0,1,2,\ldots,$$

в которой постоянная $c_N > 0$ не зависит от ε при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
3. *Бободжанова М.А.* Сингулярно возмущенные интегродифференциальные системы с нулевым оператором дифференциальной части // Вестн. Моск. энергетич. ин-та. 2010. № 6. С. 63–72.
4. *Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф.* Асимптотический анализ сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем с нулевым оператором дифференциальной части // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 519–536.
5. *Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А.* Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации. М., 2012.
6. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. М., 1994.
7. *Бободжанова М.А.* Обоснование метода регуляризации для нелинейных интегродифференциальных уравнений с нулевым оператором дифференциальной части // Вестн. Моск. энергетич. ин-та. 2011. № 6. С. 85–95.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 04.02.2021 г.
После доработки 11.04.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.