ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 6, с. 796–820

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.977.58+517.957.6+519.632.4

АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

© 2021 г. **Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова**

Рассматриваются задачи оптимального управления процессами, описываемыми первой краевой задачей для эллиптических уравнений со смешанными производными и неограниченной нелинейностью. Управления содержатся в коэффициентах при старших производных уравнения состояния. Построены и исследованы разностные аппроксимации нелинейных моделей оптимизации, причём для нахождения приближённого решения нелинейной краевой задачи для состояния построен реализующий её итерационный процесс. Проведено строгое исследование сходимости итерационного процесса, с помощью которого доказаны существование и единственность решения нелинейной разностной схемы, аппроксимирующей исходную краевую задачу для состояния. Установлены согласованные с гладкостью искомого решения оценки скорости сходимости разностных схем в сеточной $W^2_{2,0}(\omega)$-норме, аппроксимирующих нелинейное уравнение для состояния. Исследована сходимость аппроксимаций задач оптимального управления по состоянию, функционалу и управлению, проведена регуляризация аппроксимаций.

DOI: 10.31857/S0374064121060078

Введение. В статье разрабатываются и исследуются разностные аппроксимации задач оптимального управления для систем, описываемых нелинейными эллиптическими уравнениями с обобщёнными решениями (состояниями) и неограниченной нелинейностью. Здесь функции, входящие в главную часть основного дифференциального оператора (в старшие коэффициенты), рассматриваются как управляемые параметры. В случае неограниченной нелинейности при исследовании фундаментальных свойств разностных схем (устойчивость, сходимость) для нелинейных уравнений предполагается, что коэффициенты уравнений, зависящие от точного решения u, удовлетворяют нужным свойствам (положительная определённость, ограниченность производных по переменной u) не для всех возможных значений, а лишь на множестве значений точного решения или в его малой окрестности.

Отметим, что модели, описываемые стационарными уравнениями со смешанными производными и неограниченной нелинейностью, имеют важное прикладное значение (к примеру, дифференциальные уравнения со смешанными производными возникают, в частности, в задачах о распределении тепла в анизотропной среде, о потоках подземных вод, в финансовой математике при оценке опционов в моделях стохастической волатильности или в численной математике при преобразовании координат и т.д.) и потому являются объектом пристального изучения, см., например, [1–5], в том числе с позиций теории оптимального управления [6–8].

Среди работ, посвящённых исследованию сходимости конкретных разностных схем для нестационарных задач с неограниченными нелинейностями, отметим работы В.Н. Абрашина (см., например, [1, 2] и приведённую в них библиографию). В работах [4, 5] впервые (для одномерного случая) исследована сходимость разностных схем к обобщённым решениям одномерных квазилинейных уравнений эллиптического типа с нелинейностью неограниченного роста и получены согласованные оценки скорости сходимости. Из публикаций за последние годы следует, прежде всего, выделить работы [9–17]. В частности, в работе [16] впервые применена новая методика исследования сходимости решения разностных схем, аппроксимирующих дифференциальные задачи с неограниченной нелинейностью. Дело в том, что решения монотонных разностных схем принадлежат окрестности точного решения, и в этом случае не нужно доказывать сходимость в равномерной норме, что позволяет проводить анализ точности разностных схем для задач с существенно обобщёнными решениями. В работе [17] выведены согласованные оценки скорости сходимости разностных схем к решениям нелинейных двумерных уравнений математической физики (УМФ) эллиптического типа со смешанными производными с обобщёнными решениями и неограниченной нелинейностью. Отметим, что оптимизационные аспекты в этих работах не рассматривались.

Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости заменить (аппроксимировать) их задачами более простой природы – конечномерными задачами. Соответственно, ключевыми проблемами здесь являются разработка алгоритмов конструирования аппроксимаций, анализ их сходимости для задач оптимизации по состоянию, функционалу и управлению, а также регуляризация аппроксимаций (см., например, [18–22]).

К настоящему времени проведено достаточно большое число исследований, посвящённых изучению задач оптимального управления с ограничениями на состояние и управление. Среди недавних работ на эту тему укажем, например, статьи [6–8] (см. в них же библиографию). В отличие от настоящей работы, в этих работах не изучаются вопросы сходимости задач оптимального управления старшими коэффициентами уравнений состояния с нелинейностями неограниченного роста в коэффициентах. В статье [6] авторы занимаются анализом погрешности вариационной аппроксимации для задачи управления, описываемой полулинейным эллиптическим уравнением вида $-\triangle y + \theta(y) = f,\ \ x \in \Omega,$ в котором на нелинейное слагаемое θ уравнения состояния накладываются некоторые условия роста, а управление содержится в правой части уравнения. Статья [7] посвящена разработке жадных и слабых жадных алгоритмов в контексте задач оптимального управления.

Данная работа дополняет и развивает результаты, установленные в статье [8] для задач оптимального управления, описываемых нелинейными двумерными УМФ эллиптического типа со смешанными производными с обобщёнными решениями и неограниченной нелинейностью. Результаты работы [8] и настоящей работы отличаются друг от друга, в частности, тем, что, получены для задач оптимального управления с разными множествами допустимых управлений, при этом разница в ограничениях на допустимые управления существенно влияет на характер и методику доказательства сходимости аппроксимаций. Кроме того, в работе [8] получены оценки только для точности дискретизаций по состоянию. Авторам неизвестны другие результаты о сходимости разностных схем для задач оптимального управления, описываемых уравнениями математической физики в недивергентной форме с нелинейностями неограниченного роста в коэффициентах. Постановки задач и результаты о сходимости аппроксимаций являются новыми.

В настоящей работе для задач оптимального управления коэффициентами эллиптических уравнений со смешанными производными и неограниченной нелинейностью построены конечно-разностные аппроксимации. Сначала доказывается корректность аппроксимаций (п. 3) и анализируется их точность по состоянию (п. 4). Доказательство сходимости разностных схем проводится в предположении, что само точное решение краевой задачи существует в классе $W_{2,0}^m(\Omega),\ \ 3 < m \leqslant 4,$ и множество его значений принадлежит некоторому отрезку и только при значениях независимой переменной, принадлежащих этому отрезку, функции, входящие в уравнение, удовлетворяют требуемым свойствам. Исследования сходимости разностных схем для данного класса задач показали, что даже для гладких решений вопрос о сходимости представляет собой довольно сложную техническую проблему. Это связано с тем, что анализ точности разностных схем сильно усложняется, так как задача для погрешности метода является уже нелинейной. В п. 3 мы, таким образом, доказываем, что решение разностной краевой задачи принадлежит области (либо её малой окрестности) значений точного решения, что в свою очередь требует обязательного исследования скорости сходимости разностной схемы в норме $C(\overline{\omega})$ [3–5].

Отметим, что при исследовании сходимости аппроксимаций по состоянию техника, применяемая в [21] при получении оценок скорости сходимости задач оптимизации по состоянию для полулинейных эллиптических уравнений, оказывается неприменимой. Поэтому приходится разрабатывать специальные подходы. В частности, техника, развитая в [17] для доказательства корректности разностной схемы для нелинейной краевой задачи с обобщённым решением и неограниченной нелинейностью, адаптируется для задачи оптимального управления состоянием и установления оценок точности по состоянию. А именно, для доказательства существования и единственности решения исследуемой нелинейной разностной задачи, аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу, используется итерационный процесс, который можно рассматривать и как эффективный метод реализации этой нелинейной разностной схемы. Проводится строгое исследование сходимости итерационного метода для нелинейной сеточной задачи без каких-либо предположений о свойствах нелинейной разностной схемы. В п. 4 получена также шкала априорных оценок скорости сходимости в сеточной $W^2_{2,0}(\omega)$-норме для разностного решения. Другим важным результатом настоящего исследования является получение оценок скорости сходимости аппроксимаций по функционалу, доказательство слабой сходимости по управлению и регуляризация аппроксимаций по Тихонову (п. 5). Отметим, что процесс регуляризации позволяет построить минимизирующие последовательности для функционала, которые сильно сходятся в пространствах управлений ко множеству минимумов исходных функционалов.

1. Постановка задачи оптимального управления. Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \ \alpha = 1,2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$, где $l_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1,2$, фиксированы. Пусть управляемый процесс для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа в недивергентной форме описывается следующей задачей Дирихле:

$$Lu(x) \equiv -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha,\beta}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + q(u)u = f(u), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Здесь $k_{12}(x) = k_{21}(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, т.е. выполняется условие симметрии; $q(\eta)$, $f(\eta)$ – заданные функции аргумента $\eta \in \Omega$; $g = (g_{11}, g_{22}, g_{12}, g_{21}) = (k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21})$ – управление.

Так же, как и в работе [17], априори предположим, что задача (1), (2) однозначно разрешима в классе $W^m_{2,0}(\Omega) = W^m_2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $3 < m \leqslant 4$. Обозначим через M_u область значений точного решения задачи (1), (2) (которая, в силу предположения о гладкости решения, является ограниченным множеством), т.е. $M_u = [M_1, M_2]$, где $M_1 = \min\{u(x) : x \in \Omega\}$, $M_2 = \max\{u(x) : x \in \Omega\}$. Определим δ-окрестность области значений M_u точного решения $D_u = [\bar{M}_1, \bar{M}_2]$, где $\bar{M}_1 = M_1 - \delta$, $\bar{M}_2 = M_2 + \delta$, здесь $\delta > 0$ – произвольная постоянная, которая может быть достаточно малой.

Относительно заданных функций будем предполагать выполнение следующих условий на решении задачи (1), (2):

$$0 \leqslant q_0 \leqslant q(\eta) \leqslant \bar{q}_0 \quad \text{и} \quad |f(\eta)| \leqslant f_0 \quad \text{для любого} \quad \eta \in D_u; \tag{3}$$

$$|q(\eta_1) - q(\eta_2)| \leqslant L_q|\eta_1 - \eta_2| \quad \text{и} \quad |f(\eta_1) - f(\eta_2)| \leqslant L_f|\eta_1 - \eta_2| \quad \text{для всех} \quad \eta_1, \eta_2 \in D_u, \tag{4}$$

где q_0, $\bar{q}_0$, f_0 и L_q, L_f – некоторые постоянные. Подчеркнём, что условия (3), (4), накладываемые на коэффициенты $q(u)$ и $f(u)$ уравнения в настоящей работе, предполагаются выполненными лишь в окрестности значений точного решения, что обусловлено наличием нелинейностей неограниченного роста и даёт возможность расширить классы допустимых нелинейностей.

Относительно управлений $g = (g_{11}, g_{22}, g_{12}, g_{21}) = (k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21})$ будем предполагать, что имеют место следующие ограничения: $g = (k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}) \in U \subset B$, где $B = (W^1_\infty(\Omega))^4$ – пространство управлений, а U – множество допустимых управлений, оно состоит из управлений $g \in B$, которые удовлетворяют условиям

$$U = \{k_{\alpha,\beta} = g_{\alpha,\beta} \in W^1_\infty(\Omega), \ \ \alpha,\beta = 1,2: \quad 0 < \nu \leqslant k_{\alpha\alpha}(x) \leqslant \bar{\nu}, \ \ \alpha = 1,2; \ \ k_{12}(x) = k_{21}(x),$$

$$|k_{12}(x)| \leqslant \nu_* = \nu - \delta_*, \ \ 0 < \delta_* < \nu, \ \ |\partial k_{\alpha\beta}(x)/\partial x_i| \leqslant R_i, \ \ \alpha,\beta,i = 1,2, \ \ \text{п.в.} \ \ x \in \overline{\Omega}\}, \tag{5}$$

где ν, $\bar{\nu}$, δ_* и R_1, R_2 – некоторые постоянные. Пусть, кроме того, выполняются условия

$$\frac{2\bar{\nu}(\max l_\alpha)^2}{\nu\delta_* - \bar{\nu}\bar{q}_0(\max l_\alpha)^2}\left\{L_f + \frac{\bar{\nu} f_0 L_q(\max l_\alpha)^2}{\nu\delta_* - \bar{\nu}\bar{q}_0(\max l_\alpha)^2}\right\} = q_0^*, \tag{6}$$

$$\nu\delta_* - \bar{\nu}\bar{q}_0(\max l_\alpha)^2 > 0, \quad q_1^* = q_0^*/2 < 1. \tag{7}$$

Зададим функционал цели в виде

$$J(g) = \int\limits_\Omega |u(x,g) - u_0(x)|^2\,dx, \tag{8}$$

где $u_0(x) \in W_2^1(\Omega)$ – заданная функция.

Поставим задачу оптимального управления: найти управление $g_* \in U$ такое, что $J(g_*) = \inf\limits_{g\in U} J(g)$, где функционал цели имеет вид (8) на решениях краевой задачи (1), (2).

Исходное уравнение (1) в более подробной записи выглядит следующим образом:

$$-\sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - (k_{12}(x) + k_{21}(x))\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + q(u)u = f(u), \quad x \in \Omega, \quad k_{12}(x) = k_{21}(x). \tag{9}$$

Заметим, что условия, накладываемые на коэффициенты при производных уравнения (1):

$$0 < \nu \leqslant k_{\alpha\alpha}(x) \leqslant \bar{\nu}, \quad \alpha = 1,2, \quad k_{12}(x) = k_{21}(x), \quad |k_{12}(x)| \leqslant \nu_* = \nu - \delta_*, \quad \text{где } 0 < \delta_* < \nu,$$

обеспечивают выполнение двусторонних оценок

$$C_1\sum_{\alpha=1}^{2}\xi_\alpha^2 \leqslant \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha,\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \leqslant C_2\sum_{\alpha=1}^{2}\xi_\alpha^2, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

с константами $C_1 = \delta_*$, $C_2 = 2\bar{\nu}$, означающих эллиптичность уравнения (1).

В дальнейшем будем использовать пространства вещественнозначных функций, заданных в области Ω, введённые в работе [17]. В частности, определим скалярное произведение двух управлений g и $\widetilde{g}$ следующим образом:

$$(g,\widetilde{g})_H = (g_{11},\widetilde{g}_{11})_{W_2^1(\Omega)} + (g_{22},\widetilde{g}_{22})_{W_2^1(\Omega)} + (g_{12},\widetilde{g}_{12})_{W_2^1(\Omega)} + (g_{21},\widetilde{g}_{21})_{W_2^1(\Omega)}.$$

В результате получим гильбертово пространство управлений $(W_2^1(\Omega))^4 = H$ с нормой

$$\|g\|_H = ((g,g)_H)^{1/2} = (\|g_{11}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|g_{22}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|g_{12}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|g_{21}\|^2_{W_2^1(\Omega)})^{1/2}.$$

Замечание 1. При постановке нелинейной краевой задачи (1), (2) мы априори предполагали, что для любого $g \in U$ решение $u(x) = u(x,g)$ задачи (1), (2) существует, единственно и принадлежит пространству $W_{2,0}^m(\Omega)$, $3 < m \leqslant 4$. В связи с этим и с учётом вложения $W_2^m(\Omega) \to C^2(\overline{\Omega})$ при $m > 3$ под *решением* краевой задачи (1), (2) можно понимать функцию $u = u(x)$, $x = (x_1,x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u \in W_{2,0}^m(\Omega)$, $m > 3$, удовлетворяющую уравнению (1) в классическом смысле. Будем предполагать, что выполнена оценка

$$\sup_{g\in U}\|u(g)\|_{W_2^m(\Omega)} \leqslant M, \quad M = \text{const}, \quad m > 3. \tag{10}$$

Через M и C в дальнейшем будем обозначать положительные константы, не зависящие от управления g, шагов вводимых сеток и от сеточного управления $\Phi_h \in U_h$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия, сформулированные при постановке экстремальной задачи (1)–(10). Тогда отображение* $g \mapsto u(x;g)$ *является усиленно непрерывным из* U *в* $W_2^m(\Omega)$, *т.е. оно переводит слабо сходящуюся в* U *последовательность в последовательность, сильно сходящуюся в* $C(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $\{g^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, g_3^{(n)}, g_4^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \{k_{11}^{(n)}, k_{22}^{(n)}, k_{12}^{(n)}, k_{21}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset$ $\subset U$ – произвольная последовательность такая, что она слабо в $H = (W_2^1(\Omega))^4$ сходится к некоторому элементу $g^{(0)} = (g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}, g_4^{(0)}) = (k_{11}^{(0)}, k_{22}^{(0)}, k_{12}^{(0)}, k_{21}^{(0)}) \in H$. В силу однозначной разрешимости краевой задачи каждому элементу $g^{(n)} \in U$ ставится в соответствие единственное решение $u^{(n)} \equiv u(\xi, g^{(n)})$ задачи (1) при $g = g^{(n)}(\xi)$. Согласно замечанию 1 обобщённое решение $u(\xi, g^{(n)})$ задачи (1) из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, отвечающее элементу $g^{(n)} \in U$, удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле, кроме того, последовательность $\{u^n(\xi)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена в норме пространства $W_2^m(\Omega)$, $3 < m \leqslant 4$, т.е. $\|u(g^{(n)})\|_{W_2^m(\Omega)} \leqslant M$ для любого $g \in U$ и всех n.

Покажем, что $u^{(0)}(\xi)$ – решение задачи (1) при $g = g^{(0)}(\xi) = (k_{11}^{(0)}, k_{22}^{(0)}, k_{12}^{(0)}, k_{21}^{(0)})$, т.е. с учётом введённых обозначений

$$Lu^{(0)}(x) \equiv -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha,\beta}^{(0)}(x) \frac{\partial^2 u^{(0)}(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + q(u^{(0)})u^{(0)} = f(u^{(0)}), \quad x \in \Omega,$$

$$u^{(0)} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{11}$$

Очевидно, что каждый элемент последовательности $\{u^{(n_k)}\}$ удовлетворяет краевой задаче

$$Lu^{(n_k)}(x) \equiv -\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha,\beta}^{(n_k)}(x) \frac{\partial^2 u^{(n_k)}(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + q(u^{(n_k)})u^{(n_k)} = f(u^{(n_k)}), \quad x \in \Omega,$$

$$u^{(n_k)} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{12}$$

Перейдём к пределу при $k \to \infty$ в уравнении (12). В силу того, что $W_2^m(\Omega)$ компактно вкладывается в $C^2(\overline{\Omega})$, $m > 3$, имеем

$$u^{(n_k)}(x) \to u^{(0)}(x) \quad \text{сильно в} \quad C(\overline{\Omega}),$$

$$D^{(\alpha\beta)}u^{(n_k)} \equiv \frac{\partial^2 u^{(n_k)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \to D^{(\alpha\beta)}u^{(0)} \equiv \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad \text{сильно в} \quad C(\overline{\Omega}).$$

Далее, поскольку $k_{\alpha\beta}(x) \in W_\infty^1(\Omega)$, то $k_{\alpha\beta}(x) \in C(\overline{\Omega})$, $\alpha, \beta = 1, 2$. Функция $h(x) = f(u(x))$, $x \in \overline{\Omega}$, непрерывна как сложная функция. Аналогично получаем, что $q(u(x)) \in C(\overline{\Omega})$. Тогда сильно в $C(\overline{\Omega})$ имеют место при $n \to \infty$ сходимости: $q(u^{(n_k)}(x))u^{(n_k)}(x) \to q(u^{(0)}(x))u^{(0)}(x)$, $k_{\alpha\beta}^{(n_k)}(x)\partial^2 u^{(n_k)}(x)/\partial x_\alpha \partial x_\beta \to k_{\alpha\beta}^{(0)}(x)\partial^2 u^{(0)}(x)/\partial x_\alpha \partial x_\beta$ и $f(u^{(n_k)}(x)) \to f(u^{(0)}(x))$.

Покажем далее, что $\lim\limits_{k\to\infty} u^{(n_k)} \equiv u^{(0)}$ принадлежит окрестности D_u значений точного решения. Так как $u^{(n_k)} \in S_u$, то $\|u^{(n_k)} - u\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant \delta$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \|u^{(n_k)} - u\|_{C(\overline{\Omega})} = \|u^{(0)} - u\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant \delta$, т.е. $u^{(0)} \in S_u$, следовательно, $u^{(0)} \in D_u$.

Теперь, переходя в (12) к пределу при $k \to \infty$, получаем (11), значит $u^{(0)}(x)$ – решение краевой задачи (11) при $g = g^{(0)}(x)$, т.е. $u^{(0)}(x) = u(x, g^{(0)})$.

Таким образом, установлено, что из сходимости $g^{(n)} \to g^{(0)}$ в $H = (W_2^1(\Omega))^4$ следует, что $u^{(n)}(x) = u(x, g^{(n)}) \to u^{(0)}(x) = u(x, g^{(0)})$ сильно в $C(\overline{\Omega})$. Следовательно, $g \to u(x, g)$ – усиленно непрерывное отображение. Лемма доказана.

Теорема 1. *Функционал цели $g \mapsto J(g)$ задачи оптимального управления слабо в H непрерывен на множестве U.*

Доказательство. Пусть $g^{(n)} \to g^{(0)}$ слабо в H. Поскольку в нормированном пространстве его норма непрерывна, то в силу леммы 1 в функционале $J(g^{(n)}) = \int_\Omega |u(\xi, g^{(n)}) - u_0(\xi)|^2\, d\Omega$ можно осуществить предельный переход

$$J(g^{(n)}) = \|u(g^{(n)}) - u_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \|u(g^{(0)}) - u_0\|_{L_2(\Omega)} = J(g^{(0)}).$$

Теорема 2. *Задача оптимального управления (1)–(10) корректно поставлена в слабой топологии пространства H, т.е. $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \neq \varnothing$, U – слабо компактно в $H = (W_2^1(\Omega))^4$ и любая минимизирующая последовательность $\{g^{(n)}\} \subset U$ функционала $J(g)$ слабо в H сходится ко множеству U_*.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу на U. Кроме того, легко убедиться, что множество U слабо компактно в H. Далее, применяя результат из [18, с. 505], убеждаемся в справедливости теоремы 2.

2. Некоторые обозначения и оценки для сеточных функций. Постановка сеточной задачи и её корректность. Для аппроксимации задачи (1)–(10) и исследования сходимости разностных аппроксимаций нам понадобятся сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$, и в $\overline{\Omega}$: $\overline{\omega}_\alpha = \{x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha \in [0, l_\alpha] : i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$; $\omega_\alpha = \overline{\omega}_\alpha \bigcap (0, l_\alpha)$; $\omega_\alpha^+ = = \overline{\omega}_\alpha \bigcap (0, l_\alpha]$, $\omega_\alpha^- = \overline{\omega}_\alpha \bigcap [0, l_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$; $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$; $\omega^{(\pm 1)} = \omega_1^\pm \times \omega_2$, $\omega^{(\pm 2)} = \omega_1 \times \omega_2^\pm$; $\gamma = \overline{\omega} \backslash \omega$; $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$. По аналогии с работами [17, 23] обозначим: V – множество сеточных функций, заданных на сетке $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$, и $\overset{\circ}{V}$ – его подмножество, состоящее из сеточных функций, обращающихся в нуль на $\gamma = \overline{\omega} \backslash \omega$. Для сеточных функций из множества $\overset{\circ}{V}$ введём скалярные произведения, нормы и полунормы:

$$(y, v)_{L_2(\omega)} = \sum_\omega h_1 h_2 y(x) v(x), \quad \|y\|^2_{L_2(\omega)} = \sum_\omega h_1 h_2 y^2(x), \quad \|y\|_{C(\overline{\omega})} = \|y\|_{L_\infty(\overline{\omega})} = \max_{\overline{\omega}} |y(x)|,$$

$$\|y\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)} = \|y_{\bar{x}_1}\|^2_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2)} + \|y_{\bar{x}_2}\|^2_{L_2(\omega_1 \times \omega_2^+)} = |y|^2_{W_2^1(\omega)} = \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\omega^{(+\alpha)}} h_1 h_2 y^2_{\bar{x}_\alpha} = \|\nabla y\|^2_{L_2(\omega)},$$

$$\|y\|^2_{W^2_{2,0}(\omega)} = \|y_{\bar{x}_1 x_1}\|^2_{L_2(\omega)} + \|y_{\bar{x}_2 x_2}\|^2_{L_2(\omega)} + 2\|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|^2_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_\omega h_1 h_2 y^2_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + 2 \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 y^2_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = |y|^2_{W_2^2(\omega)}.$$

Здесь символами $|\cdot|_{W_2^1(\omega)}$ и $|\cdot|_{W_2^2(\omega)}$ обозначены полунормы в $W_2^1(\omega)$ и $W_2^2(\omega)$ соответственно.

Для полноты изложения приведём для сеточных функций так называемые разностные аналоги теорем вложения Соболева с вычисляемыми (конструктивными) константами и ряд вспомогательных априорных оценок, используемых при установлении оценок скорости сходимости аппроксимаций.

Лемма 2. *Для любой сеточной функции $y(x)$, $x \in \overline{\omega}$, обращающейся в нуль на границе $\gamma = \partial\omega$, справедливы следующие разностные аналоги теорем вложения:*

$$\|y\|_{L_2(\omega)} \leqslant C_1 \|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)}, \quad \|y\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant C_2 \|y\|_{W^2_{2,0}(\omega)}, \quad C_1^2 = \frac{(l_1 l_2)^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}; \quad C_2 = \frac{(\max l_\alpha)^2}{2\sqrt{l_1 l_2}}; \tag{13}$$

$$\|y\|_{L_2(\omega)} \leqslant C_3 \|y\|_{W^2_{2,0}(\omega)}, \quad C_3 = C_2 \sqrt{l_1 l_2} = (\max l_\alpha)^2/2; \tag{14}$$

$$\|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)} \leqslant C_4 \|y\|_{W^2_{2,0}(\omega)}, \quad C_4 = \sqrt{(l_1^2 + l_2^2)/32}. \tag{15}$$

Доказательство оценок (13) можно найти в [24–27]. Справедливость оценки (14) непосредственно следует из оценки в (13). По поводу доказательства оценки (15) см. [17].

Поставим в соответствие задаче оптимального управления (1)–(10) следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x\in\overline{\omega}} |y(x,\Phi_h) - u_{0h}(x)|^2 \hbar_1\hbar_2 = \|y(\Phi_h) - u_{0h}\|^2_{L_2(\overline{\omega})} \tag{16}$$

при условиях, что сеточная функция $y(x,\Phi_h) \in \overset{\circ}{V}$, называемая *решением* разностной краевой задачи для дифференциальной задачи (1), (2), удовлетворяет следующей сеточной задаче на сетке $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$:

$$-\sum_{\alpha=1}^{2} \Phi_{\alpha\alpha}(x) y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - (\Phi_{12}(x) + \Phi_{21}(x)) Q(y) + q(y)y = f(y), \quad x \in \omega, \tag{17}$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma, \tag{18}$$

где $\Phi_{12}(x) = \Phi_{21}(x)$,

$$Q(y)(x) = \frac{y_{x_1x_2}(x) + y_{\bar{x}_1x_2}(x) + y_{x_1\bar{x}_2}(x) + y_{\bar{x}_1\bar{x}_2}(x)}{4} = \frac{y(x_1+h_1, x_2+h_2)}{4} +$$

$$+\frac{y(x_1-h_1,x_2+h_2) + y(x_1+h_1,x_2-h_2) + y(x_1-h_1,x_2-h_2)}{4h_1h_2} = y_{\overset{\circ}{x}_1\overset{\circ}{x}_2}(x_1,x_2), \tag{19}$$

а сеточные управления $\Phi_h = (\Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{12}, \Phi_{21})$ принадлежат множеству допустимых сеточных управлений:

$$U_h = \{\Phi_{\alpha\beta}(x) \in W^1_\infty(\omega) : 0 < \nu \leqslant \Phi_{\alpha\alpha h}(x) \leqslant \overline{\nu}, \quad \alpha = 1,2, \quad \Phi_{12}(x) = \Phi_{21}(x),$$
$$|\Phi_{12}(x)| \leqslant \nu_* = \nu - \delta_*, \quad 0 < \delta_* < \nu, \quad x \in \omega, \quad |\Phi_{\alpha\beta x_1}(x)| \leqslant R_1,$$
$$x \in [\omega_1 \setminus l_1 - h_1] \times \omega_2, \quad |\Phi_{\alpha\beta x_2}(x)| \leqslant R_2, \quad x \in \omega_1 \times [\omega_2 \setminus l_2 - h_2], \quad \alpha,\beta = 1,2\}. \tag{20}$$

Здесь $u_{0h}(x)$ – сеточная аппроксимация функции $u_0(\xi)$, определяемая с помощью операции усреднения по Стеклову

$$u_{0h}(x) = S^{x_1}S^{x_2}(u_0)(x) = \frac{1}{\hbar_1\hbar_2} \int\limits_{e(x)} u_0(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1\xi_2, \quad x \in \overline{\omega}.$$

Введём сеточный оператор $A(\theta)v$, зависящий от параметра $\theta = \theta(x)$:

$$A(\theta)v \equiv -\sum_{\alpha=1}^{2} \Phi_{\alpha\alpha}(x) v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x) - 2\Phi_{12}(x) Q(v)(x) + q(\theta)v(x), \quad x \in \omega, \tag{21}$$

на множестве сеточных функций $v(x)$, $x \in \overline{\omega}$; $v(x) = 0$, $x \in \gamma$, где $\theta(x)$, $x \in \overline{\omega}$, – произвольная сеточная функция, играющая роль функционального параметра, а под $A(\theta)v$ понимается результат применения сеточного оператора $A(\theta)$ к элементу v.

Для полноты изложения приведём ряд вспомогательных результатов, связанных с установлением априорных оценок для оператора $A(\theta)$, которые далее будут использованы при исследовании разностной схемы (17)–(19). При доказательстве этих результатов используем методику из [4, 17].

Лемма 3. *Пусть $\theta(x)$, $x \in \overline{\omega}$, – произвольная сеточная функция, заданная на сетке $\overline{\omega}$, такая, что $\theta(x) \in D_u$ для любого $x \in \overline{\omega}$. Тогда оператор $A(\theta)$, задаваемый соотношением (21), обладает следующими свойствами:*

$$\frac{\nu\delta_*}{2\bar{\nu}} \|v\|_{W^2_{2,0}(\overline{\omega})} - C_3\bar{q}_0\|v\|_{L_2(\overline{\omega})} \leqslant \|A(\theta)v\|_{L_2(\overline{\omega})}, \tag{22}$$

$$\|v\|_{W^2_{2,0}(\overline{\omega})} \leqslant C_0 \|A(\theta)v\|_{L_2(\overline{\omega})} \tag{23}$$

при любых $v(x)$, $x \in \overline{\omega}_h$, $v(x) = 0$, $x \in \gamma$; $\theta(x) \in D_u$, $x \in \overline{\omega}$, *где*

$$C_0 = \frac{2\bar{\nu}}{\nu\delta_* - 2\bar{\nu}C_3\bar{q}_0} = \frac{2\bar{\nu}}{\nu\delta_* - \bar{\nu}\bar{q}_0(\max l_\alpha)^2}, \quad \nu\delta_* - \bar{\nu}\bar{q}_0(\max l_\alpha)^2 > 0. \tag{24}$$

Доказательство. В силу определения (21) имеет место равенство

$$\Phi_{11}(x)v_{\bar{x}_1x_1} + 2\Phi_{12}(x)Q(v) + \Phi_{22}(x)v_{\bar{x}_2x_2} = q(\theta)v - A(\theta)v \equiv F(\theta; v), \tag{25}$$

умножив которое на $\Phi^{-1}_{22}(x)v_{\bar{x}_1x_1}$, получим

$$\Phi^{-1}_{22}(x)[\Phi_{11}(x)v^2_{\bar{x}_1x_1} + 2\Phi_{12}(x)v_{\bar{x}_1x_1}Q(v) + \Phi_{22}(x)Q^2(v)] = \Phi^{-1}_{22}(x)v_{\bar{x}_1x_1}F(\theta; v) + I(v), \tag{26}$$

где

$$I(v) = Q^2(v) - v_{\bar{x}_1x_1}v_{\bar{x}_2x_2} = (v_{x_1x_2} + v_{x_1\bar{x}_2} + v_{\bar{x}_1x_2} + v_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2/16 - v_{\bar{x}_1x_1}v_{\bar{x}_2x_2}.$$

Учитывая условие равномерной эллиптичности

$$\delta_* \sum_{\alpha=1}^{2} \xi^2_\alpha \leqslant \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \Phi_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leqslant 2\bar{\nu} \sum_{\alpha=1}^{2} \xi^2_\alpha$$

для $\xi_1 = v_{\bar{x}_1x_1}$, $\xi_2 = Q(v)$, будем иметь

$$[\Phi_{11}(x)v^2_{\bar{x}_1x_1} + 2\Phi_{12}(x)v_{\bar{x}_1x_1}Q(v) + \Phi_{22}(x)Q^2(v)]\Phi^{-1}_{22}(x) \geqslant \frac{\delta_*}{\bar{\nu}}v^2_{\bar{x}_1x_1}, \tag{27}$$

так как $Q^2(v) \geqslant 0$. Тогда из равенства (26) с учётом неравенства (27) следует, что

$$\frac{\delta_*}{\bar{\nu}}v^2_{\bar{x}_1x_1} \leqslant \frac{|F(\theta, v)|}{\nu}|v_{\bar{x}_1x_1}| + I(v) \leqslant \frac{1}{\nu}\left[\frac{1}{4\varepsilon}F^2(\theta, v) + \varepsilon|v_{\bar{x}_1x_1}|^2\right] + I(v), \quad \varepsilon > 0.$$

Далее, выбирая $\varepsilon = \delta_*\nu/(2\bar{\nu})$, получаем

$$\frac{\delta_*}{2\bar{\nu}}v^2_{\bar{x}_1x_1} \leqslant \frac{\bar{\nu}}{2\delta_*\nu^2}F^2(\theta, v) + I(v). \tag{28}$$

Умножим неравенство (28) на h_1h_2 и просуммируем по сетке $\omega = \omega_1 \times \omega_2$. В результате получим

$$\|v_{\bar{x}_1x_1}\|^2_{L_2(\omega)} \leqslant \frac{\bar{\nu}^2}{\delta^2_*\nu^2}\|F(\theta, v)\|^2_{L_2(\omega)} + \frac{2\bar{\nu}}{\delta_*}\sum_{\omega} I(v)h_1h_2. \tag{29}$$

Используя неравенство $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n(a^2_1 + a^2_2 + \ldots + a^2_n)$ и формулу суммирования по частям (дважды), несложно показать, что

$$\sum_{\omega} h_1h_2I(v) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \overset{\circ}{V}. \tag{30}$$

В силу (30) из неравенства (29) вытекает оценка

$$\|v_{\bar{x}_1x_1}\|^2_{L_2(\omega)} \leqslant \frac{\bar{\nu}^2}{\delta^2_*\nu^2}\|F(\theta, v)\|^2_{L_2(\omega)},$$

складывая которую с такой же оценкой для $\|v_{\bar{x}_2x_2}\|^2_{L_2(\omega)}$, будем иметь

$$\|v_{\bar{x}_1x_1}\|^2_{L_2(\omega)} + \|v_{\bar{x}_2x_2}\|^2_{L_2(\omega)} \leqslant \frac{2\bar{\nu}^2}{\nu^2\delta^2_*}\|F(\theta, v)\|^2_{L_2(\omega)}. \tag{31}$$

Далее

$$2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2_{L_2(\omega)} \leqslant \sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}(v^2_{\bar{x}_1\bar{x}_2}+v^2_{\bar{x}_1\bar{x}_2})h_1h_2 = 2\sum_{\omega}h_1h_2v_{\bar{x}_1x_1}v_{\bar{x}_2x_2} \leqslant \sum_{\omega}h_1h_2(v^2_{\bar{x}_1x_1}+v^2_{\bar{x}_2x_2}),$$

откуда

$$\|v\|^2_{W^2_{2,0}(\omega)} \leqslant 2(\|v_{\bar{x}_1x_1}\|^2_{L_2(\omega)}+\|v_{\bar{x}_2x_2}\|^2_{L_2(\omega)}), \tag{32}$$

и вследствие (32) и (31) заключаем, что

$$\|v\|_{W^2_{2,0}(\omega)} \leqslant \frac{2\bar{\nu}}{\nu\delta_*}\|F(\theta,v)\|_{L_2(\omega)}. \tag{33}$$

Оценим теперь правую часть неравенства (33). Из равенства (25) и сделанного выше предположения $0\leqslant q_0\leqslant q(\eta)\leqslant\bar{q}_0$, $\eta\in D_u$, следует, что

$$\|F(\theta,v)\|_{L_2(\omega)} \leqslant \|q(\theta)v\|_{L_2(\omega)}+\|A(\theta)v\|_{L_2(\omega)} \leqslant \bar{q}_0\|v\|_{L_2(\omega)}+\|A(\theta)v\|_{L_2(\omega)}. \tag{34}$$

Тогда в силу неравенств (33), (34) получаем оценку

$$\frac{\nu\delta_*}{2\bar{\nu}}\|v\|_{W^2_{2,0}(\omega)} \leqslant \|F(\theta,v)\|_{L_2(\omega)} \leqslant \bar{q}_0\|v\|_{L_2(\omega)}+\|A(\theta)v\|_{L_2(\omega)},$$

из которой непосредственно вытекает справедливость оценки (22).

Отсюда вследствие неравенства $\|v\|_{L_2(\omega)}\leqslant C_3\|v\|_{W^2_{2,0}(\omega)}$ имеем

$$\left(\frac{\nu\delta_*}{2\bar{\nu}}-C_3\bar{q}_0\right)\|v\|_{W^2_{2,0}(\omega)} \leqslant \|A(\theta)v\|_{L_2(\omega)}.$$

Зададим условие

$$\frac{\nu\delta_*}{2\bar{\nu}}-\frac{(\max l_\alpha)^2}{2}\bar{q}_0>0,$$

тогда для любой функции $v(x)$, $x\in\omega$, такой, что $v(x)=0$, $x\in\gamma$, получаем

$$\|v\|_{W^2_2(\overline{\omega})} \leqslant C_0\|A(\theta)v\|_{L_2(\overline{\omega})}, \quad \theta(x)\in D_u, \quad x\in\overline{\omega},$$

где константа C_0 определена в (24). Лемма доказана.

Для нахождения приближённого решения нелинейных разностных уравнений (17)–(19) построим итерационный процесс, в котором коэффициенты сеточного оператора $A(y)$ берутся с предыдущей итерации, так что новое приближение $y^{(s+1)}(x)$, $x\in\overline{\omega}$, находится как решение линейной задачи:

$$A(y^{(s)})y^{(s+1)} = -\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha\alpha}(x)y^{(s+1)}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}-2\Phi_{12}(x)Q(y^{(s+1)})+q(y^{(s)})y^{(s+1)} = f(y^{(s)}), \quad x\in\omega, \tag{35}$$

$$y^{(s+1)}(x)=0, \quad x\in\gamma_h, \tag{36}$$

где $y^{(0)}(x)$, $x\in\overline{\omega}$, принадлежит малой окрестности D_u области значений точного решения (более того, см. далее теорему 4, $y^{(0)}\in S^*_u=\{v:\|v-u\|_C\leqslant\delta(1-q_1^*)/(2(1+q_1^*))\}$).

Лемма 4. *Пусть $y^{(s)}\in D_u$, $x\in\overline{\omega}$. Тогда сеточная функция $y^{(s+1)}(x)$, $x\in\overline{\omega}$, определяемая из итерационного процесса (35), (36), ограничена в сеточных нормах пространств $W^2_{2,0}(\omega)$, $C(\overline{\omega})$, $L_2(\omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega)$:*

$$\|y^{(s+1)}\|_{W^2_{2,0}(\omega)} \leqslant C_5; \tag{37}$$

$$\|y^{(s+1)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant C_2C_5, \quad \|y^{(s+1)}\|_{L_2(\omega)} \leqslant C_3C_5, \quad \|y^{(s+1)}\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega)} \leqslant C_4C_5, \tag{38}$$

где $C_5=C_0f_0(l_1,l_2)^{1/2}$, а постоянные C_2, C_3 и C_4 определены в лемме 2.

Доказательство оценки (37) следует из [17]. Доказательство оценок (38) непосредственно следует из леммы 3 и оценок (13)–(15) леммы 2.

В дальнейшем при доказательстве корректности разностной схемы (17)–(19) нам понадобится оценка погрешности первого приближения $z^{(1)}(x)=y^{(1)}(x)-u(x),\ x\in\overline{\omega}$, в равномерной метрике. Обозначим через $\psi(x),\ x\in\omega,$ – невязку разностного уравнения (17) (погрешность аппроксимации уравнения (17) на решении исходного уравнения (1)):

$$\psi(x)=f(u)-\left[-\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha\alpha}(x)u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}-2\Phi_{12}(x)Q(u)+q(u)u\right]=f(u)-A(u)u,\quad x\in\omega. \tag{39}$$

Складывая уравнения (35) при $s=0$ с невязкой $\psi(x)=f(u(x))-A(u(x))u(x),\ x\in\omega,$ после некоторых очевидных преобразований получим следующую задачу для погрешности $z^{(1)}(x),\ x\in\overline{\omega}:$

$$A(u)z^{(1)}=[q(u)-q(y^{(0)})]y^{(1)}+[f(y^{(0)})-f(u)]+\psi(x),\quad x\in\omega,\quad z^{(1)}=0,\quad x\in\gamma,$$

где $A(u)z^{(1)}=-\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha\alpha}(x)z^{(1)}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}-2\Phi_{12}(x)Q(z^{(1)})+q(u)z^{(1)},\ x\in\omega,$ а сеточная функция $\psi(x),\ x\in\omega,$ имеет вид (39).

Лемма 5. *Пусть $y^{(0)}(x),\ x\in\overline{\omega},$ – начальное приближение итерационного процесса (35), (36), а $u(\xi)$ – точное решение задачи (1), (2). Тогда при $y^{(0)}\in D_u$ имеют место оценки*

$$\|y^{(1)}-u\|_{W^2_{2,0}(\omega)}=\|z^{(1)}\|_{W^2_{2,0}(\omega)}\leqslant C_0C_6\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})}+C_0\|\psi\|_{L_2(\omega)}, \tag{40}$$

$$\|z^{(1)}\|_{C(\overline{\omega})}\leqslant C_0C_2C_6\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})}+C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)}\leqslant(1+q_1^*)\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})}+C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)}=\beta,$$

где $C_0C_2C_6=q_1^*$ (см. (7), (8)), $C_6=C_3C_5L_q+L_f(l_1l_2)^{1/2}$.

Доказательство. Имеем

$$\|A(u)z^{(1)}\|_{L_2(\omega)}\leqslant\|[q(u)-q(y^{(0)})]y^{(1)}\|_{L_2(\omega)}+\|[f(y^{(0)})-f(u)]\|_{L_2(\omega)}+\|\psi\|_{L_2(\omega)}. \tag{41}$$

Далее, так как $y^{(0)}(x),u(x)\in D_u,$ то в силу условий на входные данные задачи

$$|q(u)-q(y^{(0)})|\leqslant L_q|z^{(0)}(x)|,\quad |f(u)-f(y^{(0)})|\leqslant L_f|z^{(0)}(x)|$$

из оценки (41) следует, что

$$\|A(u)z^{(1)}\|_{L_2(\omega)}\leqslant L_q\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})}\|y^{(1)}\|_{L_2(\omega)}+L_f\|z^{(0)}\|_{L_2(\omega)}+\|\psi\|_{L_2(\omega)}.$$

Очевидна оценка $\|z^{(0)}\|_{L_2(\omega)}\leqslant(l_1l_2)^{1/2}\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})}$. Тогда

$$\|A(u)z^{(1)}\|_{L_2(\omega)}\leqslant L_q\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})}\|y^{(1)}\|_{L_2(\omega)}+L_f(l_1l_2)^{1/2}\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})}+\|\psi\|_{L_2(\omega)}.$$

В силу неравенств (38) имеем

$$\|A(u)z^{(1)}\|_{L_2(\omega)}\leqslant C_6\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})}+\|\psi\|_{L_2(\omega)}. \tag{42}$$

Принимая во внимание оценку (23) из леммы 3 при $v=z^{(1)},$ вследствие неравенства (42) получаем

$$\|z^{(1)}\|_{W^2_{2,0}(\omega)}\leqslant C_0C_6\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})}+C_0\|\psi\|_{L_2(\omega)}. \tag{43}$$

В силу оценки $\|z^{(1)}\|_{C(\overline{\omega})}\leqslant C_2\|z^{(1)}\|_{W^2_{2,0}(\omega)}$ из неравенства (43) следует, что

$$\|z^{(1)}\|_{C(\overline{\omega})}\leqslant C_0C_2C_6\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})}+C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)},$$

откуда

$$\|z^{(1)}\|_{C(\overline{\omega})}(1 - C_0C_2C_6) \leqslant C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)}.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\|z^{(1)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant q_1^*\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})} + C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)} \leqslant (1+q_1^*)\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})} + C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)} = \beta.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть выполнены условия леммы 5. Тогда имеет место оценка*

$$\|\Delta y^{(1)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant (1+q_1^*)\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})} + C_0C_2\|\psi(x)\|_{L_2(\omega)} = \beta.$$

Теорема 3. *Пусть $y^{(k)}(x) \in D_u$, $k = \overline{0,s}$, – приближения, построенные при помощи итерационного процесса (35), (36). Тогда справедлива оценка*

$$\|\Delta y^{(s+1)}\|_{C(\overline{\omega})} = \max_{x\in\overline{\omega}} |y^{(s+1)}(x) - y^{(s)}(x)| \leqslant q_1^*\|\Delta y^{(s)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant \beta(q_1^*)^s,$$

где константы $\beta > 0$ и q_1^* определены в лемме 5 и в соотношении (8) соответственно.

Доказательство. Рассмотрим итерационный процесс (35), (36). Получим задачу для разности соседних итераций $\Delta y^{(s+1)} = y^{(s+1)} - y^{(s)}$. Для этого вычтем из (35) это же уравнение, записанное для предыдущей итерации. В результате получаем задачу

$$A(y^{(s)})\triangle y^{(s+1)} = -[q(y^{(s)}) - q(y^{(s-1)})]y^{(s)} + [f(y^{(s)}) - f(y^{(s-1)})],$$

$$\Delta y^{(s+1)}(x) = 0, \quad x \in \gamma, \tag{44}$$

где

$$A(y^{(s)})\triangle y^{(s+1)} = -\sum_{\alpha=1}^{2} \Phi_{\alpha\alpha}(x)\triangle y^{(s+1)}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2\Phi_{12}(x)[Q(y^{(s+1)}) - Q(y^{(s)})] + q(y^{(s)})\triangle y^{(s+1)}. \tag{45}$$

Рассмотрим теперь задачу (44), (45). Имеем

$$\|A(y^{(s)})\triangle y^{(s+1)}\|_{L_2(\omega)} \leqslant \|[q(y^{(s)}) - q(y^{(s-1)})]y^{(s)}\|_{L_2(\omega)} + \|f(y^{(s)}) - f(y^{(s-1)})\|_{L_2(\omega)}. \tag{46}$$

Оценим правую часть неравенства (46). Поскольку $y^{(k)} \in D_u$, $k = \overline{0,s}$, $x \in \overline{\omega}$, то, учитывая ограничения на входные данные задачи, получаем

$$|q(y^{(s)}) - q(y^{(s-1)})| \leqslant L_q|\triangle y^{(s)}|, \quad |f(y^{(s)}) - f(y^{(s-1)})| \leqslant L_f|\triangle y^{(s)}|,$$

откуда следует, что

$$\|A(y^{(s)})\triangle y^{(s+1)}\|_{L_2(\omega)} \leqslant L_q\|\triangle y^{(s)}\|_{C(\overline{\omega})}\|y^{(s)}\|_{L_2(\omega)} + L_f\|\triangle y^{(s)}\|_{L_2(\omega)} \leqslant C_6\|\triangle y^{(s)}\|_{C(\overline{\omega})}. \tag{47}$$

Далее, так как $y^{(k)} \in D_u$, $k = \overline{0,s}$, то справедлива оценка

$$\|\triangle y^{(s+1)}\|_{W^2_{2,0}(\overline{\omega})} \leqslant C_0\|A(y^{(s)})\triangle y^{(s+1)}\|_{L_2(\omega)}. \tag{48}$$

Принимая во внимание неравенства (47) и (48), будем иметь

$$\|\triangle y^{(s+1)}\|_{W^2_{2,0}(\overline{\omega})} \leqslant C_0C_6\|\triangle y^{(s)}\|_{C(\overline{\omega})}. \tag{49}$$

Наконец, используя разностный аналог теоремы вложения $\|\triangle y^{(s+1)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant C_2\|\triangle y^{(s+1)}\|_{W^2_{2,0}(\overline{\omega})}$, вследствие (49) получаем оценку

$$\|\triangle y^{(s+1)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant C_0C_2C_6\|\triangle y^{(s)}\|_{C(\overline{\omega})} = q_1^*\|\triangle y^{(s)}\|_{C(\overline{\omega})}.$$

Откуда, учитывая приведённое выше следствие, заключаем, что

$$\|\triangle y^{(s+1)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant q_1^* \|\triangle y^{(s)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant \ldots \leqslant (q_1^*)^s \|\triangle y^{(1)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant$$

$$\leqslant (q_1^*)^s [(1+q_1^*)\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})} + C_0 C_2 \|\psi\|_{L_2(\omega)}] = \beta (q_1^*)^s.$$

Теорема доказана.

Под δ-окрестностью точного решения $u(x)$ задачи (1), (2) будем понимать множество $S_u = \{v : \|v-u\|_C \leqslant \delta\}$. Вопрос о сходимости итерационного процесса (35), (36) и разрешимости нелинейной разностной задачи (17)–(19) изучается в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия, сформулированные при постановке краевой задачи (1), (2), а выбор начального приближённого $y^{(0)}(x)$ в итерационном процессе (35), (36) для нелинейной сеточной краевой задачи (17)–(19) подчинён условию*

$$y^{(0)} \in S_u^* = \left\{ v : \|v-u\|_C \leqslant \frac{1-q_1^*}{1+q_1^*}\frac{\delta}{2} \right\}, \quad \frac{\beta}{1-q_1^*} < \delta,$$

где константа β определена в лемме 5.

Тогда в δ-окрестности S_u точного решения $u(x)$ дифференциальной задачи существует и притом единственное решение $y(x)$ нелинейной разностной схемы (17)–(19), которое может быть получено при любом фиксированном управлении $g \in U$ как предел последовательности $\{y^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$, определяемой итерационным процессом (35), (36), причём скорость сходимости последовательности итераций $\{y^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ к решению $y(x)$ задачи (17)–(19) удовлетворяет неравенству

$$\|y^{(s)} - y\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant \frac{\beta}{1-q_1^*}(q_1^*)^s.$$

Кроме того, справедливы следующие оценки:

$$\|y\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leqslant C_5, \quad \|y\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant C_2 C_5, \quad \|y\|_{L_2(\omega)} \leqslant C_3 C_5, \quad \|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)} \leqslant C_4 C_5. \tag{50}$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что все последовательные приближения $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., определяемые итерационным процессом (35), (36), содержатся в множестве S_u, т.е. $y^{(s)} \in S_u$, $s = 1, 2, \ldots$ (не выходят из S_u).

Доказательство проведём методом математической индукции. По условию теоремы $y^{(0)} \in S_u^*$, откуда очевидно следует, что $y^{(0)} \in S_u$. Значит, $y^{(0)} \in D_u$, а в силу леммы 5 и условия $\beta/(1-q_1^*) < \delta$ имеем

$$\|z^{(1)}\|_{C(\overline{\omega})} = \|y^{(1)} - u\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant \beta < \beta/(1-q_1^*) < \delta.$$

Откуда $y^{(1)} \in S_u$. Основание индукции доказано. Допустим теперь, что $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(s)} \in S_u$, и покажем, что $y^{(s+1)} \in S_u$. Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\|y^{(s+1)} - u\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant \|y^{(1)} - u\|_{C(\overline{\omega})} + \ldots + \|y^{(s+1)} - y^{(s)}\|_{C(\overline{\omega})} = \|y^{(1)} - u\|_{C(\overline{\omega})} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s} \|\triangle y^{(k+1)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant \beta + \beta q_1^* + \beta (q_1^*)^2 + \ldots + \beta (q_1^*)^s = \sum_{k=0}^{s} \beta (q_1^*)^k < \beta \frac{1}{1-q_1^*} < \delta. \tag{51}$$

Следовательно, $y^{(s)} \in S_u$. Таким образом, $y^{(m)} \in S_u$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. метод итераций не выводит за пределы множества S_u.

Далее, возьмём отрезок $y^{(s)}, y^{(s+1)}, \ldots, y^{(s+p)}$ последовательности $\{y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. Так как элементы $y^{(s+k)}$, $k = \overline{0,p}$, принадлежат S_u, то, последовательно применяя неравенство треугольника и оценку из теоремы 3, получаем цепочку неравенств

$$\|y^{(s+p)} - y^{(s)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant \sum_{k=1}^{p} \|\triangle y^{(s+p)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant \beta (q_1^*)^{(s)} + \beta (q_1^*)^{(s+1)} + \ldots + \beta (q_1^*)^{(s+p-1)} =$$

$$= \beta(q_1^*)^{(s)}[1+q_1^*+(q_1^*)^{(2)}+..+(q_1^*)^{(p-1)}] = \beta(q_1^*)^{(s)}\sum_{k=1}^{p}(q_1^*)^{(k-1)} < \frac{\beta(q_1^*)^s}{1-q_1^*}. \qquad (52)$$

Это означает, что последовательность $\{y^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ является фундаментальной (Коши). Так как пространство $C(\overline{\omega})$ с нормой $\|\cdot\|_{C(\overline{\omega})}$ полное, то существует предел данной последовательности $\lim\limits_{s\to\infty} y^{(s+1)} = y$. Переходя к пределу в (51) при $s\to\infty$, получаем, что предел y последовательности $\{y^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ принадлежит S_u. Затем, переходя к пределу при $s\to\infty$ в (35), (36), убеждаемся, что сеточная функция y является решением сеточной краевой задачи. Следовательно, решение разностной краевой задачи существует.

Оценка скорости сходимости метода итераций (35), (36) вытекает из (52) при $p\to\infty$:

$$\lim_{p\to\infty}\|y^{(s+p)}-y^{(s)}\|_{C(\overline{\omega})} = \|y-y^{(s)}\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant \beta(q_1^*)^s/(1-q_1^*).$$

Поскольку $y\in S_u$, то аналогично лемме 4 показывается, что решение y разностной схемы удовлетворяет первой оценке в (50). Далее, принимая во внимание оценку из леммы 4, убеждаемся в справедливости остальных оценок в теореме 4.

Докажем единственность решения нелинейной разностной схемы (17). Допустим противное: кроме $y\in S_u$ существует другое решение $\tilde y\in S_u$ разностной схемы (17)–(19). Вычитая из (17) это же уравнение при $y=\tilde y$, получаем задачу для $\triangle y = y(x)-\tilde y(x)$:

$$A(y)\triangle y = [q(\tilde y)-q(y)]\tilde y + [f(\tilde y)-f(y)], \quad x\in\omega, \quad \triangle y = 0, \quad x\in\gamma, \qquad (53)$$

где $A(y)\triangle y = -\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha\alpha}(x)\triangle y_{\bar x_\alpha x_\alpha} - 2\Phi_{12}(x)[Q(y)-Q(\tilde y)] + q(y)\triangle y$. Нетрудно видеть (проводя для задачи (53) рассуждения, аналогичные тем, что и при доказательстве леммы 5, и принимая во внимание оценку из леммы 3), что справедливо неравенство

$$\|\triangle y\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant C_2\|\triangle y\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leqslant C_0C_2C_6\|\triangle y\|_{C(\overline{\omega})} = q_1^*\|\triangle y\|_{C(\overline{\omega})}.$$

Откуда $(1-q_1^*)\|\triangle y\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant 0$. Поскольку $q_1^*<1$, то $\|\triangle y\|_{C(\overline{\omega})}=0$. Следовательно, $y(x) = y(\tilde x)$. Теорема доказана.

Замечание 2. В дальнейшем будем предполагать, что условия теоремы 4 выполнены.

3. Погрешность сеточной задачи по состоянию. Перейдём к изучению погрешности разностной схемы (17)–(19) на сетке $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1\times\overline{\omega}_2$.

Теорема 5. *Для любых управлений $g\in U$ и $\Phi_h\in U_h$ при достаточно малом $h<h_0$ справедлива следующая оценка погрешности метода сеток $z(x,g,\Phi_h) = y(x,\Phi_h)-u(x,g)$ в сеточной $W_{2,0}^2(\omega)$-норме:*

$$\|z\|_{W_{2,0}^2(\omega)} = \|y-u\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leqslant \frac{C_0}{1-q_1^*}\|\psi\|_{L_2(\omega)}, \qquad (54)$$

где $\psi(x)$ – невязка разностного уравнения (17)–(19):

$$\psi(x) = f(u)-A(u)u = f(u) - \Big[-\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha\alpha}(x)u_{\bar x_\alpha x_\alpha} - 2\Phi_{12}(x)Q(u) + q(u)u\Big] =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\Phi_{\alpha\alpha}(x)u_{\bar x_\alpha x_\alpha} - k_{\alpha\alpha}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}\Big] + 2\Big[\Phi_{12}(x)Q(u) - k_{12}(x)\frac{\partial^2(u)}{\partial x_1\partial x_2}\Big]. \qquad (55)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при достаточно малом $h<h_0$ неравенство $\beta/(1-q_1^*)<\delta$ в теореме 4, где $\beta = (1+q_1^*)\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})} + C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)}$, будет выполнено, так как $\beta=\beta(h)$. Действительно, во-первых, если $y^{(0)}\in S_u^*$, т.е.

$$\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})} = \|y^{(0)}-u\|_{C(\overline{\omega})} \leqslant \frac{1-q_1^*}{1+q_1^*}\,\frac{\delta}{2}, \qquad (56)$$

то $y^{(0)} \in S_u$. Для $y^{(0)} \in S_u^*$ имеем

$$\delta - \frac{\beta}{1-q_1^*} = \delta - \frac{1}{1-q_1^*}(1+q_1^*)\|z^{(0)}\|_{C(\overline{\omega})} - \frac{C_0C_2}{(1-q_1^*)}\|\psi\|_{L_2(\omega)}.$$

В силу (56) получаем

$$\delta - \frac{\beta}{1-q_1^*} \geqslant \frac{\delta}{2} - \frac{C_0C_2}{1-q_1^*}\|\psi\|_{L_2(\omega)}.$$

Тогда при достаточно малых $h < h_0$ имеем $C_0C_2\|\psi\|_{L_2(\omega)}/(1-q_1^*) \leqslant \delta/2$, так что $\beta/(1-q_1^*) \leqslant \delta$ при достаточно малых $h > 0$.

Таким образом, условия теоремы 4 выполнены и, следовательно, $y \in S_u$.

Установим теперь оценку (54), (55). Складывая уравнение (17) с невязкой $\psi(x) = f(u(x)) - A(u(x))u(x)$, $x \in \omega$, придём после некоторых очевидных преобразований к задаче для погрешности $z(x) = y(x) - u(x)$ разностной схемы (17)–(19):

$$A(u)z = [q(u) - q(y)]y + [f(y) - f(u)] + \psi(x), \quad x \in \omega,$$

$$z(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

где $A(u)z = -\sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha\alpha}(x)z_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2\Phi_{12}(x)[Q(y) - Q(u)] + q(y)z$, $x \in \omega$.

Далее, рассуждениями, аналогичными приведённым при доказательстве оценки (40) леммы 5, несложно показать, что для погрешности z справедлива оценка

$$\|z(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leqslant C_0C_6\|z\|_{C(\overline{\omega})} + C_0\|\psi\|_{L_2(\omega)},$$

из которой в силу оценки (13) для функции z следует неравенство

$$\|z(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leqslant \frac{C_0}{1 - C_0C_2C_6}\|\psi\|_{L_2(\omega)} = \frac{C_0}{1-q_1^*}\|\psi\|_{L_2(\omega)}.$$

Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что для получения оценки скорости сходимости разностной схемы (17)–(19) достаточно установить оценку для сеточной функции $\psi(x)$.

Лемма 6. *Пусть $u \in W_2^m(\Omega)$, где $3 < m \leqslant 4$, и $y \in W_{2,0}^2(\overline{\omega})$ – соответственно решения дифференциальной (1), (2) и разностной задач (17)–(19) при фиксированных управлениях $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$. Тогда для погрешности аппроксимации схемы (17)–(19) справедлива оценка*

$$\|\psi\|_{L_2(\omega)} \leqslant \sum_{\alpha=1}^2 \|k_{\alpha\alpha} - \Phi_{\alpha\alpha}\|_{L_\infty(\omega)}\|u\|_{W_{2,0}^2(\omega)} + M_*|h|^{m-2}\|u\|_{W_2^m(\Omega)} + 2\|k_{12} - \Phi_{12}\|_{L_\infty(\omega)}\|u\|_{W_{2,0}^2(\omega)};$$

где $3 < m \leqslant 4$, а константа M_* не зависит от h и $u(x)$.

Доказательство. Рассмотрим сеточную функцию $\psi(x)$, $x \in \omega = \omega_1 \times \omega_2$. Её можно представить в следующем виде:

$$\psi(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \psi_{\alpha\alpha}^{(1)}(x) + 2\psi_{12}^{(1)}(x) + \sum_{\alpha=1}^2 \psi_{\alpha\alpha}^{(2)}(x) + 2\psi_{12}^{(2)}(x), \quad x \in \omega \in \Omega,$$

где $\psi_{\alpha\alpha}(x) = \psi_{\alpha\alpha}^{(1)}(x) + \psi_{\alpha\alpha}^{(2)}(x)$, $\psi_{\alpha\alpha}^{(1)}(x) = k_{\alpha\alpha}(x)(u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - \partial^2 u/\partial x_\alpha^2)$, $\psi_{\alpha\alpha}^{(2)}(x) = \Phi_{\alpha\alpha}(x)u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - k_{\alpha\alpha}(x)u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\psi_{12}^{(1)}(x) = k_{12}(x)(Q(u) - \partial^2 u/\partial x_1\partial x_2)$, $\psi_{12}^{(2)}(x) = \Phi_{12}(x)Q(u) - k_{12}(x)Q(u)$.

Тогда

$$\|\psi\|_{L_2(\omega)}^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega} \left[k_{\alpha\alpha}\left(u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}\right)\right]^2 h_1h_2 + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega} [\Phi_{\alpha\alpha}u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - k_{\alpha\alpha}u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}]^2 h_1h_2 +$$

$$+ 2\Big\{ \sum_{\omega} [\Phi_{12}(x)Q(u) - k_{12}(x)Q(u)]^2 h_1 h_2 + \sum_{\omega} \Big[k_{12}(x)\Big(Q(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\Big)\Big]^2 h_1 h_2 \Big\} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2} \{\|\psi^{(1)}_{\alpha\alpha}\|_{L_2(\omega)} + \|\psi^{(2)}_{\alpha\alpha}\|_{L_2(\omega)}\} + 2\{\|\psi^{(1)}_{12}\|_{L_2(\omega)} + \|\psi^{(2)}_{12}\|_{L_2(\omega)}\}. \qquad (57)$$

Справедливы оценки

$$\sum_{\omega} [\Phi_{\alpha\alpha}(x) u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - k_{\alpha\alpha}(x) u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}]^2 h_1 h_2 \leqslant \|\Phi_{\alpha\alpha}(x) - k_{\alpha\alpha}(x)\|^2_{L_\infty(\omega)} \|u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}\|^2_{L_2(\omega)};$$

$$\sum_{\omega} [\Phi_{12}(x)Q(u) - k_{12}(x)Q(u)]^2 h_1 h_2 \leqslant \|\Phi_{12}(x) - k_{12}(x)\|^2_{L_\infty(\omega)} \sum_{\omega} (Q(u))^2 h_1 h_2;$$

$$\sum_{\omega} Q^2(u) h_1 h_2 = \sum_{\omega} \Big(\frac{u_{x_1 x_2} + u_{x_1 \bar{x}_2} + u_{\bar{x}_1 x_2} + u_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}}{4} \Big)^2 h_1 h_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \sum_{\omega} (u^2_{x_1 x_2} + u^2_{x_1 \bar{x}_2} + u^2_{\bar{x}_1 x_2} + u^2_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}) h_1 h_2 \leqslant \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} u^2_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} h_1 h_2,$$

вследствие которых имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\omega} [\Phi_{\alpha\alpha}(x) - k_{\alpha\alpha}(x)]^2 u^2_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} h_1 h_2 + 2 \sum_{\omega} [\Phi_{12}(x) - k_{12}(x)]^2 Q^2(u) h_1 h_2 \leqslant$$

$$\leqslant \Big\{ \sum_{\alpha=1}^{2} \|\Phi_{\alpha\alpha}(x) - k_{\alpha\alpha}(x)\|^2_{L_\infty(\omega)} + 2\|\Phi_{12} - k_{12}\|^2_{L_\infty(\omega)} \Big\} \|u\|^2_{W^2_{2,0}(\omega)}. \qquad (58)$$

В работе [17, с. 25–28] установлены оценки остальных слагаемых в (57); воспользовавшись ими, получим

$$|\psi^{(1)}_{\alpha\alpha}(x)| \leqslant \bar{\nu} \bar{M} M M_0 |h|^{m-2} (h_1 h_2)^{-1/2} |u|_{W_2^m(e(x))}, \quad \alpha = 1, 2, \quad x \in \omega;$$

$$|\psi^{(1)}_{12}(x)| \leqslant \bar{\nu} \bar{M} M M_0 |h|^{m-2} (h_1 h_2)^{-1/2} |u|_{W_2^m(e(x))}, \quad x \in \omega, \quad u \in W_2^m(e(x)), \quad 3 < m \leqslant 4. \quad (59)$$

Принимая во внимание неравенства (57)–(59), будем иметь

$$\|\psi\|^2_{L_2(\omega)} \leqslant \|g - \Phi_h\|^2_{L_\infty(\omega)} \|u\|^2_{W^2_{2,0}(\omega)} + M^2_* (|h|^{m-2})^2 \|u\|_{W_2^m(\Omega)},$$

откуда

$$\|\psi\|_{L_2(\omega)} \leqslant \|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)} \|u\|_{W^2_{2,0}(\omega)} + M_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_2^m(\Omega)}, \quad 3 < m \leqslant 4.$$

Лемма доказана.

Теорема 6. *Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач (1)–(8) и (16)–(20) и при достаточно малом $h < h_0$ справедлива оценка погрешности $z(\Phi_h, g) = y(\Phi_h) - u(g)$ метода сеток по состоянию в сеточной $W^2_{2,0}(\omega)$-норме:*

$$\|z(\Phi_h, g)\|_{W^2_{2,0}(\omega)} \leqslant \widetilde{M}_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_2^m(\Omega)} + \widetilde{C} \|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)} \|u\|_{W^2_{2,0}(\omega)}, \quad 3 < m \leqslant 4.$$

Доказательство. В силу теоремы 5 и леммы 6 получаем

$$\|z\|_{W^2_{2,0}(\overline{\omega})} \leqslant \frac{C_0}{1 - q_1^*} \|\psi\|_{L_2(\omega)} \leqslant \frac{C_0}{1 - q_1^*} \{M_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_2^m(\Omega)} + \|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)} \|u\|_{W^2_{2,0}(\omega)}\} \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{M}_*|h|^{m-2}\|u\|_{W_2^m(\Omega)} + \widetilde{C}\|g-\Phi_h\|_{L_\infty(\omega)}\|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)}, \quad 3 < m \leqslant 4,$$

где константы $\widetilde{M}_*$ и $\widetilde{C}$ не зависят от h (шага сетки) и функции $u(x)$. Теорема доказана.

4. Оценки погрешности сеточного функционала, сходимость аппроксимаций по функционалу и управлению. Регуляризация аппроксимаций. Используя доказанные выше утверждения, рассмотрим вопрос о сходимости аппроксимаций по функционалу и аргументу (управлению).

Теорема 7. *Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач (1)–(8) и (16)–(20) соответственно при достаточно малом $h < h_0$ для погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ задач (16)–(20) справедлива оценка*

$$|J(g(\xi)) - J_h(\Phi_h(x))| \leqslant M_0\{|h| + \|g-\Phi_h\|_{L_\infty(\omega)}\},$$

где $M_0 = \mathrm{const} > 0$, не зависящая от h, y, u, Φ_h, g.

Доказательство. Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(\xi) = u(\xi; g)$ и $y(x) = y(x; \Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах (1)–(8) и (16)–(20). Принимая во внимание представления (8), (16) и проводя некоторые очевидные преобразования, приведём погрешность функционала $\theta_h(g,\Phi_h) = J(g) - J_h(\Phi_h)$ к виду

$$\theta_h(g,\Phi_h) = J(g) - J_h(\Phi_h) = B_h^{(1)} + B_h^{(2)},$$

где

$$B_h^{(1)} = \|u(\xi,g) - u_0(\xi)\|^2_{L_2(\Omega)} - \|P_h u(\xi,g) - P_h u_{0h}(\xi)\|^2_{L_2(\Omega)};$$

$$B_h^{(2)} = \|P_h u(\xi,g) - P_h u_{0h}(\xi)\|^2_{L_2(\Omega)} - \|y(x,\Phi_h) - u_{0h}(x)\|^2_{L_2(\overline{\omega})}.$$

Несложно показывается, что для величин $B_h^{(k)}$, $k = 1,2$, справедливы оценки

$$|B_h^{(1)}| \leqslant [\|u(\xi,g) - P_h u(\xi,g)\|_{L_2(\Omega)} + \|u_0(\xi) - P_h u_{0h}(\xi)\|_{L_2(\Omega)}] \times$$
$$\times [\|u(\xi,g)\|_{L_2(\Omega)} + \|P_h u(\xi,g)\|_{L_2(\Omega)} + \|u_0(\xi)\|_{L_2(\Omega)} + \|P_h u_{0h}(\xi)\|_{L_2(\Omega)}], \qquad (60)$$
$$|B_h^{(2)}| \leqslant \|y(x,\Phi_h) - u(\xi,g)\|_{L_2(\overline{\omega})}[\|u(x,g)\|_{L_2(\overline{\omega})} + \|y(x,\Phi_h)\|_{L_2(\overline{\omega})} + 2\|u_{0h}(x)\|_{L_2(\overline{\omega})}].$$

Здесь через $P_h\nu(\xi)$, $\xi \in \Omega$, обозначено кусочно-постоянное восполнение на Ω сеточной функции $\nu(x)$, $x \in \overline{\omega}$, определяемое по формуле

$$P_h\nu(\xi) = \nu(x), \quad \xi \in e(x), \quad x \in \overline{\omega},$$

где $e(x) = e_1(x_1) \times e_2(x_2)$, $x \in \overline{\omega}$, $e_\alpha(x_\alpha) = \{\xi_\alpha : x_\alpha - 0.5h_\alpha \leqslant \xi_\alpha \leqslant x_\alpha + 0.5h_\alpha\}$, $x_\alpha \in \omega_\alpha$, $e_\alpha(0) = \{\xi_\alpha : 0 \leqslant \xi_\alpha \leqslant 0.5h_\alpha\}$, $e_\alpha(l_\alpha) = \{\xi_\alpha : l_\alpha - 0.5h_\alpha \leqslant \xi_\alpha \leqslant l_\alpha\}$, $\alpha = 1,2$.

Оценим величину $\|u(\xi) - P_h u(\xi)\|^2_{L_2(\Omega)}$. Имеем

$$\|u(\xi) - P_h u(\xi)\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{\overline{\omega}} \int\limits_{e(x)} (u(\xi) - P_h u(\xi))^2\, d\xi = \sum_{\overline{\omega}} \int\limits_{e(x)} (u(\xi) - u(x))^2\, d\xi =$$

$$= \sum_{\overline{\omega}} \int\limits_{e(x)} \bigg(\int\limits_{x_2}^{\xi_2} \frac{\partial u(\xi_1,\tau)}{\partial\tau} d\tau + \int\limits_{x_1}^{\xi_1} \frac{\partial u(\nu,\xi_2)}{\partial\nu} d\nu + \int\limits_{x_1}^{\xi_1}\int\limits_{x_2}^{\xi_2} \frac{\partial^2 u(\nu,\tau)}{\partial\nu\partial\tau} d\nu d\tau\bigg)^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\overline{\omega}} \int\limits_{e(x)} \bigg[h_2^{1/2}\bigg(\int\limits_{e_2(x_2)} \bigg|\frac{\partial u(\xi_1,\tau)}{\partial\tau}\bigg|^2 d\tau\bigg)^{1/2} + h_1^{1/2}\bigg(\int\limits_{e_1(x_1)} \bigg|\frac{\partial u(\nu,\xi_2)}{\partial\nu}\bigg|^2 d\nu\bigg)^{1/2} +$$

$$+ (h_1h_2)^{1/2}\biggl(\int\limits_{e(x)} \left|\frac{\partial^2 u(\nu,\tau)}{\partial\nu\partial\tau}\right|^2 d\nu d\tau\biggr)^{1/2}\Biggr]^2 d\xi_1\, d\xi_2 \leqslant \sum_{\overline{\omega}} |h|^2 \|u(\xi)\|^2_{W_2^2(e(x))}.$$

Следовательно,

$$\|u(\xi) - P_h u(\xi)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |h|\|u\|_{W_2^2(\Omega)}. \tag{61}$$

Оценим величину $\|u_0 - P_h u_0^h\|^2_{L_2(\Omega)}$. Получаем

$$\|u_0 - P_h u_0^h\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{\overline{\omega}} \int\limits_{e(x)} (u_0(t) - u_0^h(x))^2\, dt = \sum_{\overline{\omega}} \int\limits_{e(x)} \biggl[\frac{1}{\hbar_1\hbar_2}\int\limits_{e(x)} (u_0(t) - u_0(\xi))\, d\xi\biggr]^2 dt =$$

$$= \sum_{\overline{\omega}} \int\limits_{e(x)} \biggl\{\frac{1}{\hbar_1\hbar_2}\int\limits_{e(x)} \biggl[\int\limits_{\xi_1}^{t_1} \frac{\partial u_0(\theta_1,t_2)}{\partial\theta_1} d\theta_1 + \int\limits_{\xi_2}^{t_2} \frac{\partial u_0(\xi_1,\theta_2)}{\partial\theta_2} d\theta_2\biggr] d\xi\biggr\}^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{\overline{\omega}} (\hbar_1\hbar_2)^{-1} \int\limits_{e(x)} \biggl\{\int\limits_{e(x)} \biggl[\hbar_1 \int\limits_{e_1(x_1)} \left|\frac{\partial u_0(\theta_1,t_2)}{\partial\theta_1}\right|^2 d\theta_1 + \hbar_2 \int\limits_{e_2(x_2)} \left|\frac{\partial u_0(\xi_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}\right|^2 d\theta_2\biggr] d\xi\biggr\} dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{\overline{\omega}} \biggl[h_1^2 \int\limits_{e(x)} \left|\frac{\partial u_0(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right|^2 dt + h_2^2 \int\limits_{e(x)} \left|\frac{\partial u_0(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right|^2 dt\biggr] \leqslant 2|h|^2 |u_0(t)|^2_{W_2^1(\Omega)}.$$

Поэтому

$$\|u_0 - P_h u_0^h\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 2^{1/2}|h|\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{62}$$

Далее,

$$\|P_h u_0^h(\xi)\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{\overline{\omega}} \int\limits_{e(x)} (u_0^h(x))^2\, d\xi = \sum_{\overline{\omega}} (u_0^h(x))^2 \hbar_1\hbar_2 = \|u_0^h(x)\|^2_{L_2(\overline{\omega})} =$$

$$= \sum_{\overline{\omega}} \biggl(\frac{1}{\hbar_1\hbar_2}\int\limits_{e(x)} u_0(\xi)\, d\xi\biggr)^2 \hbar_1\hbar_2 \leqslant \sum_{\overline{\omega}} \int\limits_{e(x)} (u_0(\xi))^2\, d\xi = \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{63}$$

откуда вытекает, что

$$\|u_0^h(x)\|_{L_2(\overline{\omega})} \leqslant \|u_0(\xi)\|_{L_2(\Omega)}. \tag{64}$$

Кроме того, имеем

$$\|P_h u(\xi)\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{\overline{\omega}} \int\limits_{e(x)} u^2(x)\, d\xi = \|u(x)\|_{L_2(\overline{\omega})} \leqslant C_3\|u\|_{W^2_{2,0}(\overline{\omega})}. \tag{65}$$

Учитывая оценки (61)–(65), а также теоремы вложения и оценки (50), вследствие неравенства (60) получаем

$$|B_h^{(1)}| \leqslant \{|h|\|u\|_{W^2_{2,0}(\Omega)} + 2^{1/2}|h|\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}\}[\|u\|_{L_2(\Omega)} + C_3\|u\|_{W^2_{2,0}(\overline{\omega})} + 2\|u_0\|_{L_2(\Omega)}] \leqslant |h|C^*.$$

Используя априорную оценку для погрешности метода по состоянию (см. теорему 6), неравенства (50), (64) и теоремы вложения, получаем оценку для $B_h^{(2)}$:

$$|B_h^{(2)}| \leqslant \{\widetilde{M}_*|h|^{m-2}\|u\|_{W^2_{2,0}(\Omega)} + \widetilde{C}\|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)}\|u\|_{W^2_{2,0}(\Omega)}\} \times$$

$$\times [\|u\|_{L_2(\overline{\omega})} + \|y\|_{L_2(\overline{\omega})} + 2\|u_0\|_{L_2(\Omega)}] \leqslant |h|^{m-2}C^{**} + \widetilde{C}^*\|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)},$$

откуда

$$|J(g) - J_h(\Phi_h)| \leqslant |h|C^* + |h|^{m-2}C^{**} + \widetilde{C}^* \|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)} \leqslant M_0\{|h| + \|g - \Phi_h\|_{L_\infty(\omega)}\}.$$

Теорема доказана.

Определим теперь некоторые восполнения сеточных управлений $\Phi_{\alpha\beta h}(x)$, $x \in \overline{\omega}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, на Ω. Для построения кусочно-линейного восполнения сеточного управления $\Phi_{\alpha\beta h}(x)$, $x \in \omega$, $\alpha, \beta = 1, 2$, на Ω каждую элементарную ячейку $e^+(x) \subset \overline{\Omega}$, где $e^+(x) = e^+(x_1, x_2) = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : x_\alpha \leqslant \xi_\alpha \leqslant x_\alpha + h_\alpha,\ \alpha = 1, 2\} = \overline{e}'_1(x_1) \times \overline{e}'_2(x_2)$, $x \in \omega_1^- \times \omega_2^-$, разобьём диагональю, образующей тупой угол с осью ξ_1, на два треугольника. Треугольники, расположенные выше диагонали, будем обозначать через $\Delta_-(x)$, а нижние – через $\Delta_+(x)$. Здесь $x = (x_1, x_2)$ – узел, соответствующий вершине прямого угла треугольника $\Delta_\pm$. Пусть r – управляющий параметр, принимающий значения ± 1. Если через $\Phi'_{\alpha\beta hr}(\xi)$ обозначить функцию, определённую в $\Delta_r(x)$, линейную по ξ_1 и ξ_2 и совпадающую в вершинах треугольника с сеточной функцией $\Phi_{\alpha\beta h}(x)$, то кусочно-линейное восполнение на $\overline{\Omega}$ определится в виде $F_h^{(1)}\Phi_{\alpha\beta h}(\xi) = \{\Phi'_{\alpha\beta hr}(\xi) : \xi \in \Delta_r(x),\ r = -1, +1,\ \Delta_r(x) \in \overline{\Omega}\}$:

$$F_h^{(1)}\Phi_{\alpha\beta h}(\xi) = \begin{cases} \Phi_{\alpha\beta h}(x) + \Phi_{\alpha\beta h x_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{\alpha\beta h x_2}(x)(\xi_2 - x_2), & \xi \in \Delta_+(x), \quad x \in \omega_1^- \times \omega_2^-, \\ \Phi_{\alpha\beta h}(x) + \Phi_{\alpha\beta h \overline{x}_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{\alpha\beta h \overline{x}_2}(x)(\xi_2 - x_2), & \xi \in \Delta_-(x), \quad x \in \omega_1^+ \times \omega_2^+. \end{cases}$$

Далее, каждую ячейку $e^+(x) \subset \overline{\Omega}$ разобьём диагональю, образующей острый угол с осью ξ_1, на два треугольника $\Delta'_-(x)$ (верхние) и $\Delta'_+(x)$ (нижние). Аналогично найдём, что

$$F_h^{(2)}\Phi_{\alpha\beta h}(\xi) = \begin{cases} \Phi_{\alpha\beta h}(x) + \Phi_{\alpha\beta h \overline{x}_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{\alpha\beta h x_2}(x)(\xi_2 - x_2), & \xi \in \Delta'_+(x), \quad x \in \omega_1^+ \times \omega_2^-, \\ \Phi_{\alpha\beta h}(x) + \Phi_{\alpha\beta h x_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \Phi_{\alpha\beta h \overline{x}_2}(x)(\xi_2 - x_2), & \xi \in \Delta'_-(x), \quad x \in \omega_1^- \times \omega_2^+. \end{cases}$$

Положим

$$F_h\Phi_{\alpha\beta h}(\xi) = \frac{1}{2}F_h^{(1)}\Phi_{\alpha\beta h}(\xi) + \frac{1}{2}F_h^{(2)}\Phi_{\alpha\beta h}(\xi), \quad \xi \in \overline{\Omega}. \tag{66}$$

Пусть

$$\widetilde{R}_h g_{\alpha\beta}(x) \equiv \widetilde{R}_h k_{\alpha\beta}(x) = S^x k_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{e(x)} k_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad x \in \omega, \tag{67}$$

– дискретизации на сетке ω управлений $g_{\alpha\beta}(\xi) \equiv k_{\alpha\beta}(\xi)$.

Для исследования связи между экстремальными задачами (1)–(8) и (16)–(20) введём отображения

$$\widetilde{R}_h : H \to H_h, \quad N_h : H_h \to H, \tag{68}$$

которые определим следующим образом:

$$\widetilde{R}_h g = \Phi_h, \quad \text{где} \quad g = (g_1, g_2, g_3, g_4) = (k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}), \quad \Phi_h = (\widetilde{R}_h k_{11}, \widetilde{R}_h k_{22}, \widetilde{R}_h k_{12}, \widetilde{R}_h k_{21});$$

$$N_h \Phi_h = g, \quad \text{где} \quad \Phi_h = (\Phi_{11h}, \Phi_{22h}, \Phi_{12h}, \Phi_{21h}), \quad g = (F_h\Phi_{11}, F_h\Phi_{22}, F_h\Phi_{12}, F_h\Phi_{21}).$$

Функции $\widetilde{R}_h$ и F_h определены равенствами (67) и (66). Нетрудно показать, что для произвольных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач (1)–(8) и (16)–(20) соответственно справедливы включения $\widetilde{R}_h g \in U_h$, $N_h\Phi_h \in U$.

Лемма 7. *Для кусочно-линейного восполнения $F_h\Phi_{\alpha\beta h}(\xi)$ на Ω сеточных управлений $\Phi_{\alpha\beta h}(x)$, $x \in \overline{\omega}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, и дискретизации $\widetilde{R}_h g_{\alpha\beta}(x)$ управлений $g_{\alpha\beta}(\xi) \equiv k_{\alpha\beta}(\xi)$ на сетке ω справедливы оценки*

$$\|N_h\Phi_h\|_H \leqslant \|\Phi_h\|_{H_h} + \gamma_h, \quad \text{где} \quad 0 < \gamma_h = O(|h|) \quad \text{при} \quad |h| \to 0; \tag{69}$$

$$\|\widetilde{R}_h g\|_{H_h} \leqslant \|g\|_H. \tag{70}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|\widetilde{R}_h g\|^2_{H_h} = \|\widetilde{R}_h g_{11}\|^2_{W_2^1(\omega)} + 2\|\widetilde{R}_h g_{12}\|^2_{W_2^1(\omega)} + \|\widetilde{R}_h g_{22}\|^2_{W_2^1(\omega)}.$$

Очевидно неравенство $\|R_h k_{\alpha\beta}\|^2_{L_2(\omega)} \leqslant \int_\Omega k^2_{\alpha\beta}(\xi)\,d\xi$. Введём множество $\Omega_h = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : 0 \leqslant \leqslant \xi_1 \leqslant l_1 - h_1,\ 0 \leqslant \xi_2 \leqslant l_2\}$. Применяя теорему Фубини [28, с. 317; 29, с. 55], получаем

$$\|[\widetilde{R}_h k_{\alpha\beta}(x)]_{x_1}\|^2_{L_2([\omega_1/\{l_1-h_1\}]\times\omega_2)} = \sum_{[\omega_1/\{l_1-h_1\}]\times\omega_2} ([\widetilde{R}_h k_{\alpha\beta}(x)]_{x_1})^2 h_1 h_2 =$$

$$= \sum_{[\omega_1/\{l_1-h_1\}]\times\omega_2} \left(\frac{1}{h_1^2 h_2} \int\limits_{x_1-0.5h_1}^{x_1+0.5h_1} \int\limits_{e_2(x_2)} \int\limits_{\xi_2}^{\xi_1+h_1} \frac{\partial k_{\alpha\beta}(\tau,\xi_2)}{\partial\tau} d\tau\, d\xi\right)^2 h_1 h_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h_1} \int\limits_0^{l_1-h_1} \int\limits_0^{l_2} \int\limits_{\xi_1}^{\xi_1+h_1} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(\tau,\xi_2)}{\partial\tau}\right)^2 d\tau\, d\xi = \frac{1}{h_1} \int\limits_{\Omega_h} \int\limits_{\xi_1}^{\xi_1+h_1} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(\tau,\xi_2)}{\partial\tau}\right)^2 d\tau\, d\xi_1\, d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{h_1} \int\limits_{\Omega_h} d\xi_1\, d\xi_2 \int\limits_0^{h_1} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(z_1+\xi_1,\xi_2)}{\partial z_1}\right)^2 dz_1 = \frac{1}{h_1} \int\limits_0^{h_1} dz_1 \int\limits_{\Omega_h} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(z_1+\xi_1,\xi_2)}{\partial z_1}\right)^2 d\xi_1\, d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{h_1} \int\limits_0^{h_1} dz_1 \int\limits_{z_1}^{l_1-h_1+z_1} \int\limits_0^{l_2} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(t_1,\xi_2)}{\partial t_1}\right)^2 dt_1\, d\xi_2 \leqslant \frac{1}{h_1} \int\limits_0^{h_1} dz_1 \int\limits_0^{l_1} \int\limits_0^{l_2} \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2 d\xi_1\, d\xi_2.$$

Откуда

$$\|[\widetilde{R}_h k_{\alpha\beta}(x)]_{x_1}\|^2_{L_2([\omega_1/\{l_1-h_1\}]\times\omega_2)} \leqslant \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial k_{\alpha\beta}(\xi)}{\partial\xi_1}\right)^2 d\xi.$$

Аналогично имеем

$$\|[\widetilde{R}_h k_{\alpha\beta}(x)]_{x_2}\|^2_{L_2(\omega_1\times[\omega_2/\{l_2-h_2\}])} \leqslant \left\|\frac{\partial k_{\alpha\beta}}{\partial\xi_2}\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\|\widetilde{R}_h g\|^2_{H_h} \leqslant \|k_{11}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|k_{22}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + 2\|k_{12}\|^2_{W_2^1(\Omega)}.$$

Оценка (70) доказана.

Установим оценку (69). Сначала заметим, что справедливо неравенство

$$\|F_h\Phi_{11}(\xi)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (F_h^{(1)}\Phi_{11}(\xi))^2\,d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (F_h^{(2)}\Phi_{11}(\xi))^2\,d\xi. \tag{71}$$

Поскольку сеточная функция $\Phi_{\alpha\beta h}(x)$, $\alpha,\beta = 1,2$, определена в точках сетки ω, то доопределим сеточные функции $\Phi_{\alpha\beta h}(x)$ на множестве узлов $\overline{\omega}\setminus\omega$ следующим образом: сначала на прямых $x_2 = 0$ и $x_2 = l_2$ положим $\Phi_{\alpha\beta h}(x_1, 0) = \Phi_{\alpha\beta h}(x_1, h_2)$, $\Phi_{\alpha\beta h}(x_1, l_2) = = \Phi_{\alpha\beta h}(x_1, l_2 - h_2)$, $x_1 \in \omega_1$, затем на прямых $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$ положим $\Phi_{\alpha\beta h}(0, x_2) = = \Phi_{\alpha\beta h}(h_1, x_2)$, $\Phi_{\alpha\beta h}(l_1, x_2) = \Phi_{\alpha\beta h}(l_1 - h_1, x_2)$, $x_2 \in \omega_2$, и, наконец, $\Phi_{\alpha\beta h}(0,0) = \Phi_{\alpha\beta h}(h_1, h_2)$, $\Phi_{\alpha\beta h}(0, l_2) = \Phi_{\alpha\beta h}(h_1, l_2 - h_2)$, $\Phi_{\alpha\beta h}(l_1, 0) = \Phi_{\alpha\beta h}(l_1 - h_1, h_2)$, $\Phi_{\alpha\beta h}(l_1, l_2) = \Phi_{\alpha\beta h}(l_1 - h_1, l_2 - -h_2)$. При этом разностные производные (левые и правые) $\Phi_{\alpha\beta x_m}, \Phi_{\alpha\beta\bar{x}_m}$, $m = 1,2$, занулятся в точках границ $\overline{\omega}\setminus\omega$.

Рассмотрим первый интеграл в неравенстве (71). Имеем

$$\int\limits_{\Omega}(F_h^{(1)}\Phi_{11h}(\xi))^2\,d\xi = \sum_{\triangle_+(x)\in\overline{\Omega}}\int\limits_{\triangle_+(x)}(F_h^{(1)}\Phi_{11h}(\xi))^2\,d\xi + \sum_{\triangle_-(x)\in\overline{\Omega}}\int\limits_{\triangle_-(x)}(F_h^{(1)}\Phi_{11h}(\xi))^2\,d\xi,$$

при этом

$$\sum_{\triangle_+(x)}\int\limits_{\triangle_+(x)}(F_h^{(1)}\Phi_{11h}(\xi))^2\,d\xi = \sum_{\omega_1^-\times\omega_2^-}\int\limits_{\triangle_+(x)}[\Phi_{11h}(x)+\Phi_{11hx_1}(x)(\xi_1-x_1)+\Phi_{11hx_2}(x)(\xi_2-x_2)]^2\,d\xi,$$

$$\sum_{\triangle_-(x)}\int\limits_{\triangle_-(x)}(F_h^{(1)}\Phi_{11h}(\xi))^2\,d\xi = \sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}\int\limits_{\triangle_-(x)}[\Phi_{11h}(x)+\Phi_{11h\bar{x}_1}(x)(\xi_1-x_1)+\Phi_{11h\bar{x}_2}(x)(\xi_2-x_2)]^2\,d\xi,$$

$$S_1(x) = \int\limits_{\triangle_+(x)}[\Phi_{11h}(x)+\Phi_{11hx_1}(x)(\xi_1-x_1)+\Phi_{11hx_2}(x)(\xi_2-x_2)]^2\,d\xi_2\,d\xi_1 =$$

$$= \frac{h_1h_2}{24}[(\Phi_{11h}^2(x)+\Phi_{11h}^2(x_1+h_1,x_2)+\Phi_{11h}^2(x_1,x_2+h_2)) + (\Phi_{11h}(x)+\Phi_{11h}(x_1+h_1,x_2)+$$

$$+\Phi_{11h}(x_1,x_2+h_2))^2] \leqslant \frac{h_1h_2}{6}[\Phi_{11h}^2(x)+\Phi_{11h}^2(x_1,x_2+h_2)+\Phi_{11h}^2(x_1+h_1,x_2)], \quad x\in\triangle_+(x)\in\overline{\Omega}.$$

Совершенно аналогично получаем неравенство

$$S_2(x) = \int\limits_{\triangle_-(x)}[\Phi_{11h}(x)+\Phi_{11h\bar{x}_1}(x)(\xi_1-x_1)+\Phi_{11h\bar{x}_2}(x)(\xi_2-x_2)]\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h_1h_2}{6}[\Phi_{11h}^2(x)+\Phi_{11h}^2(x_1-h_1,x_2)+\Phi_{11h}^2(x_1,x_2-h_2)], \quad x\in\triangle_-(x)\in\overline{\Omega}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega_h}(F_h^{(1)}\Phi_{11h}(\xi))^2\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{6}\Big[\sum_{\omega_1^-\times\omega_2^-}\Phi_{11h}^2(h_1h_2) + \sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}\Phi_{11h}^2h_1h_2 + 2\sum_{\omega_1^-\times\omega_2^+}\Phi_{11h}^2h_1h_2 + 2\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^-}\Phi_{11h}^2h_1h_2\Big] =$$

$$= \|\Phi_{11h}\|^2_{L_2(\omega)} + \frac{1}{6}\Big[h_1\sum_{\omega_2}\Phi_{11h}^2(h_1,x_2)h_2 + h_1h_2\Phi_{11h}^2(h_1h_2) + h_2\sum_{\omega_1}\Phi_{11h}^2(x_1,h_2)h_1 +$$

$$+ h_1\sum_{\omega_2}\Phi_{11h}^2(l_1-h_1,x_2)h_2 + h_1h_2\Phi_{11}^2(l_1-h_1,l_2-h_2) + h_2\sum_{\omega_1}\Phi_{11h}^2(x_1,l_2-h_2)h_1\Big] +$$

$$+ \frac{1}{3}\Big[h_1\sum_{\omega_2}\Phi_{11h}^2(h_1,x_2)h_2 + h_1h_2\Phi_{11h}^2(h_1,l_2-h_2) + h_2\sum_{\omega_1}\Phi_{11h}^2(x_1,l_2-h_2)h_1 +$$

$$+ h_1\sum_{\omega_2}\Phi_{11h}^2(l_1-h_1,x_2)h_2 + h_1h_2\Phi_{11h}^2(l_1-h_1,h_2) + h_2\sum_{\omega_1}\Phi_{11h}^2(x_1,h_2)h_1\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \|\Phi_{11h}\|^2_{L_2(\omega)} + |h|\bar{\nu}^2((l_2-h_2)+(l_1-h_1)) + |h|^2\bar{\nu}^2.$$

Далее,

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\frac{\partial F_h^{(1)}\Phi_{11h}(\xi)}{\partial\xi_\alpha}\Big)^2 d\xi =$$

$$=\sum_{\triangle_+(x)\in\overline{\Omega}}\int\limits_{\triangle_+(x)}\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\frac{\partial F_h^{(1)}\Phi_{11h}(\xi)}{\partial\xi_\alpha}\Big)^2 d\xi+\sum_{\triangle_-(x)\in\overline{\Omega}}\int\limits_{\triangle_-(x)}\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\frac{\partial F_h^{(1)}\Phi_{11h}(\xi)}{\partial\xi_\alpha}\Big)^2 d\xi,$$

$$\int\limits_{\triangle_-(x)}\Big(\frac{\partial F_h^{(1)}\Phi_{11h}(\xi)}{\partial\xi_\alpha}\Big)^2 d\xi=\int\limits_{\triangle_-(x)}\Big[\frac{\partial}{\partial\xi_1}(\Phi_{11h}(x)+\Phi_{11h\bar{x}_1}(x)(\xi_1-x_1)+\Phi_{11h\bar{x}_2}(x)(\xi_2-x_2))\Big]^2 d\xi_1\,d\xi_2=$$

$$=\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}\int\limits_{x_2-h_2-h_2(\xi_1-x_1)/h_1}^{x_2}[\Phi_{11h\bar{x}_1}(x)]^2\,d\xi_1\,d\xi_2=\Phi_{11h\bar{x}_1}^2(x)\frac{h_1h_2}{2}.$$

Откуда после некоторых очевидных преобразований получаем

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\frac{\partial F_h^{(1)}\Phi_{11h}(\xi)}{\partial\xi_\alpha}\Big)^2 d\xi=\sum_{\omega_1^-\times\omega_2^-}\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{11hx_\alpha}^2(x)\frac{h_1h_2}{2}+\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{11h\bar{x}_\alpha}^2(x)\frac{h_1h_2}{2}\leqslant$$

$$\leqslant|\Phi_{11h}(x)|^2_{W_2^1(\omega_1\times\omega_2)}+\frac{1}{2}|h|\{\|\Phi_{11hx_1}(x_1,h_2)\|^2_{L_2(\omega_1/\{l_1-h_1\})}+$$

$$+\|\Phi_{11hx_1}(x_1,l_2-h_2)\|^2_{L_2(\omega_1/\{l_1-h_1\})}+\|\Phi_{11hx_2}(h_1,x_2)\|^2_{L_2(\omega_2/\{l_2-h_2\})}+$$

$$+\|\Phi_{11hx_2}(l_1-h_1,x_2)\|^2_{L_2(\omega_2/\{l_2-h_2\})}\}\leqslant|\Phi_{11h}(x)|^2_{W_2^1(\omega)}+\frac{1}{2}|h|\{2R_1^2(l_1-h_1)+2R_2^2(l_2-h_2)\}.$$

В результате будем иметь

$$\|F_h^{(1)}\Phi_{11h}\|^2_{W_2^1(\Omega)}\leqslant\|\Phi_{11h}\|^2_{W_2^1(\omega)}+\gamma_h^{(1)},\quad 0<\gamma_h^{(1)}=O(|h|)\quad\text{при}\quad|h|\to 0.$$

Таким образом,

$$\|N_h\Phi_h\|^2_H\leqslant\|\Phi_{11h}\|^2_{W_2^1(\omega)}+2\|\Phi_{12h}\|^2_{W_2^1(\omega)}+\|\Phi_{22h}\|^2_{W_2^1(\omega)}+\gamma_h^{(1)}+2\gamma_h^{(2)}+\gamma_h^{(3)}=\|\Phi_h\|^2_{H_h}+\gamma_h.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $g\in U$ и $\Phi_h\in U_h$ – произвольные управления в экстремальных задачах (1)–(8) и (16)–(20). Тогда при достаточно малом $h<h_0$ справедливы оценки*

$$|J(g)-J_h(\widetilde{R}_hg)|\leqslant M_1|h|,\quad |J(N_h\Phi_h(\xi))-J_h(\Phi_h(x))|\leqslant\bar{M}_1|h|. \tag{72}$$

Доказательство леммы опирается на определения отображений $\widetilde{R}_hg$ и $N_h\Phi_h$ и следует из теоремы 7 и леммы 7. Докажем справедливость первого неравенства в (72). Сначала установим оценку

$$|k_{11}-\widetilde{R}_hk_{11}|=\Big|\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e(x)}\Big[\int\limits_{x_2}^{\xi_2}\frac{\partial k_{11}(x_1,\theta)}{\partial\theta}d\theta+\int\limits_{\xi_1}^{x_1}\frac{\partial k(\tau,\xi_2)}{\partial\tau}d\theta\Big]d\xi\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{h_1h_2}\Big\{\int\limits_{x_1-0.5h_1}^{x_1+0.5h_1}\int\limits_{x_2-0.5h_2}^{x_2+0.5h_2}\int\limits_{x_2}^{\xi_2}\Big|\frac{\partial k_{11}(x_1,\theta)}{\partial\theta}\Big|d\theta\,d\xi_1\,d\xi_2+\iint\limits_{e(x)}\int\limits_{\xi_1}^{x_1}\Big|\frac{\partial k(\tau,\xi_2)}{\partial\tau}\Big|d\theta\Big\}d\xi\leqslant R_2h_2+R_1h_1.$$

Тогда
$$|J(g(\xi)) - J_h(\widetilde{R}_h g(x))| \leqslant M_0|h| + 4R_1h_1 + 4R_2h_2 \leqslant M_1|h|.$$

Оценим теперь при $x \in [\omega_1/\{l_1 - h_1, h_1\}] \times [\omega_2/\{l_2 - h_2, h_2\}]$ разность

$$|N_h\Phi_{11h}(\xi) - \Phi_{11h}(x)| = \frac{1}{2}|(F_h^{(1)}\Phi_{11h}(\xi) - \Phi_{11}(x)) + (F_h^{(2)}\Phi_{11h}(\xi) - \Phi_{11}(x))| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}R_1h_1 + \frac{1}{2}R_2h_2 + \frac{1}{2}R_1h_1 + \frac{1}{2}R_2h_2 \leqslant (R_1 + R_2)|h|.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$|J(N_h\Phi_h(\xi)) - J_h(\Phi_h(x))| \leqslant M_0|h| + 4(R_1 + R_2)|h| = \bar{M}_1|h|.$$

Лемма доказана.

Теорема 8. *Пусть J_* и J_{h*} – нижние грани функционалов $J(g)$ и $J_h(\Phi_h)$ в экстремальных задачах (1)–(8) и (16)–(20) соответственно. Семейство сеточных задач (16)–(20), зависящих от шага $h = (h_1, h_2)$ сетки $\overline{\omega} \subset \overline{\Omega}$, при $|h| \to 0$ аппроксимирует исходную экстремальную задачу (1)–(8) по функционалу, т.е. $\lim J_{h*} = J_*$ при $|h| \to 0$, и для скорости сходимости справедлива оценка*
$$|J_{h*} - J_*| \leqslant M|h|. \qquad (73)$$

Доказательство. Согласно теореме 2 множество U_* не пусто. Возьмём какое-либо управление $g_* \in U_*$. Тогда $\widetilde{R}_h(g_*) \in U_h$. Отсюда и из леммы 8 следует, что

$$J_{h*} \leqslant J_h(\widetilde{R}_h g_*) \leqslant J(g_*) + M_1|h|.$$

Так как функции конечного числа переменных Φ_h на слабо бикомпактных множествах U_h достигают своей нижней грани, то $J_{h*} > -\infty$, $U_{h*} \neq 0$. Выберем какое-нибудь управление $\Phi_{h*} \in U_{h*}$. Тогда $N_h\Phi_{h*} \in U$. В силу леммы 8 имеем

$$J_* \leqslant J(N_h\Phi_{h*}) \leqslant J_h(\Phi_{h*}) + \bar{M}_1|h|.$$

Из полученных неравенств вытекает, что $\lim\limits_{|h|\to 0} J_{h*} = J_*$, т.е. семейство разностных задач (16)–(20) при $|h| \to 0$ аппроксимирует исходные экстремальные задачи (1)–(8) по функционалу и справедлива оценка (73). Теорема доказана.

Предположим теперь, что при каждом $h = (h_1, h_2)$ и соответствующей сетке $\overline{\omega}$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближённое значение $J_{h*} + \epsilon_h$ нижней грани J_{h*} функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h в задаче (16)–(20) и найдено сеточное управление $\Phi_{h\varepsilon_h}(x) \in U_h$, дающее приближённое решение задачи (16)–(20) в следующем смысле:

$$J_{h*} \leqslant J_h(\Phi_{h\varepsilon_h}) \leqslant J_{h*} + \epsilon_h, \quad \Phi_{h\varepsilon_h} \in U_h, \qquad (74)$$

где последовательность ϵ_h такова, что $\epsilon_h \geqslant 0$ и $\epsilon_h \to 0$ при $|h| \to 0$, и характеризует точность решения задачи минимизации функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h.

Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление $\Phi_{h\varepsilon_h}(x) \in U_h$ из (74) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (1)–(8).

Теорема 9. *Пусть последовательность сеточных управлений $\{\Phi_{h\varepsilon_h}\} \subset U_h$ определена условиями (74). Тогда последовательность управлений $\{N_h\Phi_{h\varepsilon_h}(r)\}$, где $N_h : H_h \to H$ – отображение, определяемое в (68), является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной задачи (1)–(8), т.е. $\lim J(N_h\Phi_{h\varepsilon_h}) = J_*$ при $|h| \to 0$, и для скорости сходимости справедлива оценка*
$$0 \leqslant J(N_h\Phi_{h\varepsilon_h}) - J_* \leqslant (\bar{M}_1 + M)|h| + \varepsilon_h. \qquad (75)$$

Последовательность $\{N_h\Phi_{h\varepsilon_h}(r)\}$ слабо в $H = (W_2^1(\Omega))^4$ сходится к множеству $U_* \neq \varnothing$ оптимальных управлений исходной экстремальной задачи (1)–(8).

Доказательство. Пусть последовательности сеточных управлений $\{\widehat{\Phi}_h(x)\} \subset U_h$ определены условиями (74). Тогда $N_h\widehat{\Phi}_h \in U$ и

$$0 \leqslant J(N_h\widehat{\Phi}_h) - J_* \leqslant [J(N_h\widehat{\Phi}_h) - J_h(\widehat{\Phi}_h)] + [J_h(\widehat{\Phi}_h) - J_{h*}] + [J_{h*} - J_*] \leqslant (\bar{M}_1 + M)|h| + \epsilon_h,$$

т.е. справедлива оценка (75) скорости сходимости. При $|h| \to 0$ имеем $\lim\limits_{|h|\to 0} J(N_h\widehat{\Phi}_h) = J_*$. Поэтому последовательности управлений $\{N_h\widehat{\Phi}_h(\xi)\}$ являются минимизирующими для функционалов $J(g)$ исходных задач (1)–(8) оптимального управления. Отсюда и из теоремы 2 следует слабая сходимость минимизирующих последовательностей $\{N_h\widehat{\Phi}_h\}$ к соответствующим множествам $U_* \neq \varnothing$. Теорема 9 доказана.

Замечание 3. Из оценки (73) и неравенства (74) при условии, что начальное приближение в итерационном процессе (35), (36) принадлежит окрестности значений точного решения исходной краевой задачи, нетрудно получить, что $\lim J_h(\Phi_{h\varepsilon_h}) = J_*$ при $|h| \to 0$, причём справедлива оценка скорости сходимости $|J_h(\Phi_{h\varepsilon_h}) - J_*| \leqslant M|h| + \varepsilon_h$.

Рассмотрим теперь вопрос о сильной сходимости в H по аргументу (управлению) разностных аппроксимаций (16)–(20). В силу теоремы 2 задача (16)–(20) корректно поставлена в слабой топологии пространства H. Однако, вообще говоря, она является некорректно по Тихонову поставленной задачей минимизации в сильной топологии пространства H, т.е. нет основания ожидать, что любая минимизирующая последовательность (в том числе и последовательность из теоремы 9) будет сходящейся в норме H ко множеству U_*. Для разработки устойчивых алгоритмов построения сильно сходящихся минимизирующих последовательностей успешно применяется известный метод регуляризации Тихонова [18, 30].

Рассмотрим один вариант этого метода, позволяющий построить для исходной экстремальной задачи минимизирующую последовательность, которая получается с помощью разностной аппроксимации и сильно сходится ко множеству “ Ω-нормальных решений” задачи оптимального управления (1)–(8). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближённо, как в силу приближённой исходной информации, так и в силу того, что счёт ведётся с округлениями, так что вместо функционала $J_h(\Phi_h)$ фактически используется приближённый функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$, который связан с $J_h(\Phi_h)$ для всех $\Phi_h \in U_h$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad |\theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \leqslant \delta_h, \quad \delta_h \to +0 \quad \text{при} \quad |h| \to 0.$$

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач (16)–(20) введём на U функционал-стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|_H^2$, $g \in U$, и его сеточный аналог $\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|_{H_h}^2$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом $h = (h_1, h_2)$ рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (16)–(20): $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega(\Phi_h)$, $\Phi_h \in U_h$, где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \to 0$. Рассмотрим задачу минимизации функционала $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$ на U_h: при каждом $h = (h_1, h_2)$ определим сеточное управление $\widehat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h} \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} = \inf\{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} \leqslant T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) \leqslant T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \tag{76}$$

где $\nu_h \geqslant 0$ и $\nu_h \to +0$ при $|h| \to 0$. Введём множество Ω-нормальных решений задачи оптимального управления (1)–(8):

$$U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf \Omega(g_*) : g_* \in U_*\}.$$

Теорема 10. *Пусть последовательность сеточных управлений $\{\widehat{\Phi}_h\}$ определена условиями (76). Тогда последовательность $\{N_h\widehat{\Phi}_h(r)\}$, где отображение $N_h : H_h \to H$ определено в (68), является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной экстремальной задачи (1)–(8), т.е. $\lim J(N_h\widehat{\Phi}_h) = J_*$ при $|h| \to 0$, и для скорости сходимости справедлива оценка*

$$0 \leqslant J(N_h\widehat{\Phi}_h) - J_* \leqslant M(|h| + \delta_h + \nu_h + \alpha_h).$$

Если, кроме того, последовательности $\{\alpha_h\}$, $\{\delta_h\}$, $\{\nu_h\}$ *положительны и* $\alpha_h, \delta_h, \nu_h \to 0$ *при* $|h| \to 0$, *причём* $\{\alpha_h\}$ *стремится к нулю согласовано с величинами* $|h|$, δ_h, ν_h *так, что* $(|h| + \nu_h + \delta_h)/\alpha_h \to 0$ *при* $|h| \to 0$, *то последовательность* $\{N_h\widehat{\Phi}_h\}$ *сильно в* H *сходится к множеству* Ω*-нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений* U_{**} *задачи (1)–(8), т.е.*

$$\lim \rho(N_h\widehat{\Phi}_h; U_{**}) = \lim \inf\{\|N_h\widehat{\Phi}_h - g_{**}\|_H : g_{**} \in U_{**}\} = 0 \quad \text{при} \quad |h| \to 0,$$

$$\lim \Omega(N_h\widehat{\Phi}_h) = \lim \|N_h\widehat{\Phi}_h\|_H^2 = \Omega_* = \inf \Omega(g_*), \quad g_* \in U_*, \quad \text{при} \quad |h| \to 0.$$

Доказательство теоремы проводится с помощью методики из [18, гл. 9, § 4] и [30, гл. 2] и опирается на полученные выше результаты.

Замечание 4. Можно показать, что $\lim T_{h\delta_h\alpha_h*} = J_*$ и $\lim T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) = J_*$ при $|h| \to 0$, причём справедливы следующие оценки скорости сходимости:

$$|T_{h\delta_h\alpha_h*} - J_*| \leqslant M[|h| + \delta_h + \alpha_h], \quad |T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) - J_*| \leqslant M[|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h].$$

Замечание 5. Полученные результаты не зависят от способа решения разностных задач минимизации (16)–(20).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрашин В.Н.* Разностные схемы для нелинейных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 2. С. 294–308.
2. *Абрашин В.Н., Асмолик В.А.* Локально-одномерные разностные схемы для многомерных квазилинейных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 7. С. 1107–1117.
3. *Матус П.П., Станишевская Л.В.* О безусловной сходимости разностных схем для нестационарных квазилинейных уравнений математической физики // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 7. С. 1203–1219.
4. *Матус П.П., Москальков М.Н., Щеглик В.С.* Согласованные оценки точности метода сеток для нелинейного уравнения второго порядка с обобщенными решениями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1249–1256.
5. *Щеглик В.С.* Анализ разностной схемы, аппроксимирующей третью краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1997. Т. 37. № 8. С. 951–957.
6. *Ali A.A., Deckelnick K., Hinze M.* Error analysis for global minima of semilinear optimal control problems // arXiv preprint. 2017. arXiv:1705.01201.
7. *Hernández-Santamaría V., Lazar M., Zuazua E.* Greedy optimal control for elliptic problems and its application to turnpike problems // Numer. Math. 2019. V. 141. № 2. P. 455–493.
8. *Manapova A., Lubyshev F.* About convergence of difference approximations for optimization problems described by elliptic equations with mixed derivatives and unbounded nonlinearity // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1997. P. 020011-1–020011-5.
9. *Jovanovic B.S., Suli E.* Analysis of Finite Difference Schemes. Springer Ser. in Comput. Math. V. 46. London, 2014.
10. *Jovanovic B.S.* Finite difference scheme for PDEs with weak solutions and irregular coefficients // Comput. Methods Appl. Math. 2004. V. 4. № 1. P. 48–65.
11. *Berikelashvili G.* On a nonlocal boundary-value problem for two-dimensional elliptic equation // Comput. Methods Appl. Math. 2003. V. 3. № 1. P. 35–44.
12. *Berikelashvili G., Gupta M.M., Mirianashvili M.* Convergence of fourth order compact difference schemes for three-dimensional convection-diffusion equations // SIAM J. Numer. Anal. 2007. V. 45. № 1. P. 443–455.
13. *Berikelashvili G., Mirianashvili M.* On the convergence of difference schemes for generalized Benjamin–Bona–Mahony equation // Numer. Methods for Partial Differ. Equat. 2014. V. 30. № 1. P. 301–320.
14. *Jovanovich B.S., Matus P.P., Shchehlik V.S.* The estimates of accuracy of difference schemes for the nonlinear heat equation with weak solutions // Math. Model. and Anal. 2000. V. 5. P. 86–96.
15. *Матус П.П.* О корректности разностных схем для полулинейного параболического уравнения с обобщенными решениями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 2155–2175.

16. *Matus P.* On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equations with generalized solutions // Comp. Meth. Appl. Math. 2014. V. 14. № 3. P. 361–371.
17. *Лубышев Ф.В., Файрузов М.Э.* Согласованные оценки скорости сходимости в сеточной норме $W_{2,0}^2(\omega)$ разностных схем для нелинейных эллиптических уравнений со смешанными производными и решениями из $W_{2,0}^m(\Omega)$, $3 < m \leqslant 4$ // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 9. С. 1444–1470.
18. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М., 2002.
19. *Потапов М.М.* Аппроксимация экстремальных задач в математической физике (гиперболические уравнения). М., 1985.
20. *Ишмухаметов А.З.* Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления. М., 1999.
21. *Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.* О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2007. Т. 47. № 3. С. 376–396.
22. *Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.* Аппроксимация задач оптимального управления коэффициентами эллиптических уравнений конвекции-диффузии с условиями сопряжения неидеального контакта // Журн. Средневолжского мат. о-ва. 2019. Т. 21. № 2. С. 187–214.
23. *Manapova A.* On convergence of difference approximations to problems of optimal control in the coefficients of elliptic equations with mixed derivatives and unbounded non-linearity // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1391. P. 012140.
24. *Карчевский М.М., Ляшко А.Д.* Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. Казань, 1976.
25. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1989.
26. *Самарский А.А., Андреев В.Б.* Разностные схемы для эллиптических уравнений. М., 1976.
27. *Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М., 1987.
28. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
29. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.
30. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1986.

Башкирский государственный университет,
г. Уфа

Поступила в редакцию 02.09.2020 г.
После доработки 24.02.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.