КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.6

МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА ГРАФЕ

© 2021 г. М. Г. Завгородний

Даётся постановка многоточечной краевой задачи, заданной на геометрическом графе. Описаны характеристики графа, допускающего такую постановку. Найден вид краевой задачи, сопряжённой к поставленной задаче. Для функции Грина спектральной многоточечной краевой задачи на графе получен аналог теоремы Келдыша о вычетах.

DOI: 10.31857/S0374064121060108

1. Об одном подходе к многоточечной краевой задаче Валле-Пуссена. Пусть на конечном отрезке $[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$, вещественной оси заданы непрерывные функции $p_i(x)$, $i=\overline{0,n}$, $n\geqslant 2$, и непрерывная функция $f(x)$. Пусть также задан набор из $(m+1)$-й точки: $\alpha=a_0<a_1<\ldots<a_m=\beta$, $m\geqslant 1$.

Рассмотрим многоточечную краевую задачу Валле-Пуссена для дифференциального уравнения

$$p_0(x)u^{(n)}(x)+p_1(x)u^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)u(x)=f(x)\quad (x\in[\alpha,\beta]) \tag{1}$$

при условиях

$$u(a_k)=u'(a_k)=\ldots=u^{(\mu_k-1)}(a_k)=0,\quad k=\overline{0,m}, \tag{2}$$

где $\mu_k\geqslant 1$ и $\mu_0+\mu_1+\ldots+\mu_m=n$.

Считаем, что $\inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|p_0(x)|>0$. Эта задача имеет n условий и её решение ищется в пространстве $C^n[\alpha,\beta]$.

Опишем иной подход к поставленной задаче. Для этого сузим дифференциальное уравнение (1) на объединение интервалов $\Im=[\alpha,\beta]\backslash\{a_k:k=\overline{0,m}\}$ и дополним его во внутренних точках a_k, $k=\overline{1,m-1}$, отрезка $[\alpha,\beta]$ условиями непрерывности

$$u^{(j)}(a_k-0)=u^{(j)}(a_k+0),\quad j=\overline{0,n-1},\quad k=\overline{1,m-1}.$$

Полученная задача вместе с условиями (2) эквивалентна многоточечной краевой задаче Валле-Пуссена (1), (2). Она имеет $n+n(m-1)=nm$ условий и является краевой задачей, заданной на геометрическом графе $\Gamma=[\alpha,\beta]$ с множеством вершин a_k, $k=\overline{0,m}$, и множеством рёбер $\gamma_k=(a_{k-1},a_k)$, $k=\overline{1,m}$.

Такая трактовка многоточечной задачи Валле-Пуссена полезна как для построения сопряжённой к ней краевой задачи, так и для описания поведения функции Грина. При этом не обязательно требовать непрерывность в точках a_k, $k=\overline{1,m-1}$, коэффициентов и правой части дифференциального уравнения (1). Достаточно, чтобы они были равномерно непрерывны на интервалах (a_{k-1},a_k), $k=\overline{1,m}$.

2. Постановка многоточечной краевой задачи на графе. Приступим к построению многоточечной краевой задачи, заданной на произвольном графе.

Пусть Γ – конечный связный ориентированный геометрический граф (см. [1]), имеющий m рёбер. Считаем, что каждое ребро инцидентно двум различным вершинам, которые по определению этому ребру не принадлежат [1]. Следуя указанной работе, введём обозначения: $\Im$ – объединение всех рёбер графа Γ, ρ – его цикломатическое число и I^a – множество всех рёбер, инцидентных вершине a. Положим $\zeta^a_\gamma=1$ $(\zeta^a_\gamma=-1)$, если ребро γ ориентировано к вершине a (от вершины a). Напомним, что цикломатическое число ρ определяется равенством $\rho=m-\nu+1$, где ν – количество вершин графа; вершину называют *внутренней* (*граничной*), если ей инцидентны два или более рёбер (лишь одно ребро).

Для коэффициентов $p_i \in C(\Im)$, $i=\overline{0,n}$, $\inf\limits_{x\in\Im}|p_0(x)|>0$, и функции $f\in C(\Im)$ рассмотрим на множестве $\Im$ дифференциальное уравнение порядка $n\geqslant 2$

$$p_0(x)u^{(n)}(x)+p_1(x)u^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)u(x)=f(x) \quad (x\in\Im), \tag{3}$$

дополненное условиями непрерывности

$$(\zeta^a_\gamma)^k u^{(k)}(a_\gamma)=(-\zeta^a_\eta)^k u^{(k)}(a_\eta), \quad \gamma\in\Im\backslash\{\eta\}, \quad k=\overline{0,n-1}, \tag{4}$$

в каждой внутренней вершине a, и условиями

$$u(a_\eta)=u'(a_\eta)=\ldots=u^{(\mu^a-1)}(a_\eta)=0 \quad (0\leqslant\mu^a<n) \tag{5}$$

во всех или в некоторых вершинах графа Γ. В условиях (5) $\eta\in I^a$ – фиксированное ребро, своё для каждой вершины a. Очевидно, что если $\mu^a>0$ для некоторой вершины a, то условия (4) и (5) гарантируют равенство нулю всех односторонних пределов $u^{(j)}(a_\gamma)$, $j=\overline{0,\mu^a-1}$, вычисленных в вершине a вдоль рёбер $\gamma\in I^a$.

Если суммарное количество κ условий (4) и (5), заданных во всех вершинах графа, равно nm, то краевую задачу (3)–(5) будем называть *многоточечной краевой задачей, заданной на графе.* Под её решением будем понимать функцию из пространства $C^n(\Im)$. Отметим, что если граф Γ представляет собой конечный отрезок $[\alpha,\beta]$, то многоточечная задача (3)–(5) является (см. п. 1) классической многоточечной краевой задачей Валле-Пуссена (1), (2).

Теорема 1. *Многоточечная краевая задача (3)–(5) может быть задана либо на графе-дереве при суммарном количестве условий (5), равным n, либо на графе, имеющем один простой цикл, при отсутствии условий (5) во всех вершинах этого графа.*

На графе, имеющем более одного простого цикла, постановка многоточечной краевой задачи невозможна.

Доказательство. Несложно проверить, что равенство $\kappa=nm$ выполняется, если только суммарное количество условий (5) равно $n(1-\rho)$. Теорема доказана.

3. Сопряжённая краевая задача. Пусть везде ниже $p_i\in C^{(n-k)}(\Im)$, $i=\overline{0,n}$. На пространстве $C^n(\Im)$ определим операторы

$$(L^*_k u)(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j(p_{k-j}(x)u(x))^{(j)}, \quad k=\overline{0,n}.$$

В силу результатов работы [1] верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Краевая задача, сопряжённая к многоточечной краевой задаче (3)–(5), состоит в определении функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению*

$$(L^*_n u)(x)=f^*(x) \quad (f^*\in C(\Im),\ x\in\Im) \tag{6}$$

на множестве $\Im$, условиям

$$\sum_{\gamma\in\Im\backslash\{\eta\}}(\zeta^a_\gamma)^{k+1}(L^*_k u)(a_\gamma)=(-\zeta^a_\eta)^{k+1}(L^*_k u)(a_\eta), \quad k=\overline{0,n-\mu^a-1}, \tag{7}$$

во всех внутренних вершинах a и условиям

$$u(b)=u'(b)=\ldots=u^{(n-\mu^b-1)}(b)=0 \tag{8}$$

во всех граничных вершинах b, если $\rho=0$; и только условиям (7) с $\mu^a=0$, если $\rho=1$.

Следствие. *Краевая задача, сопряжённая к многоточечной краевой задаче (1), (2), задаётся на объединении интервалов $\Im=[\alpha,\beta]\backslash\{a_k: k=\overline{0,m}\}$ дифференциальным уравнением (6) при условиях непрерывности*

$$u^{(j)}(a_k-0)=u^{(j)}(a_k+0), \quad j=\overline{0,n-\mu_k-1}, \quad k=\overline{1,m-1},$$

и краевых условиях

$$u(\alpha)=u'(\alpha)=\ldots=u^{(n-\mu_0-1)}(\alpha)=0, \quad u(\beta)=u'(\beta)=\ldots=u^{(n-\mu_m-1)}(\beta)=0.$$

Отметим, что в отличие от многоточечной краевой задачи (1), (2), решение которой принадлежит пространству $C^n[\alpha,\beta]$, решение $u(x)$ сопряжённой к ней краевой задачи не обладает аналогичной гладкостью. В силу приведённого выше утверждения мы можем гарантировать непрерывность производных этого решения $u(x)$ в каждой точке $a_k\in(\alpha,\beta)$ лишь до порядка $n-\mu_k-1$ включительно. Производные порядка $n-\mu_k$ и выше могут иметь разрывы.

4. Самосопряжённая многоточечная краевая задача. В силу теоремы 3 работы [1] для самосопряжённости краевой задачи, заданной на графе, необходимо, чтобы дифференциальное уравнение (3) имело чётный порядок $n=2s$ и было приводимо к самосопряжённому виду

$$(Du)(x)\triangleq(g_0(x)u^{(s)}(x))^{(s)}+(g_1(x)u^{(s-1)}(x))^{(s-1)}+\ldots+g_s(x)u(x)=f(x) \tag{9}$$

при некоторых коэффициентах $g_k\in C^{(s-k)}(\Im)$, $k=\overline{0,s}$, $\inf\limits_{x\in\Im}|g_0(x)|>0$.

Теорема 3. *Многоточечная краевая задача (9), (4), (5), является самосопряжённой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

а) граф Γ является простой цепью и в каждой его внутренней вершине условия (5) отсутствуют;

б) коэффициенты $g_k(x)$, $k=\overline{0,s-1}$, дифференциального уравнения (9) непрерывны на всей цепи Γ вместе со своими производными до $(s-k-1)$ порядка включительно;

в) если $\rho=0$, то в каждой из двух граничных вершин задано по s условий вида (5).

Доказательство. Пусть многоточечная краевая задача (9), (4), (5) является самосопряжённой. Тогда

1) в каждой внутренней вершине a выполняется равенство $\delta^a-2=-2\mu^a$, где δ^a – степень вершины a, и, следовательно, $\delta^a=2$ и $\mu^a=0$;

2) условия (7), пересчитанные для оператора D с учётом утверждения 1), эквивалентны условиям (4), а это возможно, лишь когда $g_k\in C^{(s-k-1)}(\Gamma)$;

3) в силу теоремы 3 работы [1] $\mu^a=s$ для любой граничной вершины a графа Γ.

Обратно, непосредственной проверкой убеждаемся, что многоточечная краевая задача (9), (4), (5) при выполнении условий а)–в) теоремы является самосопряжённой. Теорема доказана.

Следствие. *Среди всей совокупности многоточечных краевых задач Валле-Пуссена (1), (2), заданных на конечном отрезке вещественной оси, только двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения самосопряжённого вида с одинаковым количеством условий (2) в каждой из двух граничных точек отрезка является самосопряжённой.*

5. О вычетах функции Грина многоточечной краевой задачи. Рассмотрим многоточечную краевую задачу для дифференциального уравнения

$$p_0(x)u^{(n)}(x)+p_1(x)u^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)u(x)=\lambda u(x)\quad(x\in\Im) \tag{10}$$

со спектральным параметром λ при условиях (4), (5) и сопряжённую к ней краевую задачу для дифференциального уравнения $(L_n^*u)(x)=\lambda u(x)$ при условиях (7), (8).

Лемма 1. *Собственные значения рассматриваемых взаимно сопряжённых спектральных краевых задач совпадают с учётом геометрической и алгебраической кратностей.*

Перейдём к рассмотрению функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$, $x,\xi\in\Im$, краевой задачи (10), (4), (5) и установим для неё аналог классического результата М.В. Келдыша (см. [2]).

Теорема 4. *Пусть λ_0 – изолированное собственное значение многоточечной краевой задачи (10), (4), (5), геометрическая и алгебраическая кратности которого равны i и q соответственно. Тогда для любой отвечающей λ_0 канонической системы корневых (собственных и присоединённых) функций*

$$u_{k0}(x),u_{k1}(x),\ldots,u_{k,q_k-1}(x),\quad k=\overline{1,i},\quad q_1+q_2+\ldots+q_i=q,$$

краевой задачи (10), (4), (5) найдётся биортогональная к ней каноническая система корневых функций

$$v_{k0}(\xi),v_{k1}(\xi),\ldots,v_{k,q_k-1}(\xi),\quad k=\overline{1,i},$$

сопряжённой краевой задачи, отвечающая тому же собственному значению λ_0, *такая, что вычет функции Грина* $G(x,\xi,\lambda)$ *относительно её полюса* λ_0 *является следующей линейной комбинацией произведений корневых функций* $u_{kj}(x)$ *и* $v_{k,q_k-j-1}(\xi)$:

$$\operatorname{Res}\,(G(x,\xi,\lambda),\lambda_0) = -\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=0}^{q_k-1} u_{kj}(x)v_{k,q_k-j-1}(\xi).$$

Теорема 4 для классической многоточечной краевой задачи Валле-Пуссена доказана в работе [3]. Там же фактически была построена краевая задача, сопряжённая к задаче Валле-Пуссена, хотя это в работе не было отмечено.

Лемма 2. *Функции Грина* $G(x,\xi,\lambda)$ *и* $G^*(x,\xi,\lambda)$ *взаимно сопряжённых краевых задач, заданных на графе, связаны равенством* $G^*(x,\xi,\overline{\lambda}) = \overline{G(x,\xi,\lambda)}$.

Лемма 2 и теорема 4 позволяют найти вычет $\operatorname{Res}\,(G^*(x,\xi,\lambda),\lambda_0)$ функции Грина $G^*(x,\xi,\lambda)$ краевой задачи, сопряжённой к многоточечной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завгородний М.Г.* Сопряжённые и самосопряжённые краевые задачи на геометрическом графе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 4. С. 446–456.
2. *Келдыш М.В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. Вып. 4 (160). С. 15–41.
3. *Завгородний М.Г., Литманович О.Ю.* Аналог одной теоремы Келдыша для многоточечной задачи Валле-Пуссена // Докл. АН СССР. 1992. Т. 326. № 4. С. 589–591.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 09.02.2020 г.
После доработки 07.04.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.