ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 6, с. 830–839

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.642.7+517.968.73

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ДЛЯ ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРИЛОЖЕНИИ К ДВУМЕРНЫМ ЗАДАЧАМ ДИФРАКЦИИ

© 2021 г. Г. А. Расолько, В. М. Волков

Рассматривается математическая модель рассеяния H-поляризованных электромагнитных волн на экране с криволинейной границей, основанная на сингулярном интегро-дифференциальном уравнении с ядром Коши и логарифмической особенностью. Подынтегральные выражения содержат как искомую функцию, так и её первую производную. Для численного анализа данной модели построены две вычислительные схемы, основанные на представлении искомой функции в виде линейной комбинации ортогональных многочленов Чебышёва и спектральных соотношениях, позволяющих получить простые аналитические выражения для сингулярной составляющей уравнения. Коэффициенты разложения решения по базису полиномов Чебышёва вычисляются как решение соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Результаты численных экспериментов показывают, что на сетке из 20–30 узлов погрешность приближённого решения не превышает вычислительной погрешности.

DOI: 10.31857/S0374064121060091

Введение. Аппарат сингулярных интегральных уравнений (СИУ) широко используется при решении задач аэродинамики, дифракции и в разных областях естествознания. Точность приближённого численного решения интегральных уравнений во многом определяется способом их дискретизации, т.е. выбором квадратурных формул, базисных функций и узлов аппроксимации, с помощью которых исходная задача сводится при численном интегрировании к системе линейных алгебраических уравнений приемлемой размерности и обусловленности. Для сингулярных интегральных уравнений вследствие наличия особенностей в подынтегральных функциях требуется максимально учитывать специфику задачи.

Данная работа является продолжением исследований [1–4], посвящённых разработке вычислительных схем приближённого решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений методом ортогональных многочленов.

1. Постановка задачи. Математическое описание задачи рассеяния H-поляризованных электромагнитных волн экраном с криволинейной границей сводится к решению интегро-дифференциального уравнения вида (см. [5, с. 87])

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)}{t-x}\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}M(x,t)\varphi(t)\ln|t-x|\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t)K(x,t)\,dt=f(x),\quad -1<x<1. \tag{1}$$

Здесь $M(x,t)$, $K(x,t)$ и $f(x)$ – заданные функции из класса Гёльдера H_α, $0<\alpha\leqslant 1$, и $\varphi(x)\in H_\alpha$ – искомая функция. В монографии [5, с. 67] отмечено, что решение данного уравнения существует и единственно при выполнении условий

$$\varphi(-1)=\varphi(1)=0 \tag{2}$$

и искомая функция представима в виде

$$\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}\,v(x), \tag{3}$$

где $v(x)$ – функция, ограниченная на отрезке $x\in[-1,1]$.

Вычислительная схема, предложенная в [5, с. 85], основывается на интерполировании искомого решения многочленом по узлам Чебышёва $\tau_m = \cos\theta_m$, $\theta_m = m\pi/(n+1)$, $m = \overline{1,n}$, и привлечении известных спектральных соотношений для интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x|\,dt = \alpha_k T_k(x), \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}, \tag{4}$$

где $\alpha_0 = -\ln 2$, $\alpha_k = -1/k$, $k > 0$, а $T_k(x)$ – многочлены Чебышёва первого рода; как известно, $T_k(x) = \cos(k\arccos x)$ при $x \in [-1,1]$.

В данной работе предлагаются алгоритмы численного решения уравнения (1) методом ортогональных многочленов, которые, в отличие от методики [5], построены на основе спектральных или квазиспектральных соотношений и позволяют получить приближённые аналитические выражения для сингулярных интегралов, не прибегая к квадратурным формулам.

2. Предварительные сведения. Наряду с (4) будем использовать известные спектральные соотношения [6, с. 45]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x), \quad -1 < x < 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,U_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x} = -T_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $U_k(x)$, $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, – многочлены Чебышёва второго рода. Кроме приведённых, получим некоторые дополнительные тождества, необходимые для построения эффективных алгоритмов численного решения поставленной задачи.

Для произвольной функции $f(x)$, $x \in [-1,1]$, используем приближённое её представление в виде интерполяционного многочлена по узлам Чебышёва первого рода [7, с. 104]

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j T_j(x), \tag{7}$$

где

$$f_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k), \quad f_j = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)T_j(x_k), \quad j = \overline{1,n}, \quad x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = \overline{0,n}.$$

Для разложения функции $f(x)$ по многочленам Чебышёва второго рода воспользуемся в представлении (7) известными тождествами [7, с. 23]

$$T_0(x) = U_0(x), \quad 2T_1(x) = U_1(x), \quad 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \quad j \geqslant 2.$$

В результате будем иметь

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x), \tag{8}$$

где

$$f_j = G_j - G_{j+2}, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1} = G_{n-1}, \quad f_n = G_n,$$

$$G_j = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)T_j(x_k), \quad j = \overline{0,n}, \quad x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = \overline{0,n}.$$

Используя разложения (7) и (8), несложно построить следующий интерполяционный многочлен $\Psi_{n,n}(x,t)$ функции двух переменных $\Psi(x,t)$:

$$\Psi(x,t)\approx\Psi_{n,n}(x,t)=\sum_{q=0}^{n}T_q(x)\sum_{j=0}^{n}U_j(t)\psi_{q,j},$$

$$\psi_{q,j}=\frac{\delta_q}{(n+1)^2}\sum_{l=0}^{n}T_q(x_l)\sum_{r=0}^{n}\Psi(x_l,x_r)(T_j(x_r)-\theta_jT_{j+2}(x_r)),$$

$$\delta_q=\begin{cases}1, & q=0,\\ 2, & q\neq 0,\end{cases}\quad \theta_j=\begin{cases}1, & j=\overline{0,n-2},\\ 0, & j=n-1,n,\end{cases}\quad x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right),\quad k=\overline{0,n}. \tag{9}$$

3. Спектральные схемы решения задачи (1), (2). Рассмотрим две схемы численного решения задачи (1), (2). Данные схемы основаны на представлении искомого решения в виде интерполяционных полиномов Чебышёва и использовании соответствующих спектральных соотношений вида (4)–(6).

3.1. В первой схеме приближённое решение задачи (1), (2) будем искать как решение следующей задачи относительно новой неизвестной функции $\varphi_n(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n'(t)}{t-x}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}M_{n,n}(x,t)\varphi_n(t)\ln|t-x|\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt=f_{3n+2}(x),\quad |x|<1,\quad \varphi_n(-1)=\varphi_n(1)=0, \tag{10}$$

где $M_{n,n}(x,t)$ и $K_{n,n}(x,t)$ – интерполяционные многочлены вида (9) степени n для функций $M(x,t)$ и $K(x,t)$ соответственно, $f_{3n+2}(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ вида (8) степени $3n+2$. Отметим, что, согласно [5, с. 67], уравнение (10) разрешимо.

Чтобы получить явное выражение для функции $\varphi_n(x)$, поступим следующим образом. Введём вспомогательную функцию

$$v_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n'(t)}{t-x}\,dt. \tag{11}$$

Тогда, выполнив обращение интеграла (11) в классе неограниченных функций, получим

$$\varphi_n'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}v_n(t)}{t-x}\,dt+\frac{c}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Далее, учитывая, что $\varphi_n(-1)=0$, приходим к выражению

$$\varphi_n(x)=\int_{-1}^{x}\varphi_n'(\tau)\,d\tau=-\int_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\frac{v_n(t)}{t-\tau}\,dt+\frac{c}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(x,t)v_n(t)\,dt+\mu(x),\quad \mu(x)=c(\arcsin x+\pi/2), \tag{12}$$

где

$$H(x,t) = -\sqrt{1-t^2}\int\limits_{-1}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{d\tau}{t-\tau}\right) =$$

$$= -\sqrt{1-t^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-xt+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|}\right) = -\ln\frac{1-xt+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|}.$$

Учитывая тождество $H(-1,t) = H(1,t)$, находим, что $c = 0$. Функция $H(x,t)$, очевидно, является симметрической и неположительной, и кроме того, имеют место оценки

$$H(x,t) = H(\cos\theta,\cos\sigma) = -\ln\left((1-\cos(\theta+\sigma))\left(2\sin\frac{\theta+\sigma}{2}\left|\sin\frac{\theta-\sigma}{2}\right|\right)^{-1}\right) =$$

$$= -\ln\left(\sin\frac{\theta+\sigma}{2}\left|\sin\frac{\theta-\sigma}{2}\right|^{-1}\right) \leqslant 0, \quad 0<\sigma, \quad \theta\leqslant\pi,$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}|H(x,t)|\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\int\limits_{-1}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{d\tau}{t-\tau}\right)dt = \sqrt{1-x^2}\leqslant 1.$$

Для вспомогательной функции (11) используем разложение

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k U_k(x), \tag{13}$$

c_k, $k=\overline{0,n}$, – пока неизвестные постоянные. Из (12) и (13) следует, что

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n} c_k\frac{1}{k+1}U_k(x), \tag{14}$$

так как

$$\varphi_n(x) = -\int\limits_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\frac{v_n(t)}{t-\tau}\,dt\right)d\tau =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} c_k\int\limits_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\frac{U_k(t)}{t-\tau}\,dt\right)d\tau = \sum_{k=0}^{n} c_k\int\limits_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}T_{k+1}(\tau)\,d\tau = \sum_{k=0}^{n} c_k A_k(x),$$

где

$$A_k(x) = \int\limits_{-1}^{x}\frac{T_{k+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau = -\frac{1}{k+1}\sin((k+1)\arccos(x)) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{k+1}U_k(x), \quad k\geqslant 0.$$

Далее, введём обозначения

$$I(\varphi_n;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} M_{n,n}(x,t)\varphi_n(t)\ln|t-x|\,dt, \tag{15}$$

$$k(\varphi_n;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt. \tag{16}$$

Уравнение (10) с учётом разложения (13) и обозначений (15), (16) принимает вид

$$v_n(x) + I(\varphi_n; x) + k(\varphi_n; x) = f_{3n+2}(x). \tag{17}$$

Воспользовавшись представлением (14), преобразуем слагаемые (15) и (16) в равенстве (17). Для интеграла $I(\varphi_n; x)$ имеем

$$I(\varphi_n; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_n(t) M_{n,n}(x,t) \ln|t-x|\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{n} \beta_k c_k U_k(t) M_{n,n}(x,t) \ln|t-x|\, dt = -\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} J_k(x), \tag{18}$$

где

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} M_{n,n}(x,t) U_k(t) \ln|t-x|\, dt. \tag{19}$$

Запишем для функции $M(x,t)$ её интерполяционный многочлен $M_{n,n}(x,t)$ вида (9):

$$M_{n,n}(x,t) = \sum_{q=0}^{n} T_q(x) \sum_{j=0}^{n} U_j(t) m_{q,j},$$

$$m_{q,j} = \frac{\delta_q}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^{n} T_q(x_l) \sum_{r=0}^{n} M(x_l, x_r)(T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)), \tag{20}$$

где δ_q, θ_j и x_k, $k = \overline{0,n}$, – те же, что в (9). Тогда функция (19) примет вид

$$J_k(x) = \sum_{q=0}^{n} T_q(x) \sum_{j=0}^{n} m_{q,j} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) \ln|t-x|\, dt = \sum_{q=0}^{n} T_q(x) \sum_{j=0}^{n} m_{q,j} L_{k,j}(x), \tag{21}$$

здесь

$$L_{k,j}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) \ln|t-x|\, dt.$$

Учитывая тождество

$$\sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) = \frac{T_{|k-j|}(t) - T_{k+j+2}(t)}{2\sqrt{1-t^2}}$$

и спектральные соотношения (4), для функции $L_{k,j}(x)$ получаем представление

$$L_{k,j}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_{|k-j|}(t) - T_{k+j+2}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x|\, dt = \frac{1}{2}(\alpha_{|k-j|} T_{|k-j|}(x) - \alpha_{k+j+2} T_{k+j+2}(x)),$$

и тогда из (21) следует, что

$$J_k(x) = \sum_{q=0}^{n} T_q(x) \sum_{j=0}^{n} m_{q,j} \frac{1}{2} S_{k,j}(x), \quad S_{k,j}(x) = (\alpha_{|k-j|} T_{|k-j|}(x) - \alpha_{k+j+2} T_{k+j+2}(x)). \tag{22}$$

Вследствие тождества (22) представление (18) принимает вид

$$I(\varphi_n;x) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{k+1}\sum_{q=0}^{n}T_q(x)\sum_{j=0}^{n}m_{q,j}S_{k,j}(x).$$

Аналогичным образом получим представление интеграла (16), используя интерполяционный многочлен $K_{n,n}(x,t)$ вида (9) для функции $K(x,t)$:

$$K_{n,n}(x,t) = \sum_{q=0}^{n}T_q(x)\sum_{j=0}^{n}U_j(t)k_{q,j},$$

$$k_{q,j} = \frac{\delta_q}{(n+1)^2}\sum_{l=0}^{n}T_q(x_l)\sum_{r=0}^{n}K(x_l,x_r)(T_j(x_r)-\theta_j T_{j+2}(x_r)), \tag{23}$$

где δ_q, θ_j и x_k, $k=\overline{0,n}$, – те же, что в (9).

С учётом представления (23) и свойства ортогональности многочленов Чебышёва второго рода выражение (16) принимает вид

$$k(\varphi_n;x) = -\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{k+1}\sum_{q=0}^{n}T_q(x)\sum_{j=0}^{n}k_{q,j}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_k(t)U_j(t)\,dt =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{k+1}\sum_{q=0}^{n}T_q(x)\sum_{j=0}^{n}k_{q,j}\rho_{k,j}, \quad \rho_{k,j} = \begin{cases}0,5, & j=k,\\ 0, & j\neq k,\end{cases}$$

или

$$k(\varphi_n;x) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{k+1}\sum_{q=0}^{n}T_q(x)k_{q,k}.$$

Окончательно, используя полученные выше представления интегралов в уравнении (10), приходим к задаче расчёта коэффициентов разложения приближённого решения по базису полиномов Чебышёва

$$\sum_{k=0}^{n}c_kU_k(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{2k+2}\sum_{q=0}^{n}T_q(x)\left[\sum_{j=0}^{n}m_{q,j}(\alpha_{|k-j|}T_{|k-j|}(x)-\alpha_{k+j+2}T_{k+j+2}(x))+k_{q,k}\right] =$$
$$= f_{3n+2}(x). \tag{24}$$

Рассматривая равенство (24) на множестве узлов чебышёвской сетки

$$x_l = \cos\left(\frac{2l+1}{2n+2}\pi\right), \quad l=\overline{0,n}, \tag{25}$$

приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k, $k=\overline{0,n}$:

$$\sum_{k=0}^{n}c_ka_{l,k} = f_{3n+2}(x_l), \tag{26}$$

где

$$a_{l,k} = U_k(x_l) - \frac{1}{2k+2}\sum_{q=0}^{n}T_q(x_l)\left[\sum_{j=0}^{n}m_{q,j}(\alpha_{|k-j|}T_{|k-j|}(x_l)-\alpha_{k+j+2}T_{k+j+2}(x_l))+k_{q,k}\right],$$

$$\alpha_0 = -\ln 2, \quad \alpha_k = -1/k, \quad k>0.$$

Система (26), являющаяся следствием равенства (24), разрешима и имеет единственное решение c_k, $k=\overline{0,n}$.

Приближённое решение $\varphi_n(x)$ вычисляется по формуле (14)

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}c_k U_k(x).$$

3.2. Рассмотрим построение другой схемы численного решения задачи (1), (2). Вначале докажем следующие два утверждения.

Утверждение 1. *Для* $|x|<1$ *имеет место равенство*

$$L_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-t^2}T_k(t))'\frac{dt}{t-x} = \begin{cases} -U_k(x), & k=0, \quad k=1, \\ \dfrac{k-1}{2}U_{k-2}(x) - \dfrac{k+1}{2}U_k(x), & k \geqslant 2. \end{cases} \tag{27}$$

Доказательство. При $k=0$ и $k=1$ формула (27) очевидно верна вследствие соотношений (5), (6).

Пусть $k \geqslant 2$. Вычислим производную от подынтегральной функции и используем тождество [7, с. 23] $xT_k(x) = (1-x^2)U_{k-1}(x) - T_{k-1}(x)$. Тогда

$$L_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left((k+1)\sqrt{1-t^2}U_{k-1}(t) - \frac{T_{k-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right)\frac{dt}{t-x}.$$

Принимая во внимание соотношения (5), (6) и тождество $2T_k(x) = U_k(x) - U_{k-2}(x)$, получаем

$$L_k(x) = -(k+1)T_k(x) - U_{k-2}(x) = \frac{k-1}{2}U_{k-2}(x) - \frac{k+1}{2}U_k(x),$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 2. *Для* $|x|<1$ *имеет место равенство*

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_k(t)\ln|t-x|\,dt = \begin{cases} -\dfrac{\ln 2}{2}T_0(x) + \dfrac{1}{4}T_2(x), & k=0, \\ -\dfrac{1}{2k}T_k(x) + \dfrac{1}{2k+4}T_{k+2}(x), & k \geqslant 1. \end{cases} \tag{28}$$

Доказательство. С учётом тождества $2(1-x^2)U_k(x) = T_k(x) - T_{k+2}(x)$ (см., например, [7, с. 23]) подынтегральная функция в (28) принимает вид (4), откуда следует справедливость утверждения.

Приближённое решение задачи (1), (2) будем искать в том же виде, что и (3), т.е. в виде $\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2}\,v_n(x)$, где новая неизвестная функция $v_n(x)$ – решение следующей задачи:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(\sqrt{1-t^2}v_n(t))'}{t-x}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}v_n(t)M_{n,n}(x,t)\ln|t-x|\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}v_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt = f_{3n+2}(x), \quad -1<x<1, \tag{29}$$

здесь, как и выше, $M_{n,n}(x,t)$ и $K_{n,n}(x,t)$ – интерполяционные многочлены вида (9) степени n для функций $M(x,t)$ и $K(x,t)$ соответственно, $f_{3n+2}(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ вида (7) степени $3n+2$.

Используем следующее представление искомой функции:

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x), \tag{30}$$

в котором $c_k,\ \ k = \overline{0,n},$ – пока неизвестные постоянные.

При подстановке (30) в (29) с учётом равенства (27) и того, что $U_{-1}(x) = 0,$ получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{(\sqrt{1-t^2}v_n(t))'}{t-x}\,dt = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{(\sqrt{1-t^2}T_k(t))'}{t-x}\,dt = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x). \tag{31}$$

Рассмотрим, далее, второй интеграл в (29):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}v_n(t)M_{n,n}(x,t)\ln|t-x|\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}T_k(t)M_{n,n}(x,t)\ln|t-x|\,dt = \sum_{k=0}^{n} c_k I_k(x),$$

где

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}M_{n,n}(x,t)T_k(t)\ln|t-x|\,dt.$$

Воспользовавшись представлением (20) для многочлена $M_{n,n}(x,t),$ будем иметь

$$I_k(x) = \sum_{q=0}^{n} T_q(x)\sum_{j=0}^{n} m_{q,j}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}T_k(t)U_j(t)\ln|t-x|\,dt = \sum_{q=0}^{n} T_q(x)\sum_{j=0}^{n} m_{q,j}P_{k,j}(x),$$

где

$$P_{k,j}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}T_k(t)U_j(t)\ln|t-x|\,dt = \frac{1}{2\pi}\biggl(\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}(U_{j+k}(t) + U_{j-k}(t))\ln|t-x|\,dt\biggr).$$

Для вычисления интегралов из определения функции $P_{k,j}(x)$ используем, поскольку $U_{-1}(x) = 0$ и $U_k(x) = -U_{-(k+2)}(x)$ при $k < 0,$ равенство (28). В результате для второго интеграла в (29) получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}v_n(t)M_{n,n}(x,t)\ln|t-x|\,dt = \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{q=0}^{n} T_q(x)\sum_{j=0}^{n} m_{q,j}P_{k,j}(x), \tag{32}$$

где

$$P_{k,j}(x) = \frac{1}{2}J_{j+k}(x) + \frac{1}{2}\begin{cases} J_{j-k}(x), & \text{если}\quad j-k \geqslant 0,\\ 0, & \text{если}\quad j-k=-1,\\ -J_{k-j-2}(x), & \text{если}\quad j-k<-1.\end{cases}$$

Аналогичным образом преобразуем третий интеграл в (29), используя представление (23) для многочлена $K_{n,n}(x,t)$ и свойство ортогональности многочленов Чебышёва второго рода:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}v_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{j=0}^{n}k_{m,j}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}T_k(t)U_j(t)\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{j=0}^{n}k_{m,j}\frac{1}{2}\bigg(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}(U_{j+k}(t)+U_{j-k}(t))\,dt\bigg)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}k_{m,j}(\mu_{j,k}+\omega_{j,k})=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}T_m(x)D_{m,k}. \tag{33}$$

Здесь $\mu_{j,k}=0.5,$ если $j=k=0,$ и $\mu_{j,k}=0$ в противном случае,

$$\omega_{j,k}=\begin{cases}0.5, & \text{если} \quad j=k,\\ -0.5, & \text{если} \quad j=k-2\geqslant 0,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}\qquad D_{m,k}=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}k_{m,j}(\mu_{j,k}+\omega_{j,k}).$$

Для $D_{m,k}$ имеем

$$D_{m,k}=\begin{cases}k_{m,0}/2, & \text{если} \quad k=0,\\ k_{m,1}/4, & \text{если} \quad k=1,\\ (k_{m,k}-k_{m,k-2})/4, & \text{если} \quad k\geqslant 2.\end{cases}$$

Используя полученные выше представления интегралов (31)–(33) в уравнении (29), приходим к задаче для нахождения коэффициентов разложения приближённого решения по базису полиномов Чебышёва:

$$\sum_{k=0}^{n}c_kL_k(x)+\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{q=0}^{n}T_q(x)\sum_{j=0}^{n}m_{q,j}P_{k,j}(x)+\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{q=0}^{n}T_q(x)D_{q,k}=f_{3n+2}(x). \tag{34}$$

Рассматривая уравнение (34) на множестве узлов чебышёвской сетки (25), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_k,$ $k=\overline{0,n}$:

$$\sum_{k=0}^{n}c_ka_{l,k}=f_{3n+2}(x_l),\quad l=\overline{0,n}, \tag{35}$$

где

$$a_{l,k}=L_k(x_l)+\sum_{q=0}^{n}T_q(x_l)\bigg(\sum_{j=0}^{n}m_{q,j}P_{k,j}(x_l)+D_{q,k}\bigg),\quad k=\overline{0,n},\quad l=\overline{0,n}.$$

Приближённое решение уравнения (1) в произвольной точке $x\in[-1,1]$ вычисляется по формуле

$$\varphi_n(x)=\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n}c_kT_k(x). \tag{36}$$

4. Результаты численных экспериментов. Предложенные схемы протестированы на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при

$$f(x)=\frac{4x^4}{5}-\frac{32x^2}{15}+\frac{x(60\sqrt{2}-90)-79}{30(x^2+1)}-x(2\sqrt{2}+1)+\frac{79}{30},$$

$$M(x,t)=\frac{x}{x^2+1}(2t^2-1),\quad K(x,t)=\frac{x^3t}{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}.$$

Известно, что точным решением задачи (1), (2) в данном случае является функция $\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, в чём несложно убедиться и непосредственно.

Как показывают расчёты, уже при небольшом числе точек чебышёвской сетки достигается достаточно высокая точность вычисления приближённого решения данного уравнения.

Для первой схемы вычисления, решая систему (26) при $n \geqslant 18$, получаем, что точное решение $\varphi(x)$ отличается от приближённого $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (14), в системе точек $x = -0.99,\ -0.98,\ \ldots,\ 0.99$ не более чем на $3\cdot 10^{-15}$, что соизмеримо с вычислительной погрешностью. Такие же результаты справедливы и относительно точности приближённого решения, полученного при использовании второй схемы (35), (36).

Заключение. Построенные схемы численного решения интегро-дифференциальных уравнений вида (1), в отличие от ранее известных методик [5], позволяют получить приближённое решение задачи, не прибегая к квадратурным формулам. Благодаря этому, как показывают численные примеры, предложенные алгоритмы при небольших вычислительных затратах на достаточно грубой сетке обеспечивают высокую точность приближённого решения, ограниченную лишь вычислительной погрешностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Расолько Г.А.* Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 3. С. 68–74.
2. *Расолько Г.А.* К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 58–68.
3. *Расолько Г.А., Шешко С.М., Шешко М.А.* Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1285–1292.
4. *Расолько Г.А., Шешко С.М.* Приближенное решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 2. С. 10–20.
5. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев, 1984.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., 1966.
7. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 28.10.2020 г.
После доработки 28.10.2020 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.