

УДК 519.632+517.958:533.9

## ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ В ДВУМЕРНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ-ГАЛАТЕЯХ

© 2021 г. К. В. Брушлинский, Е. В. Степин

Ловушки-галатеи для удержания плазмы в магнитном поле, которое создаётся проводниками с током, погружёнными в плазменный объём, составляют перспективный класс объектов разработок в области управляемого термоядерного синтеза. После описания основных свойств и количественных характеристик ловушек центральной проблемой является исследование устойчивости равновесных магнитоплазменных конфигураций. Существенную роль играют здесь математическое моделирование и расчёты, выполненные в терминах дифференциальных уравнений магнитной газодинамики. Они изложены на примере распрямлённой в цилиндр тороидальной ловушки “галатея-пояс”. В статье представлена её плазмостатическая модель и несколько подходов к исследованию устойчивости конфигураций: сходимости итерационных методов установления равновесия в двумерных моделях, краткий обзор исследования магнитогазодинамической устойчивости одномерных конфигураций, окружающих прямой проводник с током, и строгое исследование устойчивости конфигураций относительно двумерных возмущений в линейном приближении. В численных расчётах получены критерии устойчивости в разных приближениях и их соотношения между собой. Указаны пути обобщения результатов на трёхмерные возмущения.

DOI: 10.31857/S0374064121070013

**Введение.** Тематика, представленная названием нашей статьи, постоянно присутствует в работах по приложениям вычислительной математики к проблемам физики плазмы, начиная с середины прошлого столетия. Интерес к ней обусловлен многообещающими научно-техническими приложениями и, в первую очередь, перспективой получить в большом количестве дешёвую энергию управляемого термоядерного синтеза. Осуществить желаемую реакцию синтеза лёгких элементов таблицы Менделеева предполагается в ловушках, в которых плотная и нагретая до высоких температур плазма должна удерживаться магнитным полем в течение требуемого времени. Особое внимание уделяется преодолению возникающих при этом многочисленных плазменных неустойчивостей. Поэтому основным объектом исследований в данной области науки являются конфигурации плазмы, поля и создающего его электрического тока, находящиеся в равновесии в разнообразных ловушках.

Наиболее распространены ловушки тороидальной формы, позволяющие максимально избежать контактов горячей плазмы с элементами конструкции. В данной работе рассматривается специальный класс тороидальных ловушек, в которых проводники с током, индуцирующим магнитное поле, погружены в плазменный объём, но не соприкасаются с плазмой. Внимание к ним привлечено А.И. Морозовым [1], который назвал их галатеями и инициировал серию конкретных разработок таких ловушек [2–4]. Существенную роль в этих разработках играют математические модели основных физических процессов и большие объёмы относящихся к ним численных исследований. Они облегчают теоретическую часть работы, а также позволяют более экономно вести громоздкие и дорогостоящие эксперименты и анализировать их результаты. С численным моделированием равновесных магнитоплазменных конфигураций в упомянутых выше ловушках-галатеях можно ознакомиться, например, по статьям [5–8], обзору [9] и монографиям [10, с. 65; 11, с. 152]. Математический аппарат моделей достаточно плотной плазмы основывается на приближении механики сплошных сред, т.е. используются дифференциальные уравнения магнитной газодинамики (МГД), а более конкретно – численное решение краевых МГД-задач.

Основные проблемы в исследовании конфигураций в ловушках и соответствующих численных моделей сводятся, во-первых, к описанию их возможных равновесных состояний и,

во-вторых, к их устойчивости относительно хотя бы малых, но достаточно произвольных возмущений.

Равновесия исследуются с помощью краевых задач для уравнений плазмостатики, в общем случае трёхмерных и достаточно сложных. Однако широко распространены ловушки, которые обладают симметрией (плоской, осевой, винтовой) или допускают её в каком-либо приближении. Симметрия позволяет понизить размерность задач о равновесии до двумерных, а в особо простых случаях – даже до одномерных. В двумерных задачах систему уравнений плазмостатики удаётся свести к одному скалярному уравнению Грэда–Шафранова для функции магнитного потока [12, 13]. Одномерные задачи имеют дело с обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые несложно решаются аналитически. В исследованиях основных принципиальных вопросов на качественном уровне допускается ещё одно упрощение: тороидальные ловушки “распрямляются” в цилиндр, т.е. в тор бесконечного радиуса. Необходимые для этого количественные поправки на тороидальность оцениваются, например, в работе [7].

Задачи об устойчивости равновесных магнитоплазменных конфигураций в ловушках обсуждаются и рассматриваются во многих научных работах; в общем виде они поставлены в [14–16; 17, с. 82] и решены в ряде конкретных случаев. Из работ последнего времени отметим серию статей С.Ю. Медведева с соавторами (см. статью [18] и приведённую в ней библиографию).

В настоящей работе устойчивость рассматривается на примере двумерных равновесных конфигураций в распрямлённом аналоге тороидальной “галатее-пояса” – цилиндре с двумя погружёнными в него прямыми проводниками. Приведена постановка задачи о МГД-устойчивости относительно произвольных трёхмерных возмущений в линейном приближении. Эта задача сведена к двумерным задачам для отдельных гармоник по координате  $z$ , указаны возможные подходы к её решению, получен критерий устойчивости. Кроме того, рассмотрены некоторые упрощения исходной задачи. Во-первых, сходимость итерационных методов установления в численном решении двумерных плазмостатических задач о равновесии трактуется как разновидность устойчивости, но только относительно возмущений магнитного поля той же размерности. Такая устойчивость названа “диффузионной” [19]. Она необходима, но недостаточна для МГД-устойчивости, однако может представлять интерес, поскольку оценивается количественными критериями и указывает на обстоятельства, сопутствующие или препятствующие общепринятой устойчивости. Во-вторых, общим элементом всех ловушек-галатей являются погружённые в плазму проводники с током. Поэтому целесообразно рассмотреть одномерную задачу о плазменной конфигурации, окружающей один прямой проводник и не соприкасающийся с ним. В серии работ последнего времени [20–23] рассмотрены такие задачи с заданным распределением давления по радиусу с различными его вариантами вблизи внешней границы окрестности. Эти конфигурации оказались диффузионно устойчивыми при допустимых значениях давления плазмы, но МГД-устойчивость потребовала более сильных ограничений на давление, зависящих от его распределения у внешней границы.

В целях единообразного представления поставленных вопросов и их решения в п. 1 кратко изложена двумерная математическая модель “галатее-пояса”, даны определение диффузионной устойчивости и её интерпретация в терминах спектральных свойств оператора линеаризованной задачи. В п. 2 кратко перечислены результаты об устойчивости одномерных конфигураций, окружающих один прямой проводник с током. В п. 3 изложена логика МГД-устойчивости двумерных конфигураций в галатеех и результаты численного исследования устойчивости относительно двумерных возмущений, в том числе динамических. Указаны пути исследования МГД-устойчивости относительно произвольных трёхмерных возмущений.

**1. Математическая модель равновесия в “галатее-поясе”. Диффузионная устойчивость.** Распрямлённый аналог тороидальной ловушки “галатее-пояс” [3] представляет собой бесконечный цилиндр с двумя погружёнными в него прямыми проводниками конечного диаметра. Математическая модель равновесных конфигураций в случаях круглого и квадратного сечений цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси, изложена в работах [6] и [7] соответственно. Конфигурации расположены в приосевой части цилиндра и практически не зависят от формы внешней границы. Поэтому кратко воспроизведём рассматриваемую модель для упрощения в случае квадратной области сечения цилиндра (см. рис. 1, на котором

показаны сечения цилиндра и проводников плоскостью  $z = \text{const}$ ; ось цилиндра совпадает с осью  $z$ ).

МГД-равновесие описывается уравнениями плазмостатики [10, с. 65; 11, с. 152; 14; 15]

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{pl}} + \mathbf{j}^{\text{ex}}, \quad (1)$$

связывающими давление  $p$ , напряжённость магнитного поля  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)$  и плотность электрического тока  $\mathbf{j} = (0, 0, j)$ . Ток складывается из тока  $j^{\text{pl}}$  в плазме и заданного тока  $j^{\text{ex}}$  в проводнике. Ток в проводниках вводится в задачу как непрерывная функция, сосредоточенная в основном в области проводников. Такое задание тока позволяет ставить задачу в односвязной области сечения цилиндра, не выделяя из неё “островки” с проводниками [5; 6; 10, с. 69; 11, с. 157]. В наших работах эта функция имеет вид

$$j^{\text{ex}} = j_0 \sum_{k=1}^2 \exp\{-((x - x_k)^2 + y^2)/r_c^2\}, \quad j_0 = 2/r_c^2, \quad (2)$$

где  $x_1 = 1, x_2 = -1$  – абсциссы центров,  $r_c$  – условный радиус проводников, а множитель  $j_0$  обеспечивает равенство интеграла от функции (2), взятого по окрестности проводника, величине заданного тока в нём.

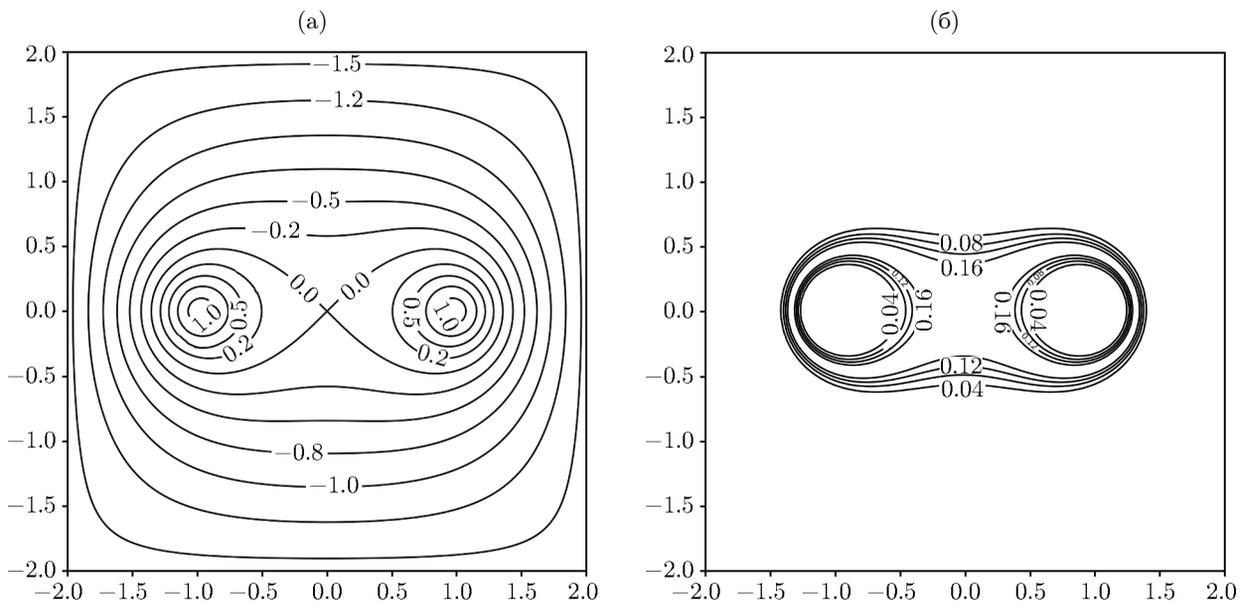


Рис. 1. Равновесные конфигурации магнитного поля (а) и давления плазмы (б) в сечении цилиндра при  $r_c = 0.2, q = 0.2, p_0 = 0.2$ .

Уравнения (1) и функция (2) представлены в безразмерной форме, т.е. все переменные в них отнесены к единицам измерения, отмеченным индексом  $u$ , которые составлены из заданных размерных величин:  $x_0$  – расстояния от оси цилиндра до центров проводников и  $J_c$  – электрического тока в каждом из них:

$$x_u = y_u = x_0, \quad H_u = \frac{2J_c}{cx_u}, \quad j_u = \frac{c}{4\pi} \frac{H_u}{x_u}, \quad p_u = \frac{H_u^2}{4\pi}. \quad (3)$$

Рассматриваемая магнитоплазменная конфигурация обладает плоской симметрией ( $\partial/\partial z \equiv 0$ ), т.е. двумерна, что сильно упрощает математический аппарат модели. Магнитное поле  $\mathbf{H}$  выражается через  $z$ -компоненту вектор-потенциала  $\psi = \psi_z$  по формулам

$$\mathbf{H} = \text{rot } \Psi, \quad H_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Линии уровня  $\psi(x, y) = \text{const}$  – магнитные силовые линии в сечении цилиндра плоскостью  $z = \text{const}$ , а физический смысл функции  $\psi$  – функция магнитного потока. Система уравнений (1) сводится к одному скалярному уравнению – плоской разновидности уравнения Грэда–Шаффранова [12, 13]:

$$\Delta\psi + \frac{dp}{d\psi} + j^{\text{ex}} = 0. \quad (4)$$

Внешняя граница ловушки предполагается непрозрачной для магнитного поля, что отражено в граничном условии  $\psi = \psi|_{\Gamma} = \text{const}$ . Давление  $p$  функционально зависит от  $\psi$ , и зависимость  $p(\psi)$  должна быть задана при постановке конкретной задачи исходя из дополнительных требований к исследуемой конфигурации.

В задачах о галатях естественно требовать, чтобы проводники внутри плазменного объёма не контактировали с плазмой. Это достигается, например, заданием  $p(\psi)$  в виде

$$p(\psi) = p_0 \exp\{-(\psi - \psi_0)^2/q^2\}. \quad (5)$$

Здесь давление максимально на силовой линии  $\psi(x, y) = \psi_0$  – сепаратрисе магнитного поля в “поясе”, проходящей через центр (см. рис. 1), и быстро убывает при удалении от неё, если параметр  $q$  достаточно мал. Таким образом, краевая задача для уравнения (4) содержит параметр  $\psi_0$ , определяемый дополнительным условием

$$\psi_0 = \psi(0, 0). \quad (6)$$

На внешней границе без ограничения общности можно положить  $\psi|_{\Gamma} = 0$ . Задача решается итерационным методом установления. Уравнение (4) заменяется параболическим уравнением

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi + g(x, y, \psi), \quad (7)$$

где  $g(x, y, \psi)$  – младшие члены в (4).

В его разностном аналоге переход от  $n$ -го слоя (итерации) к  $(n+1)$ -му в главных членах с производными от  $\psi$  осуществляется методом продольно-поперечной прогонки [11, с. 246; 24; 25], а нелинейное слагаемое  $g(x, y, \psi)$  в (7) и параметр  $\psi_0$  в (6) берутся с предыдущего слоя.

Результаты расчётов “пояса”, полученные в работах [6, 7], проиллюстрированы на рис. 1. Плазменная конфигурация сосредоточена в центре области и имеет форму криволинейного четырёхугольника с выпуклыми внутрь границами и примыкающими к ним узкими полосками вдоль магнитной сепаратрисы. Общий во всех вариантах расчётов результат состоит в том, что итерационный процесс решения задачи сходится лишь при ограничении

$$p_0 < p_0^{\text{diff}} \quad (8)$$

на максимальное значение давления, отнесённое к магнитной единице. Это позволяет считать неравенство (8) условием так называемой диффузионной устойчивости [19] – устойчивости только при возмущениях магнитного поля той же размерности, т.е. двумерных. Она не зависит от численного метода решения задачи, поскольку связана с внутренней природой математической модели – положительной определённости дифференциального оператора

$$L[u] \equiv -\Delta u - \frac{dg}{d\psi}u \quad (9)$$

линеаризованной задачи. Сходимость итераций имеет место, если погрешность решения задачи с уравнением (7)  $u = \psi - \psi_{\text{eq}}$ , где  $\psi_{\text{eq}}$  – искомое решение стационарной задачи, стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Оно строится из экспонент

$$u(t, x, y) = e^{-\lambda t}u(x, y), \quad (10)$$

удовлетворяющих уравнению

$$L[u] = \lambda u. \quad (11)$$

Поэтому  $u \rightarrow 0$  в формуле (10) при любых “начальных” данных, если все собственные значения задачи (11) положительны.

Диффузионная устойчивость, очевидно, необходима, но недостаточна для МГД-устойчивости конфигураций, однако может быть полезна при анализе последней, так как содержит грубый, но доступный критерий. Спектр оператора  $L[u]$  следует сравнить со спектром оператора  $L_0[u] \equiv -\Delta u$ , положительно определённого практически при любых однородных граничных условиях. Известно, что если коэффициент при  $u$  во втором слагаемом правой части (9) положителен, то собственные значения оператора  $L[u]$  смещены вправо по сравнению со спектром оператора  $L_0[u]$  [26, с. 86]. Отсюда вытекает достаточное условие диффузионной устойчивости

$$\frac{dg}{d\psi} \equiv \frac{d^2p}{d\psi^2} \leq \mu_1, \quad (12)$$

где  $\mu_1$  – старшее (минимальное) собственное значение оператора  $L_0[u]$  [21], которое легко находится аналитически и зависит только от геометрии задачи и граничных условий.

В квадратной области  $-2 < (x, y) < 2$  на рис. 1  $\mu_1 = \pi^2/8 \approx 1.2321$ . Поскольку

$$\frac{d^2p}{d\psi^2} = -\frac{2p_0}{q^2} \left( 1 - 2 \left( \frac{\psi - \psi_0}{q} \right)^2 \right) \exp \left( -\frac{(\psi - \psi_0)^2}{q^2} \right) \leq 0.4724 \frac{p_0}{q^2}, \quad (13)$$

то из (12) и (13) следует, что  $p_0 \leq 2.117\mu_1 q^2 = 2.61q^2$ .

Расчёты показали, что в этом примере со значением  $q = 0.2$  итерационный процесс решения задачи сходится при гораздо более слабом ограничении  $p_0 \leq 4.5$  [7], что подтверждает лишь достаточность критерия (12) для диффузионной устойчивости. В него коэффициент при  $u$  во втором слагаемом оператора (9) входит только посредством максимального значения  $d^2p/d\psi^2$ , и поэтому без внимания остаётся существенный участок значений  $\psi$ , близких к  $\psi_0$ , где  $d^2p/d\psi^2 < 0$ .

В серии расчётов конфигураций с параметрами  $r_c = 0.2$ ,  $q = 0.2$  получены равновесные конфигурации, расположенные на конечном расстоянии от проводников. Пример распределения магнитного поля и давления при  $p_0 = 0.2$  приведён на рис. 1. Электрический ток  $j$  равен нулю в центре и на сепаратрисе магнитного поля, где давление максимально, и положителен в области между сепаратрисой и внешней границей. Здесь он практически совпадает с  $j^{\text{pl}} = j - j^{\text{ex}}$ , так как заданный ток  $j^{\text{ex}}$  сосредоточен вблизи центров проводников. В области между сепаратрисой и проводниками  $j^{\text{pl}} = j - j^{\text{ex}} < 0$ . Таким образом, сила Ампера  $(\mathbf{j} \times \mathbf{H})_z = -jH$  направлена в сторону сепаратрисы и способствует изоляции проводников и внешней границы от плазмы. При значениях  $p_0 < 0.8$  границы четырёхугольника выпуклы внутрь, что благоприятствует устойчивости [27]. С возрастанием  $p_0$  конфигурация увеличивается в объёме, становится выпуклой в сторону внешней границы и стремится приблизиться к проводникам. Время установления решения задачи с уравнением (7) возрастает, и по мере приближения  $p_0 \rightarrow p_0^{\text{diff}}$  установление прекращается.

Таким образом, двумерная математическая модель равновесия плазмы в ловушке “галатейя-пояс” основана на численном решении краевой задачи для уравнения Грэда–Шафранова. Рассмотрены свойства равновесных конфигураций и получено достаточное условие их диффузионной устойчивости в терминах спектра дифференциального оператора линеаризованной задачи.

**2. Одномерная модель конфигураций, окружающих проводник с током.** Ещё один относительно простой, но достаточно общий подход к исследованию устойчивости равновесия плазмы в галатейях можно рассмотреть в типичном для всех ловушек этого класса элементе – окрестности одного отдельно взятого проводника. Здесь можно ограничиться одномерными задачами в кольцевой окрестности прямого токнесущего проводника и получить определённую количественную информацию об окружающих его, но не соприкасающихся с ним конфигурациях. Эти задачи можно считать обобщением задач о равновесных конфигурациях в круглом цилиндре, в частности, хорошо известного  $Z$ -пинча (см., например, [15; 16; 10, с. 94; 11, с. 168]). Постановка задач и некоторые результаты их решений содержатся в работах [20–23].

Подытожим их результаты и выводы из них кратким обзором, имея в виду, что постановка задач более подробно изложена в работе [21]. Математические модели равновесных конфигураций рассмотрены в кольцевой области  $1 < r < R$ , содержащейся в сечении плазменного цилиндра плоскостью  $z = \text{const}$  и охватывающей прямой круглый проводник радиуса 1. Модели одномерны: единственной независимой пространственной переменной является радиальная координата  $r$ . Вектор плотности электрического тока  $\mathbf{j}$  в проводнике и окружающей его плазме направлен вдоль оси  $z$ , а напряжённость магнитного поля  $\mathbf{H}$  – только по азимуту  $\varphi$ . Три скалярные функции  $p(r)$ ,  $j(r)$  и  $H(r)$  подчиняются двум уравнениям, к которым сводятся уравнения плазмостатики (1):

$$\frac{dp}{dr} = -jH, \quad j = \frac{1}{r} \frac{d(Hr)}{dr}. \quad (14)$$

Они записаны в безразмерной форме. В качестве единицы измерения радиуса выбран радиус проводника:  $r_u = r_c$ , остальные единицы те же, что и выше (см. (3)). Уравнений (14) недостаточно для определения трёх функций, поэтому в математической модели каждой конкретной конфигурации следует задать одну произвольную функцию в соответствии с дополнительными требованиями или имеющейся информацией. Естественно задать давление  $p(r)$  так, чтобы проводник не соприкасался с горячей плазмой, например, в виде квадратичной функции

$$p = p_0 \left( 1 - \left( \frac{r_1 - r}{r_1 - 1} \right)^2 \right), \quad 1 < r < r_1, \quad (15)$$

возрастающей от нуля на поверхности проводника до своего максимального значения  $p_0$  на заданном от него расстоянии  $r_1 - 1 > 0$ . При  $r > r_1$  давление остаётся постоянным или убывает в сторону внешней границы различными способами, как показано в работах [20–23]. Примеры рассматривавшихся распределений давления представлены на рис. 2.

Если задано распределение  $p(r)$ , то магнитное поле  $H(r)$  и ток  $j(r)$  находятся интегрированием уравнений (14). При этом возникает общее для всех конфигураций ограничение на максимальное значение заданного давления

$$p_0 \leq p_0^{\text{cr}} = 3/(r_1^2 + 2r_1 + 3). \quad (16)$$

Устойчивость этих одномерных конфигураций исследована двумя способами. Первый из них – в терминах рассмотренной выше диффузионной устойчивости, соответствующей сходимости итерационного метода решения краевых задач для уравнения Грэда–Шафранова. Для математической модели одномерных конфигураций в этом уравнении нет необходимости, поскольку она получается аналитически после задания  $p(r)$  формулой типа (15), однако их устойчивость может, как уже отмечалось, представлять интерес. Одномерный вариант краевой задачи для уравнения (4) в нашем случае имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi}{dr} \right) + g(\psi) = 0; \quad \frac{d\psi}{dr}(1) = -1, \quad \psi(R) = 0,$$

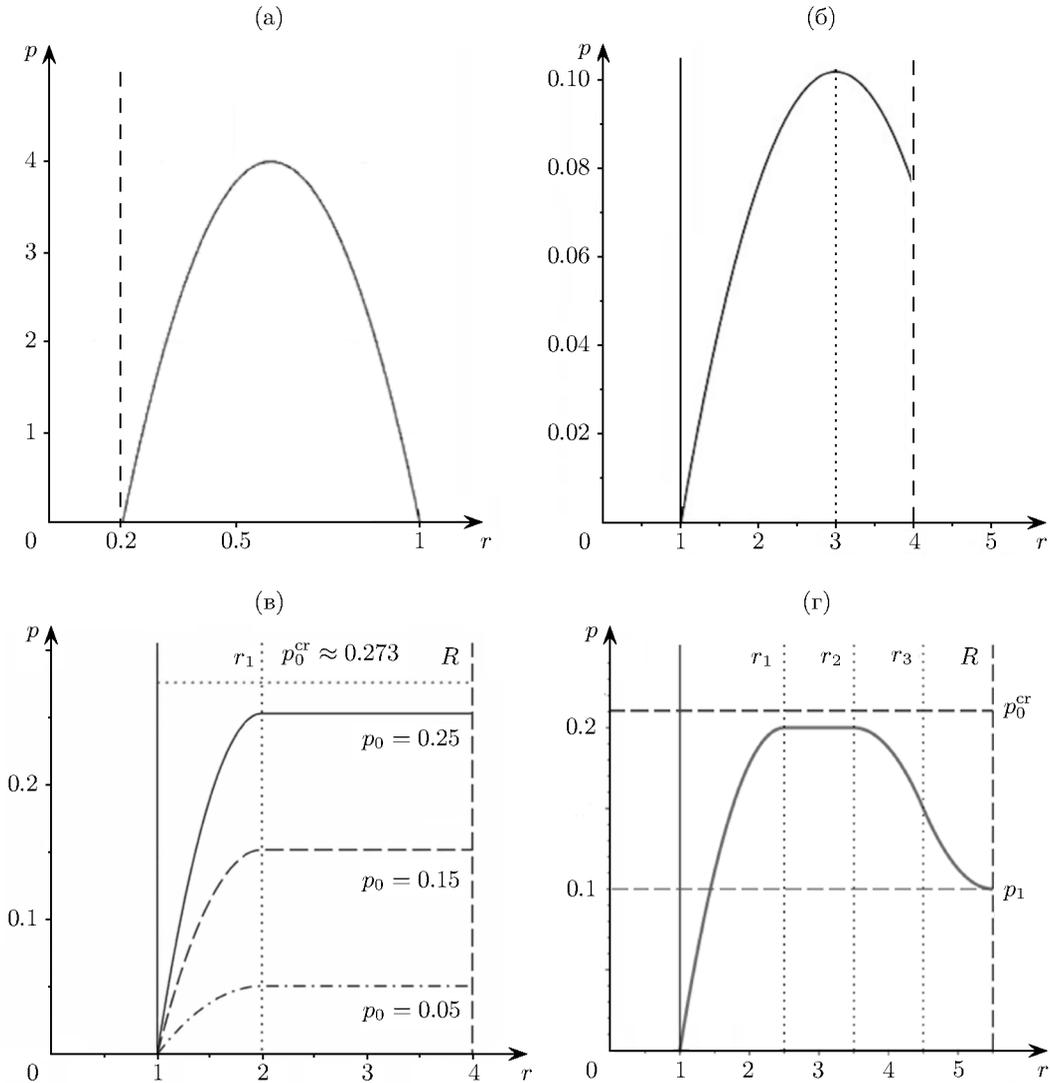
где

$$g(\psi) = \frac{dp}{d\psi} = \frac{dp/dr}{d\psi/dr} = j, \quad \frac{d\psi}{dr} = -H.$$

Численное решение её методом установления получено во всех рассчитанных вариантах ловушки, достаточный критерий типа (12) также выполнен. Однако участвующий в этом критерии коэффициент

$$\frac{dg}{d\psi} = \frac{1}{H^2} \left( \frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \frac{1}{H^2} \left( \frac{dp}{dr} \right)^2 \right)$$

может сильно возрасти при  $p_0 \rightarrow p_0^{\text{cr}}$  и  $r_1 \rightarrow 1$ . Это соответствовало бы неограниченному приближению давления к критическому или конфигурации – к проводнику, что противоречит физическому смыслу ловушек-галатей. С учётом этого замечания можно сделать вывод, что исследованные варианты окружающих проводник конфигураций диффузионно устойчивы.



**Рис. 2.** Распределения давления в кольцевых конфигурациях плазмы вокруг проводника с током [20–23].

Второй способ – строгое исследование МГД-устойчивости равновесных магнитоплазменных конфигураций относительно произвольных трёхмерных малых возмущений в линейном приближении. Его общая логика в приложении к одномерным конфигурациям в цилиндре и, в первую очередь, к  $Z$ -пинчу, известная из ранних работ [15; 16; 17, с. 71], изложена в монографиях [10, с. 90; 11, с. 165]. Результаты расчётов, относящиеся к рассматриваемым здесь конфигурациям, окружающим прямой проводник, также представлены в работах последнего времени [20–23].

Воспроизведём вкратце схему исследований [21] и полученные результаты. Состояние покоя (1), (14) возмущается малыми величинами  $p_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{v}_1$ , зависящими от времени и всех трёх пространственных координат. Уравнения магнитной газодинамики линеаризуются относительно этих величин. Из возникшей при этом системы семи линейных уравнений первого порядка удаётся исключить  $p_1$  и  $\mathbf{H}_1$  и привести её к следующему трёхмерному уравнению второго порядка для вектора скорости  $\mathbf{v}_1$ :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} = \nabla(\gamma p \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \nabla p \cdot \mathbf{v}_1) + \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \mathbf{j} \times \operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}) \equiv -\mathbf{K}[\mathbf{v}_1]. \quad (17)$$

Решения линейного однородного уравнения с не зависящими от времени  $t$  коэффициентами формируются из экспонент

$$\mathbf{v}_1(t, r, \varphi, z) = e^{i\omega t} \mathbf{v}(r, \varphi, z), \quad (18)$$

а параметр  $\omega$  в показателе степени определяется спектральной задачей на собственные значения

$$\rho\omega^2\mathbf{v} = \mathbb{K}[\mathbf{v}]. \quad (19)$$

Дифференциальный оператор  $\mathbb{K}[\mathbf{v}]$  с однородными краевыми условиями, например,  $v_n = 0$  на границе области, является самосопряжённым, следовательно, его собственные значения  $\omega^2$  действительны. Отсюда следует, что решения (18) не возрастают со временем, если  $\omega^2 > 0$ , и экспоненциально возрастают, если  $\omega^2 < 0$ , т.е. условием МГД-устойчивости конфигураций является положительная определённость оператора  $\mathbb{K}$ . В одномерных задачах его коэффициенты, составленные из функций  $p(r)$ ,  $H(r)$  и  $j(r)$  в состоянии покоя, не зависят также от  $\varphi$  и  $z$ , поэтому возмущения (18) зависят от этих переменных также экспоненциально:

$$\mathbf{v}_1(t, r, \varphi, z) = e^{i\omega t + im\varphi - ikz} \mathbf{v}(r), \quad (20)$$

где  $m$  – целое,  $k$  – действительное, так как решения (20) должны быть периодическими по  $\varphi$  и ограниченными при  $z \rightarrow \pm\infty$ .

Спектральная задача (19) распадается на бесконечную серию одномерных задач для отдельных гармоник возмущений с параметрами  $m$  и  $k$ :

$$\rho\omega_{m,k}^2 \mathbf{v}_{m,k} = \mathbb{K}_{m,k}[\mathbf{v}_{m,k}]. \quad (21)$$

Из векторных уравнений (21) удаётся исключить компоненты  $v_\varphi$  и  $v_z$  и свести поиск решений к задачам для одного скалярного уравнения относительно функции  $u = v_r r$ :

$$-\frac{d}{dr} \left( F_{m,k} \frac{du}{dr} \right) + G_{m,k} u = 0; \quad u|_\Gamma = 0, \quad (22)$$

в котором коэффициенты  $F_{m,k}$  и  $G_{m,k}$  нелинейно зависят от собственного значения  $\omega_{m,k}^2$  (уравнение Соловьёва) [16]. Численно решая задачу (22), например, методом “стрельбы”, можно найти старшие (минимальные) собственные значения  $\omega_{m,k}^2$ , отвечающие за устойчивость конфигураций относительно соответствующих гармоник возмущений.

Дальнейшие упрощения связаны с тем, что для качественного исследования устойчивости нет необходимости в вычислении собственных значений операторов  $\mathbb{K}_{m,k}$  – достаточно установить их положительность. Для этого достаточно лишь найти “границу устойчивости” в области параметров равновесной конфигурации – условие на параметры, при котором старшее собственное значение обращается в нуль, т.е. условие, при котором краевая задача для уравнений (21), (22) при  $\omega^2 = 0$  имеет нетривиальное решение.

В частном случае  $m = 0$  (т.е. когда возмущения не зависят от  $\varphi$ ) уравнение (22) при  $\omega^2 = 0$  вырождается, и устойчивость определяется с помощью энергетического принципа [16; 28; 17, с. 75]: квадратичная форма  $\mathbb{K}[\mathbf{v}]\mathbf{v}$  положительна при всех значениях  $k$ , если выполнено условие

$$-\frac{r}{p} \frac{dp}{dr} < \frac{2\gamma H^2}{p + H^2}, \quad (23)$$

где  $\gamma = 5/3$  – показатель адиабаты.

Этому условию удовлетворяют все конфигурации на рис. 2 при  $1 < r \leq r_1$ , т.е. на возрастающей ветви  $p(r)$ , и заведомо не удовлетворяют конфигурации на рис. 2, а, где левая часть неравенства (23) неограниченно возрастает при  $r \rightarrow R$ , а правая остаётся ограниченной. В связи с этим рассмотрена конфигурация на рис. 2, б, где внешняя граница  $r = R_1$  не допускает обращения  $p(r)$  в нуль. В расчётах получена таблица значений  $R_1$ , допускающих неравенство (23), в зависимости от параметров  $r_1$  и  $p_0$  [21]. Из неё следует, что попытки отодвинуть границу  $r = R$  от  $r = r_1$  заметно усиливают ограничение на максимум давления  $p_0$ .

В остальных случаях  $m \geq 1$  уравнение (22) при  $\omega^2 = 0$  имеет вид

$$-\frac{d}{dr} \left( \frac{H^2}{\eta r} \frac{du}{dr} \right) + \left[ \frac{m^2 H^2}{r^3} - \frac{4\alpha^2 H^2}{\eta r} + \frac{d}{dr} \left( \frac{(2-\eta)H^2}{\eta r^2} \right) \right] u = 0, \quad (24)$$

где  $\alpha = k/m$ ,  $\eta = 1 + \alpha^2 r^2$ . В численном решении краевой задачи для этого уравнения показано, что конфигурации на рис. 2, б устойчивы при  $R < R_1$  для гармоник с низкими значениями волнового числа  $|k| \lesssim 2$ . При возрастании  $|k|$  устойчивость требует более сильных ограничений на  $p_0$  при каждом значении  $R = R_1$  по сравнению с упомянутой выше таблицей [21].

Приведённые результаты показывают, что причины обнаруженной неустойчивости сосредоточены в основном у внешней границы кольцевой окрестности проводника, где плотность плазмы уменьшается с ростом радиуса. Они же подтверждены анализом конфигурации на рис. 2, в, где граница проведена непосредственно через область максимального давления. Здесь все варианты устойчивы в пределах естественного ограничения давления (16) [22]. Отдельное внимание уделено периферии конфигурации на рис. 2, г. Здесь давление ограничено снизу  $p \geq p_1 > 0$ , и переход от  $p(r_2) = p_0$  к  $p(R) = p_1$  осуществляется более плавно и разделён значением  $r = r_3$ , где  $d^2p/dr^2 = 0$  и абсолютная величина  $dp/dr$  максимальна. Условие устойчивости (23) при  $m = 0$  выполнено везде, если оно выполнено при  $r = r_3$ . При  $m \geq 1$  в численном решении краевой задачи для уравнения (24) установлено, что неустойчивость провоцируется скоростью убывания  $p(r)$  при  $r > r_2$ , т.е. сокращением области  $r_2 < r < R$  и уменьшением граничного значения  $p_1$  [23]. Это соответствует известной тенденции неустойчивости Z-пинча [15].

Изложенные результаты представляют интерес в первую очередь тем, что показывают влияние распределения давления  $p(r)$  вблизи проводника на устойчивость. Здесь рассмотренная одномерная модель наиболее оправдана. Результаты, относящиеся к периферии, следует считать ориентировочными, поскольку территории любых ловушек с двумя и более проводниками, примыкающие к внешней границе, по существу неоднородны и нуждаются в исследованиях в, как минимум, двумерных моделях.

Таким образом, в рассмотренных математических моделях равновесных магнитоплазменных конфигураций в окрестности прямого проводника с током исследована зависимость их диффузионной и МГД-устойчивости от распределения давления плазмы вдоль радиуса ловушки.

**3. Двумерные задачи о МГД-устойчивости.** Исследование устойчивости равновесных конфигураций в ловушках, допускающих плоскую симметрию, в частности, в цилиндрическом аналоге “галатей-пояса”, ведётся в соответствии с упомянутой выше общей логикой линейной теории. В основе такого исследования лежит анализ решений начально-краевой задачи для уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t} = \nabla(\gamma p \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \nabla p \cdot \mathbf{v}_1) + \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + (\mathbf{j} - \mathbf{j}^{\text{ex}}) \times \operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}) \equiv -\tilde{\mathbb{K}}[\mathbf{v}_1] \quad (25)$$

с граничным условием  $v_{1n} = 0$  на внешней границе или, что то же самое, с условием положительной определённости линейного оператора  $\tilde{\mathbb{K}}[\mathbf{v}_1]$ . Уравнение (25) отличается от (17) заменой тока  $\mathbf{j}$  на плазменный ток  $\mathbf{j}^{\text{pl}} = \mathbf{j} - \mathbf{j}^{\text{ex}}$ , что позволяет рассматривать задачи в односвязных областях, не исключая из них территории проводников. Коэффициенты уравнения составлены из функций  $p(x, y)$ ,  $H(x, y)$  и  $j(x, y)$ , т.е. не зависят от переменных  $t$  и  $z$ , поэтому его решения зависят от них экспоненциально  $\mathbf{v}_1(t, x, y, z) = e^{i\omega t - ikz} \mathbf{v}(x, y)$  с действительными значениями параметра  $k$ , чтобы избежать неограниченного роста при  $z \rightarrow \pm\infty$ . Задача с уравнением (25) становится спектральной задачей типа (19), которая превращается в однопараметрическую серию двумерных векторных задач  $\rho \omega_k^2 \mathbf{v}_k = \tilde{\mathbb{K}}_k[\mathbf{v}_k]$  для фурье-гармоник возмущений скорости. Здесь оператор  $\tilde{\mathbb{K}}_k$  означает соответствующую гармонику оператора  $\tilde{\mathbb{K}}$ .

Собственные значения  $\omega_k^2$  действительны, а вектор-функции  $\mathbf{v}_k$ , вообще говоря, комплексны. Действительные части этих вектор-функций удобно представить в терминах функций  $u(x, y) = \operatorname{Re} v_{xk}$ ,  $v(x, y) = \operatorname{Re} v_{yk}$ ,  $w(x, y) = \operatorname{Im} v_{zk}$ , опустив в дальнейшем индекс  $k$ :

$$\rho \omega^2 u = L_1[u, v] + k M_1[w], \quad \rho \omega^2 v = L_2[u, v] + k M_2[w], \quad \rho \omega^2 w = M_3[w] + k L_3[u, v] + k^2 M_4[w], \quad (26)$$

где

$$L_1[u, v] = -\frac{\partial}{\partial x}(\gamma p \operatorname{div} \mathbf{v}) + H_y \Delta \xi - \frac{\partial j^{\text{pl}}}{\partial x} \xi, \quad L_2[u, v] = -\frac{\partial}{\partial y}(\gamma p \operatorname{div} \mathbf{v}) - H_x \Delta \xi - \frac{\partial j^{\text{pl}}}{\partial y} \xi,$$

$$L_3[u, v] = \gamma p \operatorname{div} \mathbf{v} + H_x \frac{\partial \xi}{\partial y} - H_y \frac{\partial \xi}{\partial x} + j^{\text{pl}} \xi,$$

$$M_1[w] = -\frac{\partial}{\partial x}(\gamma p w) - H_y \left( \frac{\partial H_y w}{\partial x} - \frac{\partial H_x w}{\partial y} \right) - j^{\text{pl}} H_y w,$$

$$M_2[w] = -\frac{\partial}{\partial y}(\gamma p w) + H_x \left( \frac{\partial H_y w}{\partial x} - \frac{\partial H_x w}{\partial y} \right) + j^{\text{pl}} H_x w,$$

$$M_3[w] = -(\mathbf{H} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{H} w, \quad M_4[w] = (\gamma p + H_x^2 + H_y^2) w, \quad \xi = H_x v - H_y u.$$

Заметим, что упростить уравнения (26) дальше, сведя их, например, к системе двух уравнений для функций  $u$  и  $v$ , аналогичной уравнению Соловьёва (22), здесь не удастся, поскольку третья из них не позволяет выразить функцию  $w$  аналитически через функции  $u$ ,  $v$  и их производные. Однако из неё очевидно выделяется система уравнений, если положить в ней  $k = 0$ , которая распадается на систему из двух уравнений

$$\rho \omega^2 u = L_1[u, v], \quad \rho \omega^2 v = L_2[u, v] \quad (27)$$

для  $u$  и  $v$  и одно уравнение

$$\rho \omega^2 w = M_3[w] \quad (28)$$

для  $w$ .

С ними естественно связать ещё один промежуточный вариант устойчивости – устойчивость относительно двумерных возмущений, не зависящих от координаты  $z$ . Этот вариант устойчивости шире рассмотренной в п. 1 диффузионной устойчивости, которая ограничена возмущениями только магнитного поля, а здесь учитывается также возможность динамики выведенной из равновесия плазмы.

Собственные значения задачи (28) всегда положительны, в чём легко убедиться с помощью интеграла по квадрату  $|x| < 2$ ,  $|y| < 2$ :

$$\begin{aligned} \omega^2 \iint \rho w^2 dx dy &= \iint M_3[w] w dx dy = - \iint \mathbf{H} w \cdot \nabla \operatorname{div} (\mathbf{H} w) dx dy = \\ &= \iint (\operatorname{div} (\mathbf{H} w))^2 dx dy - \oint_{\Gamma} H_n w \operatorname{div} (\mathbf{H} w) ds, \end{aligned} \quad (29)$$

в котором граница  $\Gamma$  непрозрачна для магнитного поля ( $H_n = 0$ ). Отсюда следует, что осевая компонента возмущений  $w(x, y)$ , не зависящих от  $z$ , не может оказать влияние на неустойчивость двумерных конфигураций. Нетривиальным объектом на рассматриваемом двумерном этапе исследования остаётся краевая задача (27) с граничным условием  $v_n = 0$ :

$$u(\pm 2, y) = 0, \quad v(x, \pm 2) = 0.$$

Здесь уместно обратить также внимание на квадратичную форму

$$\rho \omega^2 (u^2 + v^2) = L_1[u, v] u + L_2[u, v] v = -\mathbf{v} \cdot \nabla (\gamma p \operatorname{div} \mathbf{v}) - \xi \Delta \xi - \xi \mathbf{v} \cdot \nabla j^{\text{pl}} \quad (30)$$

и её интеграл по упомянутому выше квадрату

$$\iint (L_1 u + L_2 v) dx dy = \iint (\gamma p (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + (\nabla \xi)^2 + j^{\text{pl}} \operatorname{div} (\xi \mathbf{v})) dx dy. \quad (31)$$

Если эта форма неотрицательна на множестве всех собственных функций  $(u, v)$  задачи (27), то соответствующая равновесная конфигурация устойчива относительно двумерных возмущений. Более сильное условие состоит в следующем: её неотрицательность при любых функциях  $(u, v)$  достаточна для устойчивости. Поскольку

$$j^{\text{pl}} \operatorname{div}(\xi \mathbf{v}) = \operatorname{div}(j^{\text{pl}} \xi \mathbf{v}) - \xi(\mathbf{v} \cdot \nabla) j^{\text{pl}} \quad \text{и} \quad \iint \operatorname{div}(j^{\text{pl}} \xi \mathbf{v}) \, dx \, dy = \oint_{\Gamma} j^{\text{pl}} \xi v_n \, ds = 0,$$

это условие принимает вид

$$\iint \xi \mathbf{v} \cdot \nabla j^{\text{pl}} \leq \iint (\gamma p (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + (\nabla \xi)^2) \, dx \, dy. \tag{32}$$

Устойчивость относительно двумерных возмущений скорости  $(u, v)$  можно исследовать, как и в п. 2, с помощью отыскания “границы устойчивости” в области параметров, т.е. условия, при котором  $\omega^2 = 0$  является собственным значением задачи (27), или, иначе говоря, условия, при котором система линейных однородных уравнений  $L_1[u, v] = 0$ ,  $L_2[u, v] = 0$  имеет нетривиальное решение. Оно может быть найдено в процессе численного решения этих уравнений итерационным методом установления:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -L_1[u, v] = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -L_2[u, v] = 0. \tag{33}$$

Здесь  $t$  – итерационный параметр, играющий роль “времени”, а знак минус в правых частях обеспечивает корректность задачи Коши с уравнениями (33) параболического типа. “Начальными условиями” (нулевой итерацией) могут быть любые функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ .

Равновесные конфигурации плазмы описываются решениями краевой задачи для уравнения Грэда–Шафранова с фиксированными геометрией и параметрами  $r_c = 0.2$ ,  $q = 0.2$  в формулах (2), (5). Искомой границей устойчивости является значение максимального давления  $p_0$  в интервале  $0 < p_0 < p_0^{\text{diff}}$ , допускающем диффузионную устойчивость относительно двумерных возмущений магнитного поля.

В результате численного решения задачи (33) при небольших значениях параметра  $p_0 < p_0^* \sim 3$  устанавливается нулевая скорость в центральной части квадрата, где давление плазмы заметно отличается от нуля (см. рис. 1). Время установления растёт вместе со значениями  $p_0$  и естественно зависит от выбора начальных условий. Вне конфигурации, где давление практически нулевое, скорость может долго сохранять начальное значение, что можно отнести к выбранным начальным условиям. При  $p_0 \rightarrow p_0^*$  в области конфигурации появляются ненулевые значения скорости, близкой по направлению к магнитному полю  $\mathbf{H}$ . При этом обращаются в нуль величины  $\xi$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  и квадратичная форма (30), что соответствует собственному значению  $\omega^2 = 0$ , т.е. границей устойчивости является значение  $p_0 = p_0^* < p_0^{\text{diff}} \sim 5$ . При значениях  $p_0 > p_0^*$  решения краевой задачи с уравнениями (33) неограниченно возрастают, что соответствует неустойчивости конфигураций относительно двумерных возмущений равновесия, включающих ненулевые значения скорости. Полученный результат конкретизирует тенденцию, установленную выше при исследовании одномерных моделей конфигураций, окружающих прямой проводник: устойчивость конфигураций в цилиндрическом аналоге “пояса” относительно двумерных возмущений, включая динамические, требует приблизительно более сильного ограничения на максимальное давление  $p_0 < p_0^*$  по сравнению с диффузионной устойчивостью  $p_0 < p_0^{\text{diff}}$  относительно возмущений магнитного поля. Таким образом, справедливо следующее

**Утверждение.** Для МГД-устойчивости двумерных конфигураций плазмы в ловушке “галатейя-пояс” произвольные малые двумерные возмущения, включая динамические, требуют более сильного ограничения на давление плазмы, измеренного в магнитных единицах, по сравнению с диффузионной устойчивостью относительно возмущений магнитного поля. Параметры ограничений находятся с помощью численного решения соответствующих задач.

Наконец, развитием и завершением изложенных исследований устойчивости в ловушках-галатеех должно стать их распространение на трёхмерные малые возмущения равновесных двумерных конфигураций. В основе лежит краевая задача с уравнениями (26) для фурье-компонент произвольных возмущений с произвольными значениями действительного параметра  $k$ . “Граница устойчивости” в области  $0 < p_0 < p_0^{\text{diff}}$  соответствует существованию нетривиального решения уравнений (26) при  $\omega^2 = 0$ , которое следует искать численными методами. С другой стороны, устойчивость конфигураций равносильна положительной определённости квадратичной формы

$$F = F_0[u, v, w] + kF_1[u, v, w] + k^2F_2[w], \quad (34)$$

где  $F_0 = L_1u + L_2v + M_3w$ ,  $F_1 = M_1u + M_2w + L_3w$ ,  $F_2 = M_4w$ , или её интеграла по сечению цилиндра. При этом  $F_0$  можно упростить до рассмотренной выше формы (30), (31), поскольку её последнее слагаемое положительно (см. (29)). Квадратный полином (34) с положительными коэффициентами  $F_0$  (что требуется для двумерной устойчивости) и  $F_2$ , очевидно, положителен при любых значениях  $k \in \mathbb{R}$ , если он не имеет действительных нулей, т.е. его дискриминант отрицателен. Отсюда следует условие, ограничивающее абсолютную величину формы  $F_1$  или её интеграла,

$$F_1^2 \leq 4F_0F_2. \quad (35)$$

В трёхмерных задачах оно играет ту же роль, что и неравенство (32) в двумерных.

Таким образом, МГД-устойчивость обсуждаемых конфигураций относительно произвольных малых трёхмерных возмущений имеет место при выполнении условия, которое можно сформулировать любым из двух эквивалентных между собой способов: 1) отсутствие нетривиальных решений краевой задачи с уравнениями (26) при  $\omega^2 = 0$ ; 2) выполнение неравенства (35) для достаточно представительного набора функций  $(u, v, w)$ . Его проверка потребует большого объёма вычислений.

**Заключение.** В статье представлена математическая модель равновесных магнитоплазменных конфигураций в цилиндре с погружёнными в плазму двумя прямыми проводниками с током – распрямлённом аналоге тороидальной магнитной ловушки “галатеея-пояс”. Эта модель основана на численном решении двумерных краевых задач для полулинейного дифференциального уравнения Грэда–Шафранова эллиптического типа. Приведены примеры расчёта геометрии конфигураций и их параметров, а также их зависимости от условий задачи. Проведено достаточно полное исследование устойчивости конфигураций: одномерных – в окрестности одного отдельного проводника и двумерных – сначала относительно двумерных возмущений магнитного поля (диффузионная устойчивость), а затем МГД-устойчивости относительно двумерных возмущений всех переменных, включая скорость. На всех этапах получены ограничения на безразмерную величину давления плазмы, требуемые для устойчивости, и иерархия этих ограничений. Указаны пути исследования устойчивости двумерных равновесных конфигураций относительно произвольных трёхмерных возмущений.

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1623).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А.И. О галатеех – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками // Физика плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 3. С. 305–316.
2. Морозов А.И., Пустовитов В.Д. О стеллараторе с левитирующими обмотками // Физика плазмы. 1991. Т. 17. Вып. 10. С. 1276.
3. Морозов А.И., Франк А.Г. Тороидальная магнитная ловушка-галатеея с азимутальным током // Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 11. С. 982–989.
4. Морозов А.И., Бугрова А.И., Бишаев А.М., Липатов А.С., Козинцева М.В. Параметры плазмы в модернизированной ловушке-галатее “Тримикс-М” // Журн. техн. физики. 2007. Т. 77. № 12. С. 15–20.

5. *Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И., Пустовитов В.Д., Тузова Н.Б.* Численное моделирование прямых винтовых шнуров с проводниками, погруженными в плазму // Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 3. С. 284–292.
6. *Брушлинский К.В., Игнатов П.А.* Плазмостатическая модель магнитной ловушки “галатеея-пояс” // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 2184–2194.
7. *Брушлинский К.В., Кондратьев И.А.* Сравнительный анализ расчётов равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках // Мат. моделирование. 2018. Т. 30. № 6. С. 76–94.
8. *Tao B., Jin X., Li Z., Tong W.* Equilibrium configuration reconstruction of multipole galathea magnetic trap based on magnetic measurement // IEEE Trans. on Plasma Sci. 2019. V. 47. № 7. P. 3114–3123.
9. *Морозов А.И., Савельев В.В.* О галатееях – ловушках с погруженными в плазму проводниками // Успехи физ. наук. 1998. Т. 168. № 11. С. 1153–1194.
10. *Брушлинский К.В.* Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М., 2009.
11. *Брушлинский К.В.* Математические основы вычислительной механики жидкости, газа и плазмы. М., 2017.
12. *Шафранов В.Д.* О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // Журн. эксп. и теор. физики. 1957. Т. 33. Вып. 3 (9). С. 710–722.
13. *Grad H., Rubin H.* Hydrodynamic equilibria and force-free fields // Proc. 2nd United Nations Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958. V. 31. P. 190–197.
14. *Шафранов В.Д.* Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М., 1963. Вып. 2. С. 92–131.
15. *Кадомцев Б.Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М., 1963. Вып. 2. С. 132–176.
16. *Соловьев Л.С.* Гидромагнитная устойчивость замкнутых плазменных конфигураций // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М., 1972. Вып. 6. С. 210–290.
17. *Бейтман Г.* МГД-неустойчивости. М., 1982.
18. *Медведев С.Ю., Мартынов А.А., Дроздов В.В., Иванов А.А., Пошехонов Ю.Ю., Коновалов С.В., Виллард Л.* МГД-устойчивость и энергетический принцип без предположения о вложенности магнитных поверхностей двумерных равновесий // Физика плазмы. 2019. Т. 45. № 2. С. 120–132.
19. *Брушлинский К.В.* Два подхода к задаче об устойчивости равновесия плазмы в цилиндре // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 235–243.
20. *Брушлинский К.В., Кривцов С.А., Степин Е.В.* Об устойчивости равновесия плазмы в окрестности прямого проводника с током // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 4. С. 153–163.
21. *Брушлинский К.В., Степин Е.В.* Математические модели равновесных конфигураций плазмы, окружающей проводники с током // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 901–909.
22. *Brushlinskii K.V., Stepin E.V.* Mathematical model and stability investigation of plasma equilibrium around a current-carrying conductor // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1686. P. 012030.
23. *Brushlinskii K.V., Stepin E.V.* Plasma equilibrium and stability in a current-carrying conductor vicinity // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1640. P. 012018.
24. *Peaceman D.W., Rachford H.H.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // J. Soc. Industr. Appl. Math. 1955. V. 3. № 1. P. 28–42.
25. *Douglas J.* On the numerical integration of  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = \partial u / \partial t$  by implicit method // J. Soc. Industr. Appl. Math. 1955. V. 3. № 1. P. 42–65.
26. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М., 1984.
27. *Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З.* Устойчивость плазмы // Успехи физ. наук. 1961. Т. 73. Вып. 4. С. 701–766.
28. *Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D., Kulsrud R.M.* Energy principle for the hydromagnetic stability problem // Proc. Roy. Soc. 1958. V. 244. P. 17–50. (Перевод: Бернштейн А.Б. и др. Энергетический принцип для проблемы гидродинамической устойчивости // Управляемые термоядерные реакции (сб. перев. материалов). М., 1960. Вып. 26. С. 226–260).

Институт прикладной математики  
им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва,  
Национальный исследовательский  
ядерный университет “МИФИ”, г. Москва,  
Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 01.03.2021 г.  
После доработки 01.03.2021 г.  
Принята к публикации 27.04.2021 г.