ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 6, с. 849–864

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ[*)]

Ниже публикуются[**)] аннотации докладов, заслушанных в весеннем семестре 2021 г. и частично в осеннем семестре 2020 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале “Дифференц. уравнения”. 2020. Т. 56. № 11).

DOI: 10.31857/S0374064121060121

И. В. Асташова, А. В. Боровских, И. Н. Сергеев (Москва) “О научном вкладе Николая Христовича Розова” (19 февраля 2021 г.).

2 ноября 2020 г. скоропостижно скончался доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАО, декан факультета педагогического образования МГУ, профессор механико-математического факультета МГУ, руководивший с 1977 г. нашим семинаром по качественной теории дифференциальных уравнений, Николай Христович Розов.

Н.Х. Розов окончил в 1958 г. механико-математический факультет МГУ, на котором прошёл путь от студента до профессора. Он работал секретарём комсомольской организации и заместителем декана, участвовал в организации Колмогоровского интерната (ныне СУНЦ МГУ) и Всесоюзной заочной математической школы, входил в редколлегию журнала “Квант” и вёл раздел обыкновенных дифференциальных уравнений в Реферативном журнале “Математика”, руководил секцией преподавания математики Московского математического общества и состоял членом редколлегий целого ряда научных журналов. В 1997 г. возглавил только что созданный в МГУ факультет педагогического образования, которым руководил до конца своей жизни.

Область деятельности Николая Христовича была практически необъятна. Перечислим прежде всего некоторые его научные достижения в математике, относящиеся к дифференциальным уравнениям (см., например, [1–5]).

1. *Релаксационные колебания.* Посвящённая им монография (написанная Н.Х. Розовым совместно с Е.Ф. Мищенко) стала одной из пионерских в этом направлении. В ней изучено понятие градиентной катастрофы, описывающее особенности поведения решений телеграфных уравнений и пролившее свет на природу релаксационных колебаний в системах с распределёнными параметрами: оказалось, что причиной возникновения релаксационных колебаний в данном случае являются не сингулярные возмущения, а резонансные свойства задачи.

2. *Буферность.* Это явление (открытое совместно с А.Ю. Колесовым) состоит в одновременном наличии у системы при подходящем выборе её параметров сколь угодно большого числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов и т.д.). Если их немного, то буферность свидетельствует об упорядоченности системы, а если их число велико, то поведение системы при малых возмущениях может стать хаотичным и непредсказуемым. Так, был установлен феномен параметрической буферности, состоящий в том, что при надлежащем уменьшении коэффициентов диффузии и при подходящем выборе параметров внешнего воздействия можно гарантировать существование любого заданного числа устойчивых циклов.

3. *Сложные системы и среды.* Усилиями Н.Х. Розова выявлена роль буферности в динамике сложных систем и в процессах самоорганизации. Если в потенциально автоколебательных

[*)] Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара – И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

[**)] Составитель хроники И.Н. Сергеев.

средах, описываемых гиперболическими уравнениями, она вполне естественна и даже ожидаема, то её реализация в нелинейных диссипативных средах – факт весьма нетривиальный. Результаты о высокомодовых (т.е. быстро осциллирующих по пространственным переменным) аттракторах в системах гиперболических уравнений с малыми коэффициентами диффузии позволили обосновать и дополнить известную гипотезу Ландау о природе турбулентности.

4. *Хаос.* Предпринята попытка систематизации всех имеющихся к настоящему времени результатов о феномене буферности, высокомодовых аттракторах и диффузионном хаосе в краевых задачах для параболических и гиперболических уравнений, следствием чего явилось создание единой концепции нелинейной среды с диффузией: даны новые определения хаотического множества и хаотического аттрактора, обнаружен и описан новый феномен нелинейной динамики – хаотическая буферность, предложен новый подход к учёту редких катастрофических событий в системах со сложным поведением, пролит дополнительный свет на природу аттракторов краевых задач для гиперболических уравнений, исследованы дискретные автоволны, реализующиеся при определённых условиях в дискретных цепочках диффузионно связанных уравнений с запаздыванием.

Ещё одно важное направление деятельности Николая Христовича – преподавание математики: студентам и школьникам, математикам и гуманитариям, в России и за рубежом. Он читал лекции в МГУ на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета и на кафедре оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики, работал в Алжире и на Мадагаскаре, выступал перед учёными и педагогами. Пособие для поступающих в вузы, вышедшее в 1964 г. и широко известное под названием "Дорофеев–Потапов–Розов", было настольной книгой многих абитуриентов за последние 50 лет. Существенный вклад внесён Николаем Христовичем и в дело становления педагогической подготовки в Московском университете и во всей стране: программы профессиональной переподготовки "Преподаватель" и "Преподаватель высшей школы" (разработанные совместно с Л.В. Поповым) задали направление всей педагогике в дополнительном образовании, сотни статей были посвящены проблемам организации школьного образования – его содержанию и целям, подготовке учителей, включению в него новых идей, технологий и методов, а также восстановлению утраченных достижений.

До самого последнего дня Н.Х. Розов активно работал – вёл исследования, писал научные и методические работы, руководил факультетом, выступал экспертом высшего уровня в вопросах образования и образовательной политики, читал лекции, работал со студентами и аспирантами. Более 300 работ в ведущих отечественных и зарубежных журналах, почти 30 монографий и учебников, десятки учеников и последователей, сотни выпускников – вот итог всегда умной, плодотворной и благотворной деятельности Николая Христовича Розова, светлая память о котором навсегда сохранится в наших сердцах.

Литература. 1. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., 1975. 2. Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М., 1995. 3. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М., 2004. 4. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М., 2005. 5. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Многоликий хаос. М., 2012.

А. И. Назаров, $\boxed{\textbf{Я. Ю. Никитин}}$ (Санкт-Петербург) "О некоторых преобразованиях гауссовских случайных процессов и связанных с ними обыкновенных дифференциальных уравнениях" (4 декабря 2020 г.).

Гауссовский процесс $X(t)$ (для определённости, заданный при $t \in [0,1]$) с нулевым средним $\mathbb{E}X \equiv 0$ называется *гриновским*, если его ковариационная функция $G_X(t,s) = \mathbb{E}X(t)X(s)$ является функцией Грина для обыкновенного дифференциального оператора на $[0,1]$ с подходящими граничными условиями. Этот класс гауссовских процессов, впервые выделенный в работе [1], играет важную роль в спектральном анализе гауссовских процессов и связанных с ним задачах.

В частности [1], если X – гриновский гауссовский процесс, то проинтегрированные (слева или справа) процессы – соответственно

$$X^{[0]}(t)=\int\limits_0^t X(s)\,ds,\quad X^{[1]}(t)=\int\limits_t^1 X(s)\,ds,$$

также являются гриновскими. Если же обыкновенный дифференциальный оператор, соответствующий процессу X, не содержит члена нулевого порядка, то центрированный процесс

$$\overline{X}(t)=X(t)-X^{[0]}(1)$$

является *обобщённым* гриновским [2] (соответствующий дифференциальный оператор имеет нулевое собственное число с собственной функцией $\varphi_0\equiv\mathrm{const}$).

Рассмотрим теперь операцию *онлайн-центрирования*

$$\widehat{X}(t)=X(t)-t^{-1}X^{[0]}(t),$$

введённую в [3] для винеровского процесса. Для гриновского гауссовского процесса X процесс $\widehat{X}$ не обязательно является гриновским: например, для винеровского процесса он – гриновский [4, предложение 6.3]), а для броуновского моста – нет. Однако справедливы [5] следующие

Теорема 1. *Для любого гауссовского процесса* X *на* $[0,1]$ *с нулевым средним спектры центрированного* $\overline{X}$ *и онлайн-центрированного* $\widehat{X}$ *процессов совпадают.*

Теорема 2. *Если* X *– гриновский гауссовский процесс на* $[0,1]$, *то онлайн-центрированный проинтегрированный слева процесс* $\widehat{X^{[0]}}$ *– также гриновский.*

Если исходному процессу X соответствует обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то дифференциальное уравнение, соответствующее процессу $\widehat{X^{[0]}}$, интегрируется в элементарных функциях (см. [6]). Это уравнение (за исключением простейшего случая) отсутствует в справочниках Э. Камке и В. Зайцева–А. Полянина.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект DFG 20-51-12004).

Литература. 1. Nazarov A.I., Nikitin Ya.Yu. Exact small ball behavior of integrated Gaussian processes under L_2-norm and spectral asymptotics of boundary value problems // Prob. Theory and Rel. Fields. 2004. V. 129. № 4. P. 469–494. 2. Nazarov A.I. Exact L_2-small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary-value problems // J. of Theor. Prob. 2009. V. 22. № 3. P. 640–665. 3. Kleptsyna M.L., Le Breton A. A Cameron–Martin type formula for general Gaussian processes – a filtering approach // Stochastics. 2002. V. 72. № 3. P. 229–250. 4. Karol' A.I., Nazarov A.I., Nikitin Ya.Yu. Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators // Trans. of the Amer. Math. Soc. 2008. V. 360. № 3. P. 1443–1474. 5. Nazarov A.I., Nikitin Ya.Yu. Gaussian processes centered at their online average, and applications // Stat. and Prob. Letters. 2021. V. 170. P. 1–5. 6. Nazarov A.I. On a family of ordinary differential equations integrable in elementary functions // Math. Notes. 2020. V. 108. № 4. P. 623–625.

Е. А. Барабанов (Минск), **В. В. Быков** (Москва) “Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности” (26 февраля 2021 г.).

Для заданного $n\in\mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}_n$ класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\tag{1}$$

с непрерывными и ограниченными коэффициентами. Пусть $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$ – показатели Ляпунова системы (1), $\Lambda(A)=(\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A))$ – их спектр, а $\mathrm{es}\,(A)$ – *индекс экспоненциальной устойчивости* системы (1), т.е. размерность линейного подпространства её решений с отрицательными характеристическими показателями.

Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ и метрического пространства M рассмотрим класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ непрерывных матриц-функций $Q\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих оценке

$$\|Q(t,\mu)\| \leqslant C_Q \exp(-\sigma_Q t), \quad (t,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times M, \quad C_Q, \sigma_Q > 0,$$

и таких, что показатели Ляпунова $\lambda_1(A+Q,\mu) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+Q,\mu)$ системы $A+Q$, зависящие от параметра $\mu \in M$, не меньше соответствующих показателей Ляпунова системы A, т.е.

$$\lambda_k(A+Q,\mu) \geqslant \lambda_k(A), \quad k = \overline{1,n}, \quad \mu \in M.$$

Отметим, что для любой системы $A \in \mathcal{M}_n$ класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ не пуст, поскольку ему заведомо принадлежит матрица $Q = 0$.

Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M ставится задача о полном дескриптивно-множественном описании класса пар $(\Lambda(A), \Lambda(\,\cdot\,, A+Q))$, составленных из спектров систем A и $A+Q$, когда A пробегает множество $\mathcal{M}_n$, а матрица-функция Q (при каждом фиксированном A) – класс $\mathcal{E}_n[A](M)$, т.е. об описании класса

$$\Pi\mathcal{E}_n(M) = \{(\Lambda(A), \Lambda(\,\cdot\,, A+Q)) : A \in \mathcal{M}_n, \ \ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\}.$$

Решение поставленной задачи содержит, как частный случай, пример Перрона [1, § 1.4].

Напомним, что функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется [2, с. 224] *функцией класса* $(^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([r,+\infty))$ луча $[r,+\infty)$ является G_δ-множеством метрического пространства M. В частности, класс $(^*, G_\delta)$ – подкласс второго класса Бэра [2, с. 248].

В работе [3] установлена

Теорема. *Для каждых метрического пространства M и натурального числа $n \geqslant 2$ пара $(l, F(\cdot))$, где $l = (l_1,\ldots,l_n) \in \mathbb{R}^n$ и $F = (f_1,\ldots,f_n) : M \to \mathbb{R}^n$, принадлежит классу $\Pi\mathcal{E}_n(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$;

2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ для любого $\mu \in M$;

3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ для всех $\mu \in M$ и $i = \overline{1,n}$;

4) для любого $i = \overline{1,n}$ функция $f_i : M \to \mathbb{R}$ ограничена и принадлежит классу $(^*, G_\delta)$.

Заметим, что полное описание класса

$$\Lambda\mathcal{E}_n(M) = \{\Lambda(\,\cdot\,, A+Q) : A \in \mathcal{M}_n, \ \ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\},$$

составленного из вторых элементов пар класса $\Pi\mathcal{E}_n(M)$, фактически получено в работе [4].

Следствие 1. *Существует система $A \in \mathcal{M}_2$ с показателем Ляпунова $\lambda_2(A) = -1$ и её возмущение $Q \in \mathcal{E}_2[A]([0,1])$, аналитическое по $\mu \in [0,1]$ и такое, что показатель Ляпунова $\lambda_2(A+Q)$ возмущённой системы равен -1 при рациональных μ и 1 при иррациональных.*

Поставим каждому $\mu \in M$ в соответствие индекс экспоненциальной устойчивости системы

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t,\mu))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

получив функцию $\operatorname{es}(\,\cdot\,, A+Q) : M \to \mathcal{Z}_n$, где $\mathcal{Z}_n \equiv \{0,\ldots,n\}$. Возникает естественная задача об описании класса пар, составленных из индексов экспоненциальной устойчивости исходной и возмущённой систем, т.е. класса

$$\mathcal{IE}_n(M) = \{(\operatorname{es}(A), \operatorname{es}(\,\cdot\,, A+Q)) : A \in \mathcal{M}_n, \ \ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\}.$$

Его описание даёт

Следствие 2 [3]. *Для каждых метрического пространства M и натурального числа $n \geqslant 2$ пара (d, f), где $d \in \mathcal{Z}_n$ и $f : M \to \mathcal{Z}_n$, принадлежит классу $\mathcal{IE}_n(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

а) $f(\mu) \leqslant d$ для любого $\mu \in M$;

б) функция $-f$ принадлежит классу $(^*, G_\delta)$.

Литература. 1. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. 2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937. 3. Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 31–43. 4. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1579–1588.

А. Н. Ветохин (Москва) "Бэровская классификация топологической энтропии динамических систем в случае неинвариантного компакта" (12 марта 2021 г.).

Пусть (X,d) – метрическое пространство, $\mathcal{M}^c(X)$ – пространство непрерывных отображений из X в X, наделённое компактно-открытой топологией, K – компакт в X. Наряду с исходной метрикой d, определим на X дополнительную систему метрик [1]

$$d_n^f(x,y)=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d(f^{\circ i}(x),f^{\circ i}(y)),\quad x,y\in X,\quad n\in\mathbb{N},$$

где $f^{\circ i}$, $i\in\mathbb{N}$, – i-я итерация отображения $f\in\mathcal{M}^c(X)$, $f^{\circ 0}\equiv \mathrm{id}_X$. Для всяких $n\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon>0$ обозначим через $N_d(K,f,\varepsilon,n)$ максимальное число точек в компакте $K\subset X$, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше ε. *Верхней* или *нижней топологическими энтропиями* отображения f на компакте K называют соответственно величины (не меняющиеся при замене метрики d эквивалентной ей метрикой d')

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(K,f,\varepsilon,n),\quad \underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(K,f,\varepsilon,n). \qquad (1)$$

Для заданного компакта $K\subset X$ рассмотрим функции

$$f\mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f), \qquad (2)$$

$$f\mapsto \underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f). \qquad (3)$$

Если компакт K является для отображения f *инвариантным* множеством, т.е. выполнено включение $f(K)\subset K$, то значения обеих величин (1) совпадают, а обе функции (2) и (3) принадлежат второму бэровскому классу [2]. В общем случае, как показывает следующий пример, величины (1) могут не совпадать. Рассмотрим множество Ω_2 последовательностей $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, где $x_i\in\{0,1\}$, с метрикой

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y;\\ (\min\{i: x_i\neq y_i\})^{-1}, & x\neq y,\end{cases}$$

компакт $K_0\subset\Omega_2$, определяемый условием:

$$(x_1,x_2,x_3,\ldots)\in K_0,\quad \text{если и только если}\quad x_i=0,\quad i=2k!,\ldots,(2k+1)!,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

и отображение $f((x_1,x_2,x_3,\ldots))=(x_2,x_3,x_4,\ldots)$ – сдвиг влево на один элемент. Для этого отображения имеем $\overline{h}_{\mathrm{top}}(K_0,f)=\ln 2$, $\underline{h}_{\mathrm{top}}(K_0,f)=0$. Оказывается, функции (2) и (3) различны и с точки зрения бэровской классификации.

Теорема 1. *Для любого компакта $K\subset X$ функция (2) принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$.*

Теорема 2. *Для любого компакта $K\subset X$ функция (3) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$, а точки её полунепрерывности снизу образуют всюду плотное множество типа G_δ.*

Если $X=\Omega_2$, то из работы [3] следует, что функции (2) и (3) не принадлежат первому бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$, а в силу компактности пространства Ω_2 топология на $\mathcal{M}^c(X)$ совпадает с равномерной. Возникает вопрос: можно ли уменьшить номер бэровского класса в теореме 1? Ответ на него, вообще говоря, отрицателен.

Рассмотрим метрическое пространство X_0, точками которого являются всевозможные пары (x,i), где $x\in[0,1]$, $i\in\mathbb{N}$, а расстояние задаётся формулой

$$d((x,i),(y,j))=\begin{cases}|x-y|, & i=j;\\ 1, & i\neq j,\end{cases}\quad (x,i),(y,j)\in X_0.$$

Каждому $r\in\mathbb{N}$ поставим в соответствие компакт $K_r=[0,1]\times\{1,\ldots,r\}\subset X_0$.

Теорема 3. *Для любого $r\in\mathbb{N}$ и компакта $K=K_r$ функция (2) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X_0)$.*

В связи с теоремой 3 возникает естественная

Задача. Принадлежит ли функция (3) второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^u(X)$ непрерывных отображений из X в X с равномерной топологией?

Литература. 1. Bowen R. Entropy for group endomorphism and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 153. P. 401–414. 2. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453. 3. Ветохин А.Н. О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем // Мат. заметки. 2013. Т. 93. № 3. С. 347–356.

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) “О задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения с весовым квадратичным функционалом” (19 марта 2021 г.).

Для параболического уравнения

$$u_t=(a(x,t)u_x)_x,\quad (x,t)\in Q_T\equiv(0,1)\times(0,T), \tag{1}$$

где число T задано, а функция a определена на замыкании $\overline{Q}_T$, достаточно гладкая и удовлетворяет неравенствам $0<a_0\leqslant a(\,\cdot\,,\cdot\,)\leqslant a_1<\infty$, $a_0,a_1=\mathrm{const}$, рассматриваем задачу

$$u(0,t)=\varphi(t),\quad u_x(1,t)=\psi(t),\quad 0<t<T,\quad u(x,0)=\xi(x),\quad 0<x<1, \tag{2}$$

в которой $\varphi,\psi\in W_2^1(0,T)$ и $\xi\in L_2(0,1)$.

В докладе изучается следующая экстремальная задача с точечным наблюдением: управляя функцией φ (функции ξ и ψ фиксированы), сделать функцию $u(c,t)$ в заданной точке $c\in\in(0,1)$ близкой (в указанном ниже смысле) к заданной функции $z(t)$ на всём интервале $(0,T)$. Задачи управления с финальным или распределённым наблюдением для параболических уравнений рассматривались в работах [1, 2]. Ниже приводятся результаты, представляющие собой развитие и обобщение результатов [3–10] на уравнение (1) с переменным по t коэффициентом диффузии $a(x,t)$, и устанавливаются качественные свойства минимизирующей функции.

Через $V_2^{1,0}(Q_T)$ обозначаем [11, с. 15] банахово пространство таких функций $u\in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)}=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)}+\|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых $t\mapsto u(\,\cdot\,,t)$ – непрерывное отображение из $[0,T]$ в $L_2(0,1)$, а через $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – множество функций $\eta\in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x,T)=\eta(0,t)=0$.

Определение 1. *Слабым решением* задачи (1), (2) называем функцию $u\in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u|_{x=0}=\varphi$ (в смысле следа) и при каждом $\eta\in\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T}(a(x,t)u_x\eta_x-u\eta_t)\,dx\,dt=\int\limits_0^1\xi(x)\eta(x,0)\,dx+\int\limits_0^T a(1,t)\psi(t)\,\eta(1,t)\,dt.$$

Теорема 1 [9, 10]. *Задача (1), (2) имеет единственное слабое решение* $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, *причём для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C(\|\xi\|_{L_2(0,1)} + \|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)})$$

с некоторой константой $C > 0$, *не зависящей от функций* φ, ψ, ξ.

Для непустого, замкнутого, выпуклого и ограниченного множества $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ управляющих функций φ и множества $Z \subset L_2(0,T)$ целевых функций z рассматриваем весовой квадратичный функционал

$$J[z,\rho,\varphi] = \int\limits_0^T (u_\varphi(c,t) - z(t))^2 \rho(t)dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

$u_\varphi \in V_2^{1,0}(Q_T)$ – решение задачи (1), (2) с управляющей функцией φ, а $\rho \in L_\infty(0,T)$ – весовая функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{ess\,inf}\{\rho(t) : t \in (0,T)\} > 0$. Считая функции z и ρ фиксированными, рассмотрим задачу минимизации функционала J:

$$m[z,\rho,\Phi] = \inf_{\varphi\in\Phi} J[z,\rho,\varphi]. \tag{3}$$

Теорема 2. *Для любой функции* $z \in L_2(0,T)$ *существует единственная функция* $\varphi_0 \in \Phi$, *для которой справедливо равенство*

$$m[z,\rho,\Phi] = J[z,\rho,\varphi_0].$$

Ниже некоторые результаты работ [6–10] распространяем на случай, когда коэффициент a в уравнении (1) зависит только от времени.

Теорема 3. *Если функция* a *не зависит от* x *и* $m[z,\rho,\Phi] > 0$, *то* $\varphi_0 \in \partial\Phi$.

Теорема 4. *Если функция* a *не зависит от* x, *а множества* $\Phi_1, \Phi_2 \subset W_2^1(0,T)$ *ограничены, выпуклы и замкнуты, что* $\Phi_2 \subset \operatorname{Int}\Phi_1$ *и* $m[z,\rho,\Phi_1] > 0$, *то* $m[z,\rho,\Phi_1] < m[z,\rho,\Phi_2]$.

Определение 2. Задачу (1)–(3) с фиксированной функцией ρ называем *плотно управляемой из множества* Φ *во множество* Z, если для всех $z \in Z$ верно равенство $m[z,\rho,\Phi] = 0$.

Следующая теорема устанавливает плотную управляемость задачи (1)–(3) из множества $Z = L_2(0,T)$ во множество $\Phi = W_2^1(0,T)$.

Теорема 5. *Если функция* a *не зависит от* x, *то для любой функции* $z \in L_2(0,T)$ *верно равенство*

$$m[z,\rho,W_2^1(0,T)] = 0.$$

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Troltzsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications, Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, 2010. 2. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Berlin, 2013. 3. Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Lashin D.A. On maintaining optimal temperatures in greenhouses // WSEAS Trans. on Circuits and Systems. 2016. V. 15. № 23. P. 198–204. 4. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On optimal temperature control in hothouses // Proc. Int. Conf. on Numer. Anal. and Appl. Math. 2016. AIP Conf. Proc. 2017. P. 4–8. 5. Асташова И.В., Филиновский А.В. Об управляемости в параболической задаче с распределённым по времени функционалом // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 53. № 6. С. 851–853. 6. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 7. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 8. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274. 9. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. Controllability and exact controllability in a problem of heat transfer with convection and time distributed functional // J. Math. Sci. 2020. V. 244. № 2. P. 148–157. 10. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. О задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения при наличии конвекции и обедняющего потенциала // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 828–829. 11. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

В. В. Амелькин (Минск), **В. Ю. Тыщенко** (Гродно) "О продолжимости решений автономных дифференциальных систем" (26 марта 2021 г.).

Рассмотрим вполне разрешимую [1, с. 21] автономную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = F(x)\,dt, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{т}}$, $t = (t_1, \ldots, t_m)^{\mathrm{т}}$, $1 \leqslant m < n$, а ранг матрицы $F = (F_{ij}) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times m})$ равен $r \in \{1, \ldots, m\}$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$.

Для односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ назовём *локальным решением* $(\Omega, x; t_0, x_0)$ системы (1) функцию $x \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую условиям $x(t_0) = x_0$ и $dx(t) \equiv F(x(t))\,dt$, $t \in \Omega$. График такого решения в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ назовём *локальной интегральной поверхностью*, а его проекцию на пространство $\mathbb{R}^n$ – *локальной орбитой* $\mathrm{orb}\,(\Omega_0, x; t_0, x_0)$. Будем говорить, что решения $(\Omega_1, x^1; t_0^1, x_0^1)$ и $(\Omega_2, x^2; t_0^2, x_0^2)$, а также их орбиты $\mathrm{orb}\,(\Omega_1, x^1; t_0^1, x_0^1)$ и $\mathrm{orb}\,(\Omega_2, x^2; t_0^2, x_0^2)$ являются *продолжениями друг друга через область* $\Omega_0 \subset \Omega_1 \bigcap \Omega_2 (\neq \varnothing)$, если $x^1(t) = x^2(t)$, $t \in \Omega_0$. При продолжении решений через некоторую область могут появляться многозначные функции, что однако невозможно в случае $m = 1$.

Назовём решения системы (1) *эквивалентными в точке* t_0, если они продолжают друг друга через некоторую окрестность этой точки. *Ростком* $\mathfrak{g}(t_0, x_0)$ системы (1) в точке $t_0 \in \Omega$ назовём класс эквивалентности решений этой системы по отношению к введённому понятию эквивалентности, а *непродолжаемым* решением $(\Theta, x; t_0, x_0)$, порождённым ростком $\mathfrak{g}(t_0, x_0)$, – множество всех ростков, которые можно получить в результате продолжений ростка $\mathfrak{g}(t_0, x_0)$ через всевозможные области. График в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, соответствующий непродолжаемому решению, – это *непродолжаемая интегральная поверхность*, а её проекция на пространство $\mathbb{R}^n$ – *орбита* $\mathrm{orb}\,(x_0)$. Понятие непродолжаемого решения можно вводить [1, с. 27; 2; 3] путём поглощения областей определения решений. В силу теоремы 2.1 [4, с. 61] размерность любой орбиты системы (1) не превосходит r и существуют орбиты размерности r.

Теорема 1 [5]. *У нелинейной полиномиальной системы (1) общего положения существуют решения, не определённые на всём пространстве* $\mathbb{R}^m$.

Имеет место представление $F(x) \equiv f(x)\nu(x)$, где ранг матрицы $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times r})$ не превосходит r, а ранг матрицы $\nu \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{r\times m})$ равен r на $\mathbb{R}^n$. Выберем невырожденную на $\mathbb{R}^n$ матрицу $\mu \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{r\times r})$ и поставим в соответствие системе (1) систему

$$dx = f(x)\mu(x)\,d\tau, \tag{2}$$

где $d\tau = (d\tau_1, \ldots, d\tau_r)^{\mathrm{т}}$. Матрицу μ назовём *допустимой*, если система (2) вполне разрешима. Орбиты систем (1) и (2) совпадают. Будем говорить, что система уравнений (1) *приводима к динамической системе*, если существует допустимая матрица μ, приводящая систему (1) к системе (2), все решения которой определены на $\mathbb{R}^r$.

Теорема 2. *Система (1) при* $r = 1$ *приводима к динамической системе.*

Систему (1) назовём *выпрямляемой*, если существует диффеоморфизм $\xi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, переводящий каждую её орбиту в одну из r-мерных плоскостей семейств $x_k = C_k$, $k = \overline{1, n-r}$. В отличие от [1, с. 139] мы не предполагаем продолжимости всех решений системы (1) на $\mathbb{R}^m$.

Теорема 3. *Система (1) приводима к динамической системе тогда и только тогда, когда система* $dx = f(x)\,dt$, $d\tau = dt$ *выпрямляема.*

В комплексном случае аналоги теорем 1–3 получены в [5; 6].

Литература. 1. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М., 2004. 2. Мышкис А.Д. О продолжении решений уравнений Пфаффа // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 8. С. 1331–1337. 3. Сергеев И.Н. Продолжаемость решений дифференциальных уравнений до непродолжаемого // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 6. С. 847–848. 4. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения с "многомерным временем". Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. Saarbrücken, 2012. 5. Амелькин В.В., Тыщенко В.Ю. О продолжимости решений автономных полиномиальных дифференциальных систем // Изв. вузов. Математика. 2020. № 2. С. 10–21. 6. Амелькин В.В., Тыщенко В.Ю. О продолжимости решений автономных дифференциальных систем // Изв. вузов. Математика. 2020. № 11. С. 15–28.

И. Н. Сергеев (Москва) “Об исследовании ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств устойчивости по первому приближению” (2 апреля 2021 г.)

Для заданной окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(\,\cdot\,,0) \equiv 0, \quad x \in G, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \tag{1}$$

допускающую нулевое решение и удовлетворяющую условию $f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G)$. Через $S_{\delta *}$ будем обозначать множество (непродолжаемых и ненулевых) решений x системы (1), удовлетворяющих начальному условию $|x(0)| < \delta$.

Определение 1 [1, 2]. Скажем, что система (1) обладает *перроновской* (*верхнепредельной*):

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_{\delta *}$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon \quad \big(\varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon\big), \tag{2}$$

молчаливо предполагающему, что решение x определено на всей полуоси $\mathbb{R}_+$;

2) *частичной устойчивостью*, если для каждых $\varepsilon, \delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in S_{\delta *}$ удовлетворяет требованию (2);

3) *асимптотической устойчивостью*, если для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_{\delta *}$ удовлетворяет требованию (2) при $\varepsilon = 0$;

4) *неустойчивостью*, *полной неустойчивостью* или *асимптотической неустойчивостью*, если оно не обладает устойчивостью, частичной устойчивостью или асимптотической устойчивостью соответственно.

Свойства перроновского и верхнепредельного типов из определения 1 являются аналогами соответствующих *ляпуновских* свойств (часть из них см. в [3, гл. II, § 1]), для описания которых достаточно внести в определение 1 следующие поправки: в пп. 1) и 2) заменить требование (2) требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |x(t)| \leqslant \varepsilon,$$

а в п. 3) дополнительно потребовать наличия у системы (1) ляпуновской устойчивости (определённой в п. 1 в результате указанной замены).

Определение 2. Линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

или только её правую часть $A(t)x$, назовём *первым* (*линейным*) *приближением* для системы (1), если выполнено условие

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f(t,x) - A(t)x| = o(x), \quad G \ni x \to 0$$

(влекущее за собой совпадение $A(\cdot) \equiv f'_x(\,\cdot\,,0) \in C(\mathbb{R}_+)$). Систему (3) назовём *ограниченной*, если функция A ограничена, и *скалярной*, если она имеет вид $A(\cdot) = a(\cdot)I$, где $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Скажем, что линейное приближение (3) *обеспечивает* (*допускает*) заданное свойство, если им обладает всякая (соответственно хотя бы одна) система (1) с этим линейным приближением.

Исследованию ляпуновской асимптотической устойчивости по первому приближению, составляющему суть первого метода Ляпунова, посвящено огромное число работ (см. [4, § 11]).

И устойчивость, и асимптотическая устойчивость, и ляпуновская, и перроновская, и верхнепредельная – все эти свойства сразу, равно как и каждое из них в отдельности, обеспечиваются в точности одними и теми же линейными приближениями, образующими единый *класс устойчивости*, что и подразумевает

Теорема 1. *Если линейное приближение (3) обеспечивает хотя бы одно из следующих шести свойств: устойчивость или асимптотическую устойчивость ляпуновского, перроновского или верхнепредельного типа, то оно обеспечивает и остальные пять из них.*

Похожее совпадение наблюдается и для линейных приближений, обеспечивающих какую-либо частичную устойчивость и образующих *класс частичной устойчивости*, как показывает

Теорема 2. *Если линейное приближение (3) обеспечивает хотя бы одно из следующих трёх свойств: частичную устойчивость ляпуновского, перроновского или верхнепредельного типа, то оно обеспечивает и остальные два из них.*

Класс частичной устойчивости, естественно, включает в себя класс устойчивости. Однако обратное включение уже не верно, что, в частности, и подтверждает

Теорема 3. *При каждом $n > 1$ существует автономная линейная система (3), которая одновременно:*

1) обеспечивает неустойчивость ляпуновского типа;

2) обеспечивает частичную устойчивость ляпуновского, перроновского и верхнепредельного типов;

3) допускает неустойчивость перроновского и верхнепредельного типов;

4) при $n = 2$ допускает асимптотическую устойчивость перроновского типа.

Из теоремы 3 вытекает также *несовпадение* множеств линейных приближений, обеспечивающих ляпуновскую неустойчивость и соответственно ляпуновскую полную неустойчивость. Кстати, аналогичное несовпадение для перроновской неустойчивости (происходящее из ошибочно сформулированного п. 1 теоремы 4 [5]) установить не удаётся.

Ещё один важный вывод из формулировки теоремы 3 состоит в том, что множество линейных приближений, обеспечивающих ляпуновскую неустойчивость, содержит в себе не только все линейные приближения, обеспечивающие одноимённое перроновское свойство, но также и некоторые линейные приближения, допускающие перроновскую устойчивость (причём даже асимптотическую). Более того, в точности те же слова можно отнести и к множеству линейных приближений, обеспечивающих ляпуновскую (и даже верхнепредельную) полную неустойчивость, о чём и говорит

Теорема 4. *При каждом $n \in \mathbb{N}$ существует ограниченная скалярная линейная система (3), которая одновременно:*

1) обеспечивает полную неустойчивость ляпуновского и верхнепредельного типов;

2) допускает полную неустойчивость перроновского типа;

3) допускает асимптотическую устойчивость перроновского типа.

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 4. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. 5. Сергеев И.Н. Об исследовании перроновских и ляпуновских свойств устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 897–899.

А. А. Бондарев (Москва) “Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью” (2 апреля 2021 г.).

Доклад посвящён недавно введённому [1, 2] понятию устойчивости по Перрону (см. также аннотацию предыдущего доклада И.Н. Сергеева) и усиливает результаты [3, 4], первый из которых исправлял недостаток, указанный в замечании 4 к теореме 1 [2], но сопровождался ненулевым (хотя и ограниченным на всей временно́й полуоси) линейным приближением системы в нуле, а второй предъявлял систему с теми же свойствами, но уже с нулевым линейным приближением в нуле.

Приводимое ниже усиление этих результатов состоит в утверждении о существовании системы, обладающей перроновской (а значит, также ляпуновской и верхнепредельной) полной неустойчивостью и одновременно с этим не просто частной (как это было во всех примерах выше), а даже *массивной* частной устойчивостью – теперь начальные значения решений, сходящихся к нулю на бесконечности, заполняют в фазовом пространстве целую область.

Для в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, с евклидовой нормой $|\cdot|$ рассматривается система вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty), \quad x \equiv (x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с правой частью, удовлетворяющей условиям (а значит, допускающей *нулевое* решение)

$$f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\quad f,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n),\quad f(t,0)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Теорема. *При $n=2$ существует система (1) с условиями (2), обладающая следующими тремя свойствами:*

1) правая часть системы (1) бесконечно дифференцируема, и $f'_x(t,0)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+$;

2) для всех решений x системы (1) с начальными условиями $|x(0)|<1$ или $x(0)=(1,0)^{\text{т}}$, а также $|x(0)|=1$ и $x_2(0)>0$ имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)|=+\infty;$$

3) для всех остальных решений x системы (1) с начальными условиями $|x(0)|>1$ или $x(0)=(-1,0)^{\text{т}}$, а также $|x(0)|=1$ и $x_2(0)<0$ имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)|=0.$$

Таким образом, при $t\to+\infty$ все близкие к нулю ненулевые решения описанной системы стремятся по норме к бесконечности, а все остальные – к нулю. Заметим, что полученный результат не распространяется на автономные системы, для которых полная и глобальная неустойчивости сразу всех перечисленных типов (и перроновского, и верхнепредельного, и ляпуновского), согласно теореме 6 [2], неразличимы.

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и ее связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646. 3. Бондарев А.А. Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899. 4. Бондарев А.А. Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы” (9 апреля 2021 г.).

Для заданной *фазовой* области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n>1,\ 0\in G)$ рассмотрим *нелинейную*, вообще говоря, дифференциальную систему вида

$$\dot x=f(t,x),\quad f(t,0)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\quad x\in G,\quad f,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times G). \tag{1}$$

Через $S_*(f)$ будем обозначать множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1), а через $x_f(\,\cdot\,,x_0)$ – то из них, которое удовлетворяет начальному условию $x_f(0,x_0)=x_0$.

Определение 1. Перечислим три основных [1] *функционала* $\mathrm{K}(u,t)$ (определённых на парах $u:[0,t]\to\mathbb{R}^n$ и $t\in\mathbb{R}_+$), соответствующих показателям

$$\varkappa=\nu,\theta,\rho \tag{2}$$

и отвечающих за следующие свойства решений:

1) *колеблемость* $(\varkappa=\nu)$, если $\mathrm{K}(u,t)=\mathrm{N}(u,t)$ – умноженное на π число нулей на промежутке $(0,t]$ функции P_1u, а P_1 – ортогональный проектор на фиксированную прямую, причём если хотя бы один из этих нулей *кратен* (т.е. является нулём ещё и производной $(P_1u)^{\cdot}$), то считаем $\mathrm{N}(u,t)=+\infty$;

2) *вращаемость* (*ориентированная*, $\varkappa=\theta$), если $\mathrm{K}(u,t)=\Theta(u,t)\equiv|\varphi(P_2u,t)|$ – модуль ориентированного угла $\varphi(P_2u,t)$ (непрерывного по t, с начальным условием $\varphi(P_2u,0)=0$) между вектором $P_2u(t)$ и начальным вектором $P_2u(0)$, а P_2 – ортогональный проектор на фиксированную плоскость, причём если $P_2u(\tau)=0$ хотя бы при одном $\tau\in[0,t]$, то считаем $\Theta(u,t)=+\infty$;

3) *блуждаемость* ($\varkappa = \rho$), если

$$\mathrm{K}(u,t) = \mathrm{P}(u,t) \equiv \int\limits_0^t |(u(\tau)/|u(\tau)|)^{\cdot}|\,d\tau, \quad u(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0,t].$$

Известны и другие функционалы, отвечающие за неориентированную или частотную вращаемость [1], поворачиваемость k-го ранга [2], а также плоскую вращаемость [3].

Определение 2. Для каждого из функционалов, описанных в определении 1, определим соответствующие *линейные показатели* (2) решения $x \in S_*(f)$, если оно задано на всей полуоси $\mathbb{R}_+$: *слабый* и *сильный нижние* – по формулам

$$\check{\varkappa}^\circ(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1} \inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \mathrm{K}(Lx,t), \quad \check{\varkappa}^\bullet(x) \equiv \inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1}\mathrm{K}(Lx,t),$$

а также *слабый* $\hat{\varkappa}^\circ(x)$ и *сильный* $\hat{\varkappa}^\bullet(x)$ *верхние* соответственно – по тем же формулам, но с заменой в них нижних пределов при $t \to +\infty$ верхними. Наконец, в случае совпадения значений нижнего и верхнего показателей будем называть их *точными* и опускать в их обозначении любую тильду, а в случае совпадения значений слабого и сильного показателей будем называть их *абсолютными* и опускать в их обозначении любой кружочек.

В случае нелинейной системы (1) некоторые решения (возможно даже, все ненулевые сразу) могут оказаться определёнными не на всей временно́й полуоси из-за выхода их фазовых кривых за конечное время на границу фазовой области. Один из наиболее естественных выходов из этой ситуации (два чуть более тонких подхода порождают сферические $\varkappa_s$ [4] и радиальные $\varkappa_r$ [5] показатели) состоит в том, чтобы на каждом начальном отрезке времени рассматривать не все решения, а только начинающиеся достаточно близко к нулю, – при этом, правда, приходится отказаться от определения показателей для отдельных решений, привязывая получающиеся шаровые показатели к самим системам.

Определение 3. Каждому функционалу K из определения 1, системе (1), моменту $t \in \mathbb{R}_+$ и невырожденному преобразованию $L \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n$ поставим в соответствие значение *нижнего* и *верхнего шаровых* функционалов, определяемых соответственно равенствами

$$\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L) \equiv \varliminf_{x_0\to 0} \mathrm{K}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t), \quad \hat{\mathrm{K}}_b(f,t,L) \equiv \varlimsup_{x_0\to 0} \mathrm{K}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t)$$

(заметим, что выражения, стоящие в этих равенствах под знаками нижнего и верхнего переделов, при достаточно малых значениях $|x_0|$ обязательно определены в силу непрерывной зависимости решений от начальных значений на компакте $[0,t]$). Затем определим соответствующие *шаровые* показатели (2) системы (1): *слабый* и *сильный нижние* – по формулам

$$\check{\varkappa}_b^\circ(f) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} t^{-1}\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L), \quad \check{\varkappa}_b^\bullet(f) \equiv \inf_{L\in\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1}\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L),$$

а также *слабый* $\hat{\varkappa}_b^\circ(f)$ и *сильный* $\hat{\varkappa}_b^\bullet(f)$ *верхние* – аналогичными формулами с заменой в них всех нижних пределов и нижних шаровых функционалов верхними и, наконец, *точные* и *абсолютные* их разновидности – по той же схеме, что и в определении 2.

Между шаровыми и соответствующими радиальными показателями существует естественная связь, которую раскрывает

Теорема 1. *Для любой системы (1) и любого функционала из определения 1 верны неравенства*

$$\check{\varkappa}_b^*(f) \leqslant \inf_{0\neq x_0\in G} \check{\varkappa}_r^*(f,x_0) \leqslant \sup_{0\neq x_0\in G} \hat{\varkappa}_r^*(f,x_0) \leqslant \hat{\varkappa}_b^*(f), \quad * = \circ, \bullet.$$

В линейном случае шаровые показатели оценивают снаружи множество значений соответствующего линейного показателя на всех решениях системы, как показывает

Теорема 2. *Если система (1) – линейная однородная и $G=\mathbb{R}^n$, то для любого функционала из определения 1 и соответствующих ему показателей (2) из определений 2 и 3 справедливы оценки*

$$\check{\varkappa}_b^*(f)\leqslant\inf_{x\in S_*(f)}\check{\varkappa}^*(x)\leqslant\sup_{x\in S_*(f)}\hat{\varkappa}^*(x)\leqslant\hat{\varkappa}_b^*(f),\quad *=\circ,\bullet.$$

Для нелинейных же систем связи между шаровыми и линейными, а также сферическими показателями почти непредсказуемы, причём даже в автономном случае, что и подтверждают

Теорема 3. *При $n=2$ и $G=\mathbb{R}^2$ существует такая автономная система (1), что все решения $x_+\in S_*(f)$ и $x_-\in S_*(-f)$ определены на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, а все показатели (2) точны, абсолютны и при любом $x_0\neq 0$ удовлетворяют соотношениям*

$$+\infty=\varkappa(x_+)>\varkappa_s(f,x_0)=\varkappa_s(-f,x_0)>\varkappa(x_-)=\varkappa_r(\pm f,x_0)=\varkappa_b(\pm f)=0.$$

Теорема 4. *При $n=2$ и $G=\mathbb{R}^2$ существует такая автономная система (1), что все решения $x_+\in S_*(f)$ и $x_-\in S_*(-f)$ определены на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, а все показатели (2) точны, абсолютны и при любом $x_0\neq 0$ удовлетворяют соотношениям*

$$0=\varkappa(x_+)<\varkappa_s(f,x_0)=\varkappa_s(-f,x_0)<\varkappa(x_-)=\varkappa_r(\pm f,x_0)=\varkappa_b(\pm f)=1.$$

Доказательства этих и других теорем о нелинейных показателях см. в работе [6].

Литература. 1. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 2. Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361. 3. Сергеев И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348. 4. Сергеев И.Н. Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 839–840. 5. Сергеев И.Н. Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1560–1562. 6. Сергеев И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46.

Т. А. Корчёмкина (Москва) "Об асимптотическом поведении стремящихся к нулю решений уравнений второго порядка со степенной нелинейностью общего вида" (16 апреля 2021 г.).

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''=p(x,y,y')|y|^{k_0}|y'|^{k_1}\operatorname{sgn}(yy'),\quad k_0,k_1>0, \tag{1}$$

где функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u,v и $0<m\leqslant p(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,)\leqslant M<\infty$.

В случае потенциала $p=p(x)$ в [1] получены необходимые и достаточные условия существования положительных решений с заданным асимптотическим поведением. Для потенциала общего вида $p=p(x,u,v)$ результаты о единственности решений установлены в [2], а качественное поведение решений уравнения (1) исследовано в [3]. Результаты об асимптотическом поведении решений, неограниченных вблизи границы области определения, получены в [4], а о поведении решений, стремящихся к ненулевой константе вблизи границ области определения – в [5]. Оставался открытым вопрос об поведении решений, стремящихся к нулю вблизи границы области определения. В силу сохранения типа уравнения при замене $y(x)\mapsto -y(-x)$ достаточно рассмотреть поведение решений вблизи правой границы области определения.

Поскольку при некоторых значениях показателей k_0 и k_1 решение может быть продолжено неединственным образом, рассматриваются μ-решения уравнения.

Определение 1 [6]. Решение y уравнения (1), определённое на промежутке (a,b), возможно, бесконечном, назовём *μ-решением*, если выполнены условия:

1) уравнение не имеет решений, совпадающих с y на некотором подынтервале промежутка (a,b), но отличных от y в некоторой точке промежутка (a,b);

2) для любой конечной граничной точки решение y либо непродолжаемо за неё, либо имеет по крайней мере два продолжения, различающихся в точках, сколь угодно близких к ней.

Определение 2 [7]. Назовём μ-решение y уравнения (1) *сингулярным первого рода* в точке $a \in \mathbb{R}$, если

$$\lim_{x\to a} y(x) = \lim_{x\to a} y'(x) = 0.$$

Определение 3 [7]. Решение y уравнения (1) назовём *отрицательным кнезеровским на промежутке* $(x_0, +\infty)$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) < 0$ и $y'(x) > 0$ при $x > x_0$.

Из [3] следует, что μ-решения уравнения (1) могут стремиться к нулю вблизи правой границы области определения только в двух случаях: это либо отрицательные сингулярные решения первого рода, либо отрицательные кнезеровские решения. Для изучения существования решений использованы результаты, доказанные в работе [2].

Теорема 1. *Существование у уравнения (1) сингулярных μ-решений первого рода равносильно условию $k_0 + k_1 < 1$.*

Теорема 2. *При $k_0 + k_1 < 1$ или $k_1 > 2$ уравнение (1) не имеет кнезеровских решений.*

Теорема 3. *Если $k_1 \leqslant 2$ и $p(x,u,v) \equiv p_0 > 0$, а $y(\cdot)$ – μ-решение уравнения (1), удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) = y_0 < 0$, $y'(x_0) = y_1 > 0$ и*

$$\frac{y_1^{2-k_1}}{2-k_1} = \frac{p_0|y_0|^{k_0+1}}{k_0+1}, \quad k_1 \neq 2, \quad \text{или} \quad \ln y_1 = \frac{p_0|y_0|^{k_0+1}}{k_0+1}, \quad k_1 = 2,$$

то $y(\cdot)$ – сингулярное решение первого рода, если $k_0 + k_1 < 1$, и отрицательное кнезеровское решение на $(x_0, +\infty)$, если $k_0 + k_1 \geqslant 1$.

Введём обозначения

$$\alpha = \frac{2-k_1}{k_0+k_1-1}, \quad C(P) = \left(\frac{|\alpha|^{1-k_1}|\alpha+1|}{P}\right)^{1/(k_0+k_1-1)}, \quad P \in \mathbb{R}.$$

Теорема 4. *Если $y(\cdot)$ – отрицательное сингулярное первого рода в точке x_0 μ-решение уравнения (1), то*

$$y(x) = -C(p(x_0,0,0))(x_0-x)^{-\alpha}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad x \to x_0 - 0.$$

Теорема 5. *Если функция $p(x,u,v)$ имеет предел p_+ при $x \to +\infty$, $u, v \to 0$, а $y(\cdot)$ – отрицательное кнезеровское решение уравнения (1), то*

$$y(x) = \begin{cases} -C(p_+)x^{-\alpha}(1+o(1)), & k_0+k_1 > 1, \\ -e^{-p_-^{1/(k_0+1)}x}(1+o(1)), & k_0+k_1 = 1, \end{cases} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-31-90168.

Литература. 1. Евтухов В.М. Об асимптотике монотонных решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 1076–1078. 2. Astashova I. Existence and uniqueness theorems to generalized Emden–Fowler type equations // Intern. workshop on the qualitative theory of differential equations “QUALITDE–2020”. 2020. P. 17–21. 3. Korchemkina T. On the behavior of solutions to second-order differential equation with general power-law nonlinearity // Memoirs on Differ. Equat. and Math. Phys. 2018. V. 73. P. 101–111. 4. Корчемкина Т.А. Об асимптотическом поведении неограниченных решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями общего вида // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Т. 32. С. 239–256. 5. Корчёмкина Т.А. Об асимптотическом поведении ограниченных решений уравнения второго порядка со степенной нелинейностью общего вида // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1583–1584. 6. Astashova I. On qualitative properties and asymptotic behavior of solutions to higher-order nonlinear differential equations // WSEAS Trans. on Math. 2017. V. 16. № 5. P. 39–47. 7. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1990.

А. Н. Ветохин (Москва) "Бэровская классификация топологической энтропии динамических систем на метрических пространствах" (23 апреля 2021 г.).

Пусть (X,d) – метрическое пространство, $\mathcal{K}(X)$ – множество компактов в X, а $\mathcal{M}^c(X)$ – пространство непрерывных отображений из X в X, наделённое компактно-открытой топологией. *Верхней* и *нижней топологическими энтропиями* отображения f называют соответственно величины [1] (не меняющиеся при замене метрики d эквивалентной ей метрикой d')

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(f)=\sup_{K\in\mathcal{K}(X)}\overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f),\quad \underline{h}_{\mathrm{top}}(f)=\sup_{K\in\mathcal{K}(X)}\underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f),$$

где $\overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)$ и $\underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)$ – верхняя и нижняя топологические энтропии отображения на компакте K, определённые в докладе того же автора от 12 марта 2021 г. В случае компактности пространства (X,d) верхняя топологическая энтропия совпадает с нижней и принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$ [2].

Изучим с точки зрения бэровской классификации следующие функции:

$$f\mapsto\overline{h}_{\mathrm{top}}(f),\tag{1}$$

$$f\mapsto\underline{h}_{\mathrm{top}}(f).\tag{2}$$

Теорема 1. *Если (X,d) – локально-компактное метрическое пространство со счётной базой, то функция (1) принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$.*

Теорема 2. *Если (X,d) – локально-компактное метрическое пространство со счётной базой, то функция (2) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$, а точки её полунепрерывности снизу образуют всюду плотное множество типа G_δ.*

Метрическое пространство $X_0=[0,1]\times\mathbb{N}$ с расстоянием

$$d((x,i),(y,j))=\begin{cases}|x-y|, & \text{если } i=j;\\ 1, & \text{если } i\neq j,\end{cases}$$

является локально-компактным со счётной базой.

Теорема 3. *Функция (1) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X_0)$.*

В связи с теоремами 1–3 возникают естественные

Задача 1. Какому бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}^c(X)$ принадлежат функции (1) и (2) для произвольного метрического пространства (X,d)?

Задача 2. Какому бэровскому классу принадлежат функции (1) и (2) на пространстве $\mathcal{M}^u(X)$ непрерывных отображений из X в X с равномерной топологией?

Литература. 1. Bowen R. Entropy for group endomorphism and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 153. P. 401–414. 2. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453.

Н. А. Изобов (Минск), **А. В. Ильин** (Москва) "О числе решений с отрицательными показателями у линейной дифференциальной системы со всеми положительными показателями первого приближения и экспоненциально убывающим возмущением" (30 апреля 2021 г.).

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant t_0,\tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и положительными характеристическими показателями $\lambda_2(A)\geqslant\lambda_1(A)>0$, а также возмущённые системы

$$\dot{y}=A(t)y+Q(t)y,\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant t_0,\tag{2}$$

с бесконечно дифференцируемыми экспоненциально убывающими $n\times n$-возмущениями

$$Q:\|Q(t)\|\leqslant C_Qe^{-\sigma t},\quad \sigma>0,\quad t\geqslant t_0.\tag{3}$$

Возникает вопрос о существовании, например, таких двумерной системы (1) и возмущения (3), что возмущённая система (2) имеет нетривиальное решение с отрицательными показателями Ляпунова. Решение этой (первой) задачи может служить предварительным этапом в решении более важной (второй) задачи о существовании нетривиальных решений с отрицательными показателями у нелинейной дифференциальной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{4}$$

с бесконечно дифференцируемым m-возмущением

$$f(t, y) : \|f(t, y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0,$$

порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне её в "антиперроновском" случае положительности всех характеристических показателей линейного приближения (1). В силу принципа линейного включения возможное отрицательное решение первой задачи влекло бы за собой такое же решение и второй. Смена же положительных характеристических показателей линейного приближения (1) на отрицательные у решений возмущённой системы (4) являлась бы эффектом, противоположным известному эффекту Перрона [1–5].

Положительному решению первой задачи и посвящено настоящее сообщение.

Теорема. *Для любых параметров* $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 > 0$, $\theta > 1$ *и* $\sigma \in (0, \lambda_1 + \theta^{-1}\lambda_2)$ *существуют:*

1) двумерная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2$;

2) бесконечно дифференцируемое экспоненциально убывающее возмущение (3) $Q(t)$, *такие, что возмущённая линейная система (2) имеет решение* $y(t)$ *с отрицательным показателем*

$$\lambda_0 = \frac{\sigma\theta - \theta\lambda_1 - \lambda_2}{\theta - 1}.$$

С помощью этой теоремы и её доказательства устанавливается справедливость аналогичного утверждения в n-мерном случае: для любых параметров

$$\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1 > 0, \quad \theta > 1, \quad \sigma \in (0, \lambda_1 + \theta^{-1}\lambda_2),$$

существуют линейная система (1) с показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, экспоненциально убывающее возмущение (3) такие, что возмущённая система (2) имеет $n-1$ линейно независимых решений $y_i(t)$ с показателями

$$\lambda[y_i] = \frac{\sigma\theta - \theta\lambda_1 - \lambda_{i+1}}{\theta - 1} < 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского (проект 20-57-00001 Бел_а) и Белорусского республиканского (проект Ф20Р-005) фондов фундаментальных исследований.

Литература. 1. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. H. 5. S. 702–728. 2. Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006. 3. Изобов Н.А., Ильин А.В. О бэровской классификации положительных характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1435–1439. 4. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 463–472. 5. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1590.