ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 6, с. 844–848

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.6

К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2021 г. С. М. Пономарёв

Получены некоторые теоремы о единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром λ с данными на параллельных и на внешних характеристиках.

DOI: 10.31857/S037406412106011X

1. Рассмотрим уравнение
$$u_{xx}+(\operatorname{sgn} y)u_{yy}+\lambda u=0, \tag{1}$$
в котором λ – вещественный параметр, в области G, ограниченной в полуплоскости $y>0$ лежащей в этой полуплоскости ляпуновской кривой Γ с концами в точках $A_1(-l_1,0)$ и $A_2(l_2,0)$, где l_1 и l_2 – заданные положительные числа, и при $y\leqslant 0$ отрезками A_1C_1, C_1O, OC_2, C_2A_2 характеристик соответственно $x+y=-l_1$, $x-y=0$, $x+y=0$, $x-y=l_2$ уравнения (1), где координаты точек следующие: $C_1(-l_1/2,-l_1/2)$, $O(0,0)$ и $C_2(l_2/2,-l_2/2)$.

Через G_0 обозначим область $G\bigcap\{y>0\}$ и в полуплоскости $y<0$ через G_1 – треугольную область A_1C_1O, а через G_2 – треугольную область OC_2A_2.

В области G для уравнения (1) рассмотрим задачу Геллерстедта с краевыми условиями на параллельных характеристиках, которую обозначим ${}_1G^1_\lambda$.

Задача ${}_1G^1_\lambda$. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям
$$u(x,y)\in C(\overline{G})\bigcap C^1(G)\bigcap C^2(G_0\bigcup G_1\bigcup G_2); \tag{2}$$
$$u_{xx}+(\operatorname{sgn} y)u_{yy}+\lambda u=0,\quad (x,y)\in G_0\bigcup G_1\bigcup G_2; \tag{3}$$
частные производные u_x и u_y непрерывны в замкнутой области $\overline{G}_0$, за исключением точек A_1, O, A_2, и для любого $\varepsilon>0$ градиент функции $u(x,y)$ в точках A_1, O, A_2 может иметь следующую особенность:
$$|\nabla u(x,y)|\leqslant\frac{C}{[((x+l_1)^2+y^2)(x^2+y^2)((x-l_2)^2+y^2)]^{1/2-\varepsilon}},\quad C=\mathrm{const}>0; \tag{4}$$
$$u(x,y)|_\Gamma=u(x(s),y(s))=\varphi(s),\quad 0\leqslant s\leqslant l, \tag{5}$$
где $x=x(s)$, $y=y(s)$ – параметрические уравнения кривой Γ, s – длина её дуги, отсчитываемой от точки $A_2(l_2,0)$, l – длина кривой Γ, а $\varphi(s)$ – заданная достаточно гладкая функция;
$$u(x,y)|_{A_1C_1}=u(x,-l_1-x)=\psi_1(x),\quad -l_1\leqslant x\leqslant -l_1/2, \tag{6}$$
$$u(x,y)|_{OC_2}=u(x,-x)=\psi_2(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l_2/2, \tag{7}$$
где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – заданные достаточно гладкие функции и $\varphi(l)=\psi_1(-l_1)$.

Обозначим через G_0^* область в полуплоскости $y<0$, симметричную области G_0 относительно оси $y=0$.

Пусть λ_0 – наименьшее положительное собственное значение спектральной задачи
$$\Delta v+\lambda v=0,\quad (x,y)\in\Omega=G_0\bigcup G_0^*\bigcup A_1A_2,$$
$$v|_{\partial\Omega}=0,$$
где $\partial\Omega$ – граница области Ω.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* ${}_1G^1_\lambda$, *то оно единственно при всех* $0 \leqslant \leqslant \lambda < \lambda_0$.

Доказательство. Допуская существование двух различных решений $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ неоднородной задачи ${}_1G^1_\lambda$, заключаем, что функция $u = u_1 - u_2$ является решением однородной задачи ${}_1G^1_\lambda$ и удовлетворяет следующей однородной задаче [1]:

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0 \quad \text{в} \quad G_0, \tag{8}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{9}$$

$$(u_x - u_y)|_{y=0} = -\lambda \int\limits_{-l_1}^{x} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt, \quad -l_1 < x < 0, \tag{10}$$

$$(u_x - u_y)|_{y=0} = -\lambda \int\limits_{0}^{x} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt, \quad 0 < x < l_2, \quad u(0,0) = 0, \tag{11}$$

где $\tau(x) = u(x,0)$, $J_1(z)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка, $\sqrt{\lambda} > 0$ при $\lambda > 0$.

Так же, как в доказательстве теоремы 1 из [2] для случая $\lambda \geqslant 0$, показывается, что имеют место равенства

$$\int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 - \lambda u^2)\,dx\,dy = -\lambda \int\limits_{-l_1}^{0} \tau(x) \int\limits_{-l_1}^{x} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx -$$

$$- \lambda \int\limits_{0}^{l_2} \tau(x) \int\limits_{0}^{x} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx \tag{12}$$

и

$$\int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 - \lambda u^2)\,dx\,dy = -\frac{\lambda}{2} \int\limits_{-l_1}^{0} \tau(x) \int\limits_{-l_1}^{0} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx -$$

$$- \frac{\lambda}{2} \int\limits_{0}^{l_2} \tau(x) \int\limits_{0}^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx = (-\lambda)(M_1 + M_2), \tag{13}$$

где

$$M_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-l_1}^{0} \tau(x) \int\limits_{-l_1}^{0} \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-\theta^2} \cos(\sqrt{\lambda}(x-t)\theta)\,d\theta\,\tau(t)\,dt\,dx \geqslant 0, \tag{14}$$

$$M_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-\theta^2} \biggl[\biggl(\int\limits_{0}^{l_2} \tau(x) \cos(\sqrt{\lambda}\theta x)\,dx \biggr)^2 + \biggl(\int\limits_{0}^{l_2} \tau(x) \sin(\sqrt{\lambda}\theta x)\,dx \biggr)^2 \biggr] d\theta \geqslant 0 \tag{15}$$

для всех $\lambda \geqslant 0$.

Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с рассуждениями доказательства теоремы 1 из [2] для случая $\lambda \geqslant 0$. В них, в частности, устанавливается неравенство

$$\int\limits_{G_0} u^2\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{\lambda_0} \int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy, \tag{16}$$

которое понадобится нам ниже. Теорема доказана.

Как показано в [2] с использованием оценки [3, с. 71, (2.12)], справедливо неравенство $\lambda_0 \geqslant 2/(9\,\mathrm{mes}\,G_0)$. Поэтому хотя точное значение λ_0 и не всегда известно, но вследствие этого неравенства можно утверждать, что теорема 1 имеет место при всех $\lambda \in [0, 2/(9\,\mathrm{mes}\,G_0))$.

Заметим, что функциональные уравнения (10) и (11), дающие связь между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x) = \partial u(x,0)/\partial y$, иногда полезно записать в виде [1, с. 94; 2]

$$\tau(x) = \int\limits_{l_1}^{x} J_0(\sqrt{\lambda}(x-t))\nu(t)\,dt, \quad -l_1 \leqslant x \leqslant 0,$$

$$\tau(x) = \int\limits_{0}^{x} J_0(\sqrt{\lambda}(x-t))\nu(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l_2,$$

где $J_0(z)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Рассмотрим теперь для уравнения (1) в области G задачу Геллерстедта с краевыми условиями на внешних характеристиках, которую обозначим ${}_2G^1_\lambda$.

Задача ${}_2G^1_\lambda$. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (2)–(6) и условию

$$u|_{C_2A_2} = u(x, x-l_2) = \psi(x), \quad l_2/2 \leqslant x \leqslant l_2, \tag{17}$$

где $\psi_1(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции и $\varphi(l) = \psi_1(-l_1)$, $\varphi(0) = \psi(l_2)$.

Теорема 2. *Если существует решение задачи ${}_2G^1_\lambda$, то оно единственно при всех $0 \leqslant \lambda < \lambda_0$.*

Доказательство. Допуская существование двух различных решений $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ неоднородной задачи ${}_2G^1_\lambda$, заключаем, что функция $u = u_1 - u_2$ является решением однородной задачи ${}_2G^1_\lambda$ и удовлетворяет следующей однородной задаче [1]: (8)–(10) и

$$(u_x + u_y)|_{y=0} = \lambda \int\limits_{x}^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(t-x))}{\sqrt{\lambda}(t-x)}\tau(t)\,dt, \quad 0 < x < l_2. \tag{18}$$

Так как Γ – ляпуновская кривая, то, применяя формулу Грина в области G_0 и учитывая равенства (8)–(10), (18) и то, что $\tau(-l_1) = \tau(l_2) = 0$, получаем

$$\int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 - \lambda u^2)\,dx\,dy = -\frac{1}{2}u^2(0,0) - \lambda \int\limits_{-l_1}^{0} \tau(x) \int\limits_{-l_1}^{x} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}u^2(0,0) - \lambda \int\limits_{0}^{l_2} \tau(x) \int\limits_{x}^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(t-x))}{\sqrt{\lambda}(t-x)}\tau(t)\,dt\,dx. \tag{19}$$

Если $\lambda = 0$, то $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{G}_0$, а значит, и во всей области $\overline{G}$.

Если $\lambda > 0$, то, учитывая тождество $J_1(-z) = -J_1(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и меняя порядок интегрирования в интегралах в правой части равенства (19), будем иметь

$$u^2(0,0) + \int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 - \lambda u^2)\,dx\,dy = -\frac{\lambda}{2} \int\limits_{-l_1}^{0} \tau(x) \int\limits_{-l_1}^{0} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx -$$

$$-\frac{\lambda}{2} \int\limits_{0}^{l_2} \tau(x) \int\limits_{0}^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx = (-\lambda)(M_1 + M_2), \tag{20}$$

где постоянные M_1 и M_2 определены равенствами (14) и (15). Отсюда в силу равенств (14)–(16) следует, что

$$(\lambda_0-\lambda)\int\limits_{G_0} u^2\,dx\,dy \leqslant 0,$$

и если $0<\lambda<\lambda_0$, то $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{G}_0$, а значит, и во всей области $\overline{G}$. Теорема доказана.

Заметим, что функциональное уравнение (18), дающее связь между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, иногда полезно записать в виде

$$\tau(x)=\int\limits_x^{l_2} J_0(\sqrt{\lambda}(t-x))\nu(t)\,dt,\quad 0\leqslant x\leqslant l_2.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$(\operatorname{sgn} y)u_{xx}+u_{yy}+\lambda u=0, \tag{21}$$

где λ – вещественный параметр, в области G (характеристики уравнений (1) и (21) совпадают).

В области G для уравнения (21) рассмотрим задачу Геллерстедта с краевыми условиями на параллельных характеристиках.

Задача ${}_1G^2_\lambda$. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y)\in C(\overline{G})\bigcap C^1(G)C^2(G_0\bigcup G_1\bigcup G_2), \tag{22}$$

$$(\operatorname{sgn} y)u_{xx}+u_{yy}+\lambda u=0 \quad \text{при} \quad (x,y)\in G_0\bigcup G_1\bigcup G_2 \tag{23}$$

и условиям (4)–(7).

Теорема 3. *Если существует решение задачи ${}_1G^2_\lambda$, то оно единственно при всех $\lambda\leqslant 0$.*

Доказательство. Допуская существование двух различных решений $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ неоднородной задачи ${}_1G^2_\lambda$, заключаем, что функция $u=u_1-u_2$ является решением однородной задачи ${}_1G^2_\lambda$, и, если положить $\alpha=-\lambda$, удовлетворяет следующей однородной задаче [1]:

$$u_{xx}+u_{yy}-\alpha u=0 \quad \text{в} \quad G_0, \tag{24}$$

$$u|_\Gamma=0, \tag{25}$$

$$(u_x-u_y)|_{y=0}=-\alpha\int\limits_{-l_1}^{x}\frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)}\tau(t)\,dt,\quad -l_1<x<0, \tag{26}$$

$$(u_x-u_y)|_{y=0}=-\alpha\int\limits_{0}^{x}\frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)}\tau(t)\,dt,\quad 0<x<l_2,\quad u(0,0)=0. \tag{27}$$

Применяя формулу Грина в области G_0 и учитывая равенства (24)–(27) и то, что $\tau(-l_1)=$ $=\tau(0)=\tau(l_2)=0$, получаем

$$\int\limits_{G_0}(u_x^2+u_y^2+\alpha u^2)\,dx\,dy=-\alpha\int\limits_{-l_1}^{0}\tau(x)\int\limits_{-l_1}^{x}\frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx-$$

$$-\alpha\int\limits_{0}^{l_2}\tau(x)\int\limits_{0}^{x}\frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)}\tau(t)\,dt\,dx. \tag{28}$$

Если $\alpha=0$, то $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{G}_0$, а значит, и во всей области $\overline{G}$ (при $\lambda=0$).

Если $\alpha > 0$, то из представления (28) в силу равенств (12)–(15) следует, что

$$\int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 + \alpha u^2)\, dx\, dy \leqslant 0,$$

и поэтому $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{G}_0$, а значит, и во всей области $\overline{G}$ (при $\lambda < 0$). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь в области G для уравнения (21) задачу Геллерстедта с краевыми условиями на внешних характеристиках, которую обозначим ${}_2G_\lambda^2$.

Задача ${}_2G_\lambda^2$. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (22), (23), (4)–(6), (17).

Теорема 4. *Если существует решение задачи ${}_2G_\lambda^2$ (22), (23), (4)–(6), (17), то оно единственно при всех $\lambda \leqslant 0$.*

Доказательство. Допуская существование двух различных решений $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ неоднородной задачи ${}_2G_\lambda^2$, заключаем, что функция $u = u_1 - u_2$ является решением однородной задачи ${}_2G_\lambda^2$ и, если положить $\alpha = -\lambda$, удовлетворяет следующей однородной задаче:

$$u_{xx} + u_{yy} - \alpha u = 0 \quad \text{в} \quad G_0, \tag{29}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{30}$$

$$(u_x - u_y)|_{y=0} = -\alpha \int\limits_{-l_1}^{x} \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)} \tau(t)\, dt, \quad -l_1 < x < 0, \tag{31}$$

$$(u_x + u_y)|_{y=0} = \alpha \int\limits_{x}^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(t-x))}{\sqrt{\alpha}(t-x)} \tau(t)\, dt, \quad 0 < x < l_2. \tag{32}$$

Применяя формулу Грина в G_0 и учитывая равенства (29)–(32), а также то, что $\tau(-l_1) = \tau(l_2) = 0$, будем иметь

$$\int\limits_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 + \alpha u^2)\, dx\, dy = -\frac{1}{2} u^2(0,0) - \alpha \int\limits_{-l_1}^{0} \tau(x) \int\limits_{-l_1}^{x} \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(x-t))}{\sqrt{\alpha}(x-t)} \tau(t)\, dt\, dx -$$
$$- \frac{1}{2} u^2(0,0) - \alpha \int\limits_{0}^{l_2} \tau(x) \int\limits_{x}^{l_2} \frac{J_1(\sqrt{\alpha}(t-x))}{\sqrt{\lambda}(t-x)} \tau(t)\, dt\, dx. \tag{33}$$

Если $\alpha = 0$, то $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{G}_0$, а значит, и во всей области $\overline{G}$ (при $\lambda < 0$).

Если $\alpha > 0$, то из представления (33) в силу равенств (19), (20), (14), (15), вытекает неравенство $\int_{G_0} (u_x^2 + u_y^2 + \alpha u^2)\, dx\, dy \leqslant 0$, из которого следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{G}_0$, а значит, и во всей области $\overline{G}$ (при $\lambda < 0$). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пономарёв С.М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.
2. *Пономарёв С.М.* Некоторые теоремы единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 488–495.
3. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.

г. Москва

Поступила в редакцию 11.02.2021 г.
После доработки 11.02.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.