ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 6, с. 821–829

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

© 2021 г. П. П. Матус

Для абстрактных нелинейных разностных схем с операторами, действующими в конечномерных банаховых пространствах, формулируется и доказывается критерий устойчивости: при наличии аппроксимации корректно поставленной дифференциальной задачи решение разностной схемы сходится тогда и только тогда, когда она безусловно устойчива. В известном смысле этот критерий обобщает теорему эквивалентности Лакса на нелинейные дифференциальные задачи. Полученные результаты применяются для исследования устойчивости разностных схем, аппроксимирующих квазилинейные параболические уравнения с нелинейностями неограниченного роста.

DOI: 10.31857/S037406412106008X

Введение. Основными понятиями теории разностных схем являются аппроксимация, устойчивость и сходимость. Связь между этими понятиями даётся теоремой Филиппова–Рябенького [1, с. 16; 2, с. 764], которая за рубежом известна как теорема эквивалентности Лакса [3, с. 54]: для согласованного конечно-разностного метода для корректно поставленной линейной начально-краевой задачи для уравнений в частных производных разностный метод сходится тогда и только тогда, когда он устойчив. Под *согласованностью* понимается требование аппроксимации корректно поставленной дифференциальной задачи. В нелинейном случае из сходимости, вообще говоря, не следует устойчивость [4].

Многими авторами предпринимались попытки по перенесению сформулированного утверждения на нелинейные разностные задачи [5–7]. Обзор некоторых результатов в этом направлении представлен в [4] и связан в основном с другими определениями устойчивости – типа слабой устойчивости или слабой обобщённой устойчивости. Следует отметить цикл работ [8–12], посвящённых исследованию устойчивости разностных схем, аппроксимирующих квазилинейные параболические и гиперболические уравнения специального вида. Все исследования в этих работах проводятся лишь в предположениях, относящихся только к свойствам входных данных дифференциальной задачи. Устойчивость в общем случае удаётся доказать лишь до некоторого конечного момента времени $t \leqslant t_0$, величина которого обусловлена применением сеточного аналога леммы Бихари. В [13, 14] аналогичные результаты получены и для вычислительных методов для уравнений политропного газа с дозвуковыми течениями.

В настоящей работе теорема эквивалентности Лакса обобщается на абстрактные нелинейные разностные задачи с операторами, действующими в конечномерных банаховых пространствах. В нелинейном случае такой критерий удаётся установить лишь для безусловно устойчивых вычислительных методов, когда соответствующие априорные оценки имеют место при достаточно малом $|h| \leqslant h_0$. При этом величина h_0 зависит как от согласованности дискретных и непрерывных норм в банаховых пространствах, так и от величины возмущения входных данных задачи. Проведённые исследования позволяют сделать вывод о тесной и неразрывной связи понятий устойчивости в дискретном и непрерывном случаях.

1. Формулировка проблемы. Пусть H_k – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_k$, $k = 1,2$, $L : H_1 \to H_2$ – нелинейный неограниченный дифференциальный оператор и задан элемент $f \in H_2$. Рассмотрим операторное уравнение

$$Lu = f. \tag{1}$$

Далее предполагаем, что задача (1) поставлена корректно по Адамару, т.е. что выполняются следующие условия:

1) решение существует и единственно при всех входных данных $f \in H_2$;

2) решение непрерывно зависит от входных данных, т.е. существует такая положительная постоянная $c_0 > 0$, при которой справедливо следующее неравенство:

$$\|\tilde{u} - u\|_1 \leqslant c_0 \|\tilde{f} - f\|_2, \tag{2}$$

где $\tilde{u} \in H_1$ – решение задачи (1) с возмущёнными входными данными $\tilde{f} \in H_2$.

Свойство решения дифференциальной задачи, выражаемое неравенством (2), называется *устойчивостью* решения по отношению к малому возмущению входных данных.

Для приближённого решения задачи (1) будем использовать разностную схему (абстрактная запись)

$$L_h y = \varphi_h. \tag{3}$$

Здесь $L_h : H_{1h} \to H_{2h}$ и $\varphi \in H_{2h}$ аппроксимируют L и f соответственно, H_{kh}, $k = 1, 2$, – конечномерные банаховы пространства, зависящие от положительного параметра h, являющегося вектором некоторого нормированного пространства с нормой $|h|$.

В работе будем придерживаться основных определений теории разностных схем, данных в [7, 15].

Под *аппроксимацией* разностной схемы (3) на решении дифференциальной задачи (1) будем понимать невязку

$$\psi_h = L_h u_h - \varphi_h = L_h u_h - (Lu)_h + f_h - \varphi_h, \tag{4}$$

для которой

$$\|\psi_h\|_{2h} \leqslant M h^{k_3}, \quad k_3 = \mathrm{const} > 0. \tag{5}$$

Мы говорим, что разностная схема *аппроксимирует* дифференциальную задачу, если

$$\|L_h u_h - (Lu)_h\|_{2h} \to 0 \quad \text{и} \quad \|f_h - \varphi_h\|_{2h} \to 0 \quad \text{при} \quad |h| \to 0. \tag{6}$$

Для всех элементов из H_m и H_{mh} полагаем, что $\Pi_{mh} g = g_h$, где Π_{mh} – проектор. В случае непрерывных функций оператор Π_{mh} является единичным (тождественным), т.е.

$$g_{mh}(x) = \Pi_{mh} g_m(x) = g_m(x), \quad m = 1, 2; \quad x \in \overline{\omega}_h.$$

Будем предполагать также, что введённые в H_{kh} сеточные нормы $\|\cdot\|_{kh}$ согласованы с соответствующими нормами $\|\cdot\|_k$ в пространствах H_k, $k = 1, 2$, т.е.

$$|\|g_h\|_{mh} - \|g\|_m| \leqslant c_m |h|^{k_m}, \quad m = 1, 2,$$

для всех $g_h \in H_{mh}$, $g \in H_m$, где $k_m > 0$.

Кроме того, будем предполагать, что разностная схема (3) аппроксимирует корректно поставленную задачу (1) в смысле выполнения соотношений (5), (6).

Напомним также, что решение разностной схемы *сходится* к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(|h|^{k_3})$, если выполнено неравенство

$$\|y - u_h\|_{1h} \leqslant c_3 |h|^{k_3}.$$

2. Критерий сходимости. Сформулируем и докажем главный результат данной работы.

Теорема. *Если корректно поставленная задача (1) и её конечно-разностная аппроксимация удовлетворяют условию согласованности, то безусловная устойчивость необходима и достаточна для сходимости разностной схемы.*

Доказательство. Необходимость доказана ранее (см., например, [7, с. 107]). Для полноты изложения мы повторим здесь это доказательство. Итак, пусть разностная схема (3) является безусловно устойчивой. Это означает, что существует такая постоянная c_4, не зависящая от $h, y, \tilde{y}$, что при всех достаточно малых $|h| \leqslant h_0$ имеет место априорная оценка

$$\|\tilde{y} - y\|_{1h} \leqslant c_4 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h}, \tag{7}$$

где $\tilde{y}$ – решение задачи (3) с входными данными $\tilde{\varphi}_h \in H_{2h}$. Напомним также, что если неравенство (7) выполнено для произвольных $|h|$, то такая схема называется *абсолютно устойчивой* [7, с. 286].

Из равенства (4), определяющего невязку ψ_h, выразим

$$L_h u_h = \psi_h + \varphi_h = \tilde{\varphi}_h,$$

откуда в силу определения устойчивости и неравенств (5), (7) получаем

$$\|y - u_h\|_{1h} \leqslant c_4 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h} = c_4 \|\psi_h\|_{2h} \to 0 \quad \text{при} \quad |h| \to 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Докажем, что из сходимости следует безусловная устойчивость схемы, т.е. существует такая положительная константа c_4, что при достаточно малом

$$|h| \leqslant h_0, \quad h_0 = c_5 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h}^{1/k_4}, \quad k_4 = \min\{k_1, k_2, k_3\}, \tag{8}$$

имеет место оценка (7).

Вследствие сделанных выше предположений, воспользовавшись неравенством треугольника для норм, получаем

$$\|\tilde{y} - y\|_{1h} = \|\tilde{y} - \tilde{u}_h - (y - u_h) + (\tilde{u}_h - u_h)\|_{1h} \leqslant \|\tilde{y} - \tilde{u}_h\|_{1h} + \|y - u_h\|_{1h} + \|\tilde{u} - u_h\|_{1h} \leqslant$$
$$\leqslant c_5|h|^{k_3} + c_1|h|^{k_1} + \|\tilde{u} - u\|_1 \leqslant c_5|h|^{k_3} + c_1|h|^{k_1} + c_0\|\tilde{f} - f\|_2,$$

а значит,

$$\|\tilde{y} - y\|_{1h} \leqslant c_5|h|^{k_3} + c_1|h|^{k_1} + c_0c_2|h|^{k_2} + c_0\|\tilde{f}_h - f_h\|_{2h}.$$

Отсюда, поскольку

$$\|\tilde{f}_h - f_h\|_{2h} = \|\tilde{f}_h - \tilde{\varphi}_h - (f_h - \varphi_h) + \tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h} \leqslant \|\psi_h\|_{2h} + \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h} \leqslant M|h|^{k_1} + \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2h},$$

приходим к оценке (7), означающей безусловную устойчивость разностной схемы (3) в предположении (8).

Теорема доказана.

3. Устойчивость разностных схем, аппроксимирующих квазилинейное параболическое уравнение.

3.1. Случай существования классического решения. Теория разностных схем для нелинейных уравнений математической физики с нелинейностями неограниченного роста является одной из наиболее сложных и актуальных областей вычислительной математики. Вопросы сходимости и корректности разностных схем для данного класса задач исследовались многими авторами [16–19].

Несмотря на полученные оценки точности решений разностных схем, аппроксимирующих нелинейные уравнения математической физики, вопрос об их устойчивости оставался долгое время открытым. На наш взгляд, главная причина отсутствия научных результатов в этом направлении связана с необходимостью предварительного получения априорных оценок не только для разностного решения в задаче для возмущения $\delta y = \tilde{y} - y$, но и для его производных в сильной равномерной метрике.

Доказанный в настоящей работе критерий сходимости нелинейных разностных схем позволяет доказать безусловную устойчивость разностных методов, для которых уже доказана сходимость.

В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, где $\overline{\Omega} = \{x : 0 \leqslant x \leqslant l\}$, рассмотрим первую краевую задачу для квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{9}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}; \quad u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

Введём область значений точного решения

$$\overline{D}=\{u: m\leqslant u\leqslant M,\quad \overline{u}_0>0,\quad (x,t)\in\overline{Q}_T\},\quad m=\inf_{(x,t)\in\overline{Q}_T}u(x,t),\quad M=\sup_{(x,t)\in\overline{Q}_T}u(x,t),$$

и определим её окрестность

$$\overline{D}_1=\{\tilde{u}:|\tilde{u}-u|<r,\quad u\in\overline{D},\quad r>0\}.$$

В задачах с неограниченной нелинейностью предполагается, что существует постоянная $r_0>0$ такая, что

$$k(u)\geqslant r_0\quad\text{для всех}\quad u\in\overline{D},$$

и, кроме того, функция $k(\tilde{u})$ имеет все ограниченные производные в $\overline{D}_1$.

Будем предполагать, что задача (9), (10) корректно поставлена в следующем смысле:

а) существует единственное её решение $u(x,t)\in C^{2+\lambda,1+\beta}(\overline{Q}_T)$, $0.5<\lambda$, $\beta<1$, причём функция $\partial^2u/\partial x^2$ липщиц-непрерывна по переменной t. Здесь $C^{m_1+\lambda,m_2+\beta}(\overline{Q}_T)$ – класс функций, имеющих в $\overline{Q}_T$ непрерывные производные по x до порядка m_1 включительно и по t до порядка m_2 включительно, которые удовлетворяют условию Гёльдера с показателями λ и β соответственно;

б) решение устойчиво в равномерной норме для всех u, $\tilde{u}\in C^{2+\lambda,1+\beta}(\overline{Q}_T)$ по отношению к малому возмущению начальных данных

$$\|\tilde{u}-u\|_{C(\overline{Q}_T)}\leqslant c_0\|\tilde{u}_0-u_0\|_{C(\overline{\Omega})},$$

где $\|\cdot\|_{C(\overline{Q}_T)}=\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_T}|\cdot|$, $\|\cdot\|_{C(\overline{\Omega})}=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}|\cdot|$, а $\tilde{u}$ – решение задачи (9), (10) с возмущённым начальным условием $\tilde{u}_0$.

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$, $\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=\overline{0,N},\ hN=l\}$, $\overline{\omega}_\tau=\{t_n=n\tau,\ N=\overline{0,N_0},\ \tau N_0=T\}$ исходную дифференциальную задачу аппроксимируем консервативной чисто неявной разностной схемой

$$y_t=(k(\hat{y}_{(0.5)})\hat{y}_{\overline{x}})_x,\quad y_{(0.5)}=(y_{i-1}+y_i)/2,\tag{11}$$

$$y_i^0=u_{0i},\quad i=\overline{0,N};\quad y_0^{n+1}=\mu_1^{n+1},\quad y_N^{n+1}=\mu_N^{n+1}.\tag{12}$$

Здесь использованы стандартные обозначения теории разностных схем [7, с. 12]:

$$y=y_i^n=y(x_i,t_n),\quad y_t=(\hat{y}-y)/\tau,\quad \hat{y}=y_i^{n+1},\quad y_{\overline{x}}=(y_i-y_{i-1})/h,$$

$$y_x=(y_{i+1}-y_i)/h,\quad (ay_{\overline{x}})_x=(a_{i+1}y_{\overline{x},i+1}-a_iy_{\overline{x},i})/h.$$

Вопросы точности разностной схемы (11), (12) подробно изучались в работе [18]. В частности, для погрешности аппроксимации $\psi=-u_t+(k(\hat{u}_{(0.5)})\hat{u}_{\overline{x}})_x$ на решении дифференциальной задачи была получена оценка $\|\psi\|_{C(\overline{\omega}_{h\tau})}\leqslant M(h^\lambda+\tau^\beta)$, $M=\mathrm{const}>0$, и доказана следующая оценка точности:

$$\|y-u\|_{C(\overline{\omega}_{h\tau})}\leqslant c_3(h^{\lambda-0.5}+\tau^{\beta-0.5}),$$

где, как обычно, $\|\cdot\|_{C(\overline{\omega}_h)}=\max\limits_{x\in\overline{\omega}_h}|\cdot|$, $\|\cdot\|_{C(\overline{\omega}_{h\tau})}=\max\limits_{(x,t)\in\overline{\omega}_{h\tau}}|\cdot|$.

Очевидно, что и для возмущённой разностной схемы справедлива аналогичная оценка

$$\|\tilde{y}-\tilde{u}\|_{C(\overline{\omega}_{h\tau})}\leqslant c_3(h^{\lambda-0.5}+\tau^{\beta-0.5});\quad 0.5<\lambda,\quad \beta<1.$$

На основании изложенного заключаем, что

$$\|\tilde{y}-y\|_{C(\overline{\omega}_{h\tau})}\leqslant\|y-u\|_{C(\overline{\omega}_{h\tau})}+\|\tilde{y}-\tilde{u}\|_{C(\overline{\omega}_{h\tau})}+\|\tilde{u}-u\|_{C(\overline{\omega}_{h\tau})}\leqslant$$

$$\leqslant 2c_3(h^{\lambda-0.5}+\tau^{\beta-0.5})+\|\tilde{u}_0-u_0\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Очевидно, что при достаточно малых $h \leqslant h_0$, $\tau \leqslant \tau_0$, удовлетворяющих неравенству

$$2c_3(h^{\lambda-0.5} + \tau^{\beta-0.5}) \leqslant \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{C(\overline{\Omega})},$$

разностная схема (11), (12) безусловно устойчива в C-норме по начальным данным и имеет место неравенство

$$\|\tilde{y} - y\|_{C(\overline{\omega}_{h\tau})} \leqslant 2\|\tilde{u}_0 - u_0\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

3.2. Устойчивость разностных схем для задач с обобщёнными решениями. В прямоугольнике $\overline{Q}_T$ рассмотрим задачу (10) для несколько более общего уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{13}$$

коэффициент $k(x,t,u)$ которого удовлетворяет следующим свойствам:

$$k(x,t,u) \in C(\overline{Q}_T \times \overline{D}), \quad \frac{\partial k(x,t,u)}{\partial u} \in C(\overline{Q}_T \times \overline{D}),$$

$$k(x,t,u) \geqslant k_1 > 0 \quad \text{при всех } (x,t) \in \overline{Q}_T, \;\; u \in \overline{D}.$$

В соответствии с [20] функцию $u(x,t)$ назовём *обобщённым решением* задачи (13), (10), если для каждой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x,t)$ с компактным носителем выполнено следующее равенство:

$$\iint\limits_{Q_T} \left(-u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx\, dt = 0. \tag{14}$$

Если $u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ и $\partial u/\partial x$ – кусочно-непрерывная функция, тогда требование (14) равносильно равенству

$$\oint\limits_C u\, dx + k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}\, dt = 0 \tag{15}$$

вдоль любого контура, ограничивающего подобласть $Q' \in \overline{Q}_T$. Это обычная формулировка для консервативных законов [20]. С помощью тождества (14) мы можем определить обобщённое решение задачи (13), (10) из пространства $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Такое решение, когда существование производной $\partial u/\partial t$ не требуется ни в каком смысле, часто называют *слабым обобщённым решением.* Однако равенство (14) неявно содержит информацию о производной [21], именно,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Мы не можем использовать определение в форме (14), потому что, во-первых, в рассматриваемом случае функция $u(x,t)$ не равна нулю на границе, а во-вторых, мы строим теорию, которая была бы верна в случае несамосопряжённых операторов и для задач произвольной размерности.

Согласно (15) на линии разрыва $\partial x/\partial t = D(t)$ справедливо равенство

$$\left[uD - k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0; \tag{16}$$

здесь и ниже через $[\cdot]$ обозначается разность между значениями функции слева и справа от линии разрыва.

Физические законы, утверждающие непрерывность решения и потока, являются частным случаем соотношения (16):

$$[u] = 0, \quad \left[k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0. \tag{17}$$

Поскольку мы предположим, что $u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, далее ограничимся случаем, когда $\partial u/\partial x$ на линиях разрыва $x_k = v_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, имеет разрывы только первого рода.

Отметим, что в случае линейных задач второе условие в (17) имеет вид

$$\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0.$$

Поэтому, если $\partial u/\partial x$ – разрывная функция, то это влечёт за собой разрыв коэффициента $k = k(x,t)$. В нелинейном случае это не является необходимым. Непрерывность потока может быть обеспечена вырождением коэффициента $k = k(x,t,u)$ на слабых линиях разрыва, как мы можем наблюдать это в случае бегущих температурных волн вдоль нулевого фона для степенных нелинейностей $k = u^\sigma$, $\sigma > 0$ (см. [7, с. 450]).

В случае разрывных коэффициентов вдоль прямых $x = \xi$ А.А. Самарский в [7, с. 417] доказал, что наилучшая консервативная схема с шаблонным функционалом вида

$$a_i = \left(\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x,t)}\right)^{-1}$$

сходится в L_2-норме со вторым порядком по пространственной переменной. Более сложный случай, когда линия разрыва не параллельна координатным осям, не рассматривался. В общем случае для получения соответствующих оценок погрешности аппроксимации наряду с негативной нормой по пространству требуется использовать также и негативные нормы по временно́й переменной.

На введённой равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальную задачу (13), (10) аппроксимируем линеаризованной разностной схемой

$$y_t = (a\hat{y}_{\overline{x}})_x, \tag{18}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h; \quad y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \quad t_n \in \omega_\tau. \tag{19}$$

Шаблонный функционал

$$a = a(y) = 0.5[k(x_{(0.5)}, t_n, y_{i-1}^n) + k(x_{(0.5)}, t_n, y_i^n)], \quad x_{(0.5)} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i),$$

как обычно, выбирается из условия аппроксимации второго порядка для эллиптического оператора [7, с. 409]:

$$(a\hat{u}_{\overline{x}})_x - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = O(h^2 + \tau).$$

Укажем некоторые свойства решения разностной схемы (18), (19). Определим область значений обобщённого решения задачи (13), (10):

$$\overline{D} = \{m_1 \leqslant u(x,t) \leqslant m_2, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T\},$$

$$m_1 = \min_{(x,t)\in\overline{Q}_T}\{\mu_1(t), \mu_2(t), u_0(x)\}, \quad m_2 = \max_{(x,t)\in\overline{Q}_T}\{\mu_1(t), \mu_2(t), u_0(x)\}.$$

Далее будем использовать доказанную в [22] двустороннюю оценку для разностного решения

$$m_1 \leqslant y_i^n \leqslant m_2, \quad i = \overline{0,N}, \quad n = \overline{0,N_0}, \tag{20}$$

т.е. $y(x,t)\in\overline{D}_u$ для всех $(x,t)\in\overline{\omega}_{h\tau}$. Доказательство основывается на установленном в [22, 23] принципе максимума для разностных схем со знакопеременными входными данными.

Следствием двусторонней оценки (20) является априорная оценка [22]

$$\|y^n\|_{C(\overline{\omega}_{h\tau})}\leqslant\max\{\max_{t\in\overline{\omega}_\tau}\{|\mu_1(t)|,|\mu_2(t)|\},\quad\|u_0\|_{C(\overline{\omega}_h)}\}.$$

Получим теперь задачу для погрешности метода $z=y-u$. В силу нелинейности исследуемой схемы эта задача будет заведомо нетривиальна. Фактически, вычитая из разностного уравнения (18) уравнение для погрешности аппроксимации $u_t=(a\hat{u}_{\overline{x}})_x$, мы получаем две эквивалентные формы для уравнения для погрешности метода z:

$$z_t=(a(y)\hat{z}_{\overline{x}})_x+((a(y)-a(u))\hat{u}_{\overline{x}})_x+\psi,\tag{21}$$

$$z_t=(a(y)\hat{\overline{z}}_{\overline{x}})_x+((a(y)-a(u))\hat{y}_{\overline{x}})_x+\psi.\tag{22}$$

К этим уравнениям следует добавить соответствующие начальные и граничные условия:

$$z(x,0)=0,\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad z(0,\hat{t})=z(l,\hat{t})=0,\quad t\in\omega_\tau.$$

Хотя эти задачи эквивалентны, в постановке (22) нам нужно иметь предварительную информацию о локальном поведении разностной производной от приближённого решения y_x. Получение такой априорной оценки для производной y_x не является простой задачей. Аналогичные проблемы возникают при непосредственном изучении устойчивости. Задача для возмущения $\delta y=\tilde{y}-y$ в этом случае имеет вид

$$\delta y_t=(a(y)\delta\hat{y}_{\overline{x}})_x+((a(\tilde{y})-a(y))\hat{\tilde{y}}_{\overline{x}})_x,$$

$$\delta y(x,0)=\tilde{u}_0-u_0,\quad x\in\overline{\omega}_h;\quad \delta y(0,\hat{t})=\hat{\tilde{\mu}}_1-\hat{\mu}_1,\quad \delta y(l,\hat{t})=\hat{\tilde{\mu}}_2-\hat{\mu}_2,\quad t\in\omega_\tau.$$

Так как $y,u\in\overline{D}_u$ и $k(u)\in C^1(\overline{D}_u)$, то

$$\max_{(x,t)\in\overline{\omega}_{h\tau}}|a(y)-a(u)|\leqslant Lz_{(0.5)},\quad L=\mathrm{const}>0.$$

Далее будем использовать скалярные произведения и нормы в пространстве сеточных функций $L_2(\omega_h)$, $W_2^1(\omega_h)$:

$$(v,g)=\sum_{i=1}^{N-1}hv_ig_i,\quad \|v\|_h=\sqrt{(v,v)},\quad \|v_{\overline{x}}]|^2=\sum_{i=1}^{N}hv_{\overline{x},i}^2.$$

Умножая разностное уравнение (21) скалярно в $L_2(\omega_h)$ на $2\tau z$ и используя формулу суммирования по частям

$$(u,v_x)=-(u_{\overline{x}},v]+u_Nv_N-u_0v_1,$$

а также тождество

$$z^{n+1}=0.5(z^n+z^{n+1})+0.5\tau z_t,$$

получаем энергетическое соотношение

$$\tau^2\|z_t\|_h^2+\|z^{n+1}\|_h^2+2\tau(a(y),\hat{z}_{\overline{x}}^2]=\|z^n\|_h^2+2\tau(a(y)-a(u),\hat{u}_{\overline{x}}\hat{z}_{\overline{x}}]+2\tau(\hat{z},\psi).$$

Далее, следуя работе [19] с использованием техники негативных норм, приходим к следующей оценке точности метода в сеточной L_2-норме:

$$\|y^n-u^n\|_h\leqslant c_6(\sqrt{h}+\sqrt{\tau}),\quad n=\overline{0,N_0},$$

означающей безусловную сходимость разностного решения к обобщённому решению дифференциальной задачи (13), (10).

Очевидно, что аналогичная оценка имеет место и для решения $\tilde{y}$ разностной схемы (18), (19) с возмущённым начальным условием

$$\|\tilde{y}^n - \tilde{u}^n\|_h \leqslant c_7(\sqrt{h} + \sqrt{\tau}), \quad n = \overline{0, N_0}.$$

Для применения доказанной в работе теоремы мы должны предположить, что обобщённое решение задачи (13), (10) существует, единственно и непрерывно зависит от начального условия

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\tilde{u} - u\|_{L_2(0,l)} \leqslant c_8 \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{L_2(0,l)}.$$

Так как мы не возмущаем граничное условие $(\delta u(0,t) = \delta u(l,t) = 0),$ то ошибка

$$R(u) = \|u\|_h^2 - \|u\|_{L_2(0,l)}$$

представляет собой погрешность аппроксимации обобщённой квадратурной формулы трапеций. В силу отсутствия существования второй производной $\partial^2 u/\partial x^2$ условие согласования норм выглядит следующим образом:

$$|R(u)| \leqslant c_8 h.$$

Применяя теперь такие же оценки, как и в доказательстве достаточности теоремы, получаем оценку устойчивости

$$\max_{t \in \overline{\omega}_\tau} \|\tilde{y}(t) - y(t)\|_h \leqslant c_9 \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{L_2(0,l)},$$

которая имеет место при всех достаточно малых $h \leqslant h_0,$ $\tau \leqslant \tau_0,$ удовлетворяющих условию

$$\sqrt{h} + \sqrt{\tau} \leqslant c_{10} \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{L_2(0,l)}.$$

Автор выражает благодарность профессору Б.С. Йовановичу за обсуждение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рябенький В.С., Филиппов А.Ф.* Об устойчивости разностных схем. М., 1956.
2. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск, 2002.
3. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М., 1972.
4. *Guo Ben-Yu (Kuo Pen-Yu).* Generalized stability of discretization and its applications to numerical solutions of non-linear partial differential equations // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1992. Т. 32. № 4. P. 530–541.
5. *Якут Л.И.* Теоремы Лакса для нелинейных эволюционных уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. № 6. С. 1304–1307.
6. *Якут Л.И.* К вопросу обоснования сходимости разностных схем // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 1. С. 76–79.
7. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1977.
8. *Matus P.* Stability of difference schemes for non-linear time-dependent problems // Comput. Meth. Appl. Math. 2003. V. 3. № 2. P. 313–329.
9. *Матус П.П.* О корректности разностных схем для полулинейного параболического уравнения с обобщенными решениями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 2155–2175.
10. *Matus P.P., Lemeshevsky S.V.* Stability and monotonicity of difference schemes for nonlinear scalar conservation laws and multidimensional quasi-linear parabolic equations // Comput. Meth. Appl. Math. 2009. V. 9. № 3. P. 253–280.
11. *Матус П.П.* Устойчивость по начальным данным и монотонность неявной разностной схемы для однородного уравнения пористой среды с квадратичной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 7. С. 1011–1021.
12. *Якубук Р.М.* Устойчивость по входным данным и монотонность неявной разностной схемы для одного квазилинейного параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 2. С. 274–285.

13. *Матус П.П., Чуйко М.М.* Исследование устойчивости и сходимости разностных схем для политропного газа с дозвуковыми течениями // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 7. С. 1053–1064.
14. *Марцинкевич Г.Л., Матус П.П., Чуйко М.М.* Устойчивость разностных схем в инвариантах Римана для политропного газа // Журн. вычислит. математики и мат. физ. 2010. Т. 50. № 6. С. 1078–1091.
15. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы с операторными множителями. Минск, 1998.
16. *Абрашин В.Н.* Разностные схемы для нелинейных гиперболических уравнений. I // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 11. С. 2029–2040.
17. *Ляшко А.Д., Федотов Е.М.* Исследование нелинейных двухслойных операторно-разностных схем с весами // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 7. С. 1217–1227.
18. *Матус П.П., Станишевская Л.В.* О безусловной сходимости разностных схем для нестационарных квазилинейных уравнений математической физики // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 7. С. 1203–1219.
19. *Matus P.* On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equations with generalized solutions // Comput. Meth. Appl. Math. 2014. V. 14. № 3. P. 361–371.
20. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47 (89). № 3. С. 271–306.
21. *Карчевский М.М., Павлова М.Ф.* Уравнения математической физики. Дополнительные главы. Казань, 2008.
22. *Matus P., Hieu L.M., Vulkov L.G.* Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations // J. of Comput. and Appl. Math. 2017. V. 310. P. 186–199.
23. *Матус П.П., Утебаев Б.Д.* Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений // Мат. моделирование. 2021. Т. 33. № 4. С. 60–78.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Католический университет им. Иоанна-Павла II,
г. Люблин, Польша

Поступила в редакцию 05.11.2020 г.
После доработки 05.11.2020 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.