ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 7, с. 880–888

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

# СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. П. Н. Вабищевич

Для нестационарных задач приближённое решение на новом слое по времени часто получают из ряда более простых задач. В стандартных схемах расщепления используют аддитивное расщепление оператора задачи на более удобные для вычислительной реализации операторы и явно-неявные аппроксимации по времени. В работе рассматривается новый класс схем расщепления, который связывается с аддитивным представлением не оператора задачи, а самого решения. Предложена новая общая процедура расщепления решения на основе аддитивного представления единичного оператора через операторы ограничения и продолжения для вспомогательных пространств. Построены и исследуются безусловно устойчивые схемы расщепления при приближённом решении задачи Коши для эволюционного уравнения второго порядка, которое рассматривается в конечномерном гильбертовом пространстве.

DOI: 10.31857/S0374064121070025

**Введение.** Численное решение нестационарных краевых задач для уравнений с частными производными базируется на использовании, чаще всего, неявных аппроксимаций по времени, которые обеспечивают для соответствующих разностных схем их безусловную устойчивость по начальным данным и правой части [1, гл. 6; 2, гл. II]. Явные схемы более просты для нахождения приближённого решения на новом слое, но имеют жёсткие ограничения на шаги по времени. Целью многих исследований является построение схем, которые бы наследовали, в той или иной мере, достоинства явных и неявных аппроксимаций: сохраняли бы устойчивость, но были бы более удобными для вычислительной реализации.

Упрощение задачи на новом слое без потери устойчивости достигается, в частности, использованием неоднородных аппроксимаций по времени. Широкое распространение получили явно-неявные схемы (IMEX-методы) (см., например, [3, гл. IV]). В этом случае оператор задачи расщепляется на два операторных слагаемых с выделением приемлемого для вычислительной реализации слагаемого, которое берётся с верхнего слоя, а другое слагаемое – с нижнего слоя по времени. В недавней работе [4] нами проведено исследование явно-неявных двух- и трёхслойных операторно-разностных схем для эволюционного уравнения первого порядка как для стандартного расщепления основного оператора задачи, так и для расщепления оператора при производной решения по времени.

В схемах расщепления [5, гл. II; 6, гл. 3] используется аддитивное представление оператора задачи. Переход на новый слой по времени осуществляется при помощи решения эволюционных задач для отдельных операторных слагаемых. Во многих нестационарных задачах вычислительно приемлемые подзадачи имеет смысл строить на основе декомпозиции решения, когда более простые задачи формулируются для отдельных составляющих решения. Такие схемы расщепления решения построены в работе [7] для приближённого решения задачи Коши в конечномерном гильбертовом пространстве для эволюционного уравнения первого порядка.

В настоящей работе схемы расщепления решения строятся для эволюционных уравнений второго порядка. Декомпозиция решения проводится как на прямой сумме подпространств, так и на новом варианте, который связывается с аддитивным представлением единичного оператора на основе операторов ограничения и продолжения. Схемы расщепления основываются на использовании явно-неявных аппроксимаций по времени при выделении диагональной части или треугольного расщепления соответствующей операторной матрицы. Устойчивость предложенных трёхслойных схем расщепления решения исследуется с привлечением общих результатов теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем [2, гл. IV; 8, гл. 4].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения второго порядка в конечномерном гильбертовом пространстве $V$. Для того чтобы не усложнять текст несущественными техническими деталями, ограничимся однородным уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au = 0, \quad 0 < t \leqslant T. \tag{1}$$

Дополним уравнение (1) начальными условиями

$$u(0) = u^0, \quad \frac{du}{dt}(0) = \widetilde{u}^0. \tag{2}$$

Будем считать, для упрощения, что линейный оператор $A : V \to V$ является постоянным (не зависит от $t$), самосопряжённым и положительным:

$$\frac{d}{dt}A = A\frac{d}{dt}, \quad A = A^* > 0. \tag{3}$$

К задаче (1)–(3) мы приходим, например, при численном решении начально-краевых задач для гиперболических уравнений второго порядка после дискретизации по пространственным переменным.

Скалярное произведение векторов $u, v \in V$ обозначим через $(u, v)$, а норму вектора $u$ – через $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. Для самосопряжённого и положительного оператора $D$ определяется гильбертово пространство $V_D$ со скалярным произведением $(u, v)_D = (Du, v)$ и нормой $\|u\|_D = (u, v)_D^{1/2}$.

При приближённом решении задачи Коши (1), (2) чаще всего ориентируются на неявные аппроксимации по времени, которые дают безусловно устойчивые схемы. Будем использовать равномерную сетку по времени с шагом $\tau$, и пусть

$$y^n = y(t^n), \quad t^n = n\tau, \quad n = \overline{0, N}, \quad N\tau = T.$$

Наше рассмотрение естественно начать с трёхслойной схемы с весом $\sigma = \text{const}$:

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = 0, \quad n = \overline{1, N-1}, \tag{4}$$

при заданных начальных условиях

$$y^0 = u^0, \quad y^1 = \overline{u}^1. \tag{5}$$

Второе начальное условие на решениях уравнениях (1) определим со вторым порядком, например, из уравнения

$$\left(I + \frac{\tau^2}{2}A\right)\overline{u}^1 = u^0 + \tau\widetilde{u}^0,$$

где $I$ – единичный оператор в $V$. Разностная схема (4), (5) аппроксимирует задачу (1), (2) со вторым порядком по $\tau$ при достаточной гладкости решения $u(t)$.

При формулировке условий устойчивости трёхслойных схем мы можем ориентироваться на общие результаты устойчивости операторно-разностных схем [2, гл. IV; 8, гл. 4]. Наша цель состоит в получении аналогов априорных оценок, которые имеют место для дифференциальной задачи. Простейшую оценку для решения задачи (1)–(3) можно получить, скалярно домножая уравнение (1) на $du/dt$, что даёт

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \|u\|_A^2\right) = 0.$$

В результате приходим к равенству

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|^2 + \|u(t)\|_A^2 = \|\widetilde{u}^0\|^2 + \|u^0\|_A^2, \tag{6}$$

которое обеспечивает устойчивость решения по начальным данным и консервативность.

Исследование устойчивости операторно-разностных схем базируется на следующем вспомогательном утверждении.

**Лемма.** *Пусть в трёхслойной схеме*

$$C\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + Ay^n = 0, \quad n = \overline{1, N-1}, \tag{7}$$

*$C$ и $A$ – постоянные самосопряжённые операторы. Тогда для решения имеет место равенство*

$$\mathcal{E}^{n+1} = \mathcal{E}^n, \quad n = \overline{1, N-1}, \tag{8}$$

*в котором*

$$\mathcal{E}^{n+1} = \left(A\frac{y^{n+1} + y^n}{2}, \frac{y^{n+1} + y^n}{2}\right) + \left(G\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau}, \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau}\right),$$

*где* $G = C - \tau^2 A/4$.

**Доказательство.** Принимая во внимание равенство

$$y^n = \frac{y^{n+1} + 2y^n + y^{n-1}}{4} - \frac{\tau^2}{4}\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2},$$

запишем схему (7) в виде

$$G\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + A\frac{y^{n+1} + 2y^n + y^{n-1}}{4} = 0. \tag{9}$$

Введём новые переменные $s^n = (y^n + y^{n-1})/2$, $r^n = (y^n - y^{n-1})/\tau$, в которых равенство (9) принимает вид

$$G\frac{r^{n+1} - r^n}{\tau} + A\frac{s^{n+1} + s^n}{2} = 0.$$

Домножая его скалярно на $2(s^{n+1} - s^n) = \tau(r^{n+1} + r^n)$, получаем

$$(Gr^{n+1}, r^{n+1}) + (As^{n+1}, s^{n+1}) = (Gr^n, r^n) + (As^n, s^n).$$

Возвращаясь к старым переменным, приходим к равенству (8). Лемма доказана.

**Следствие 1.** *При выполнении неравенств*

$$A > 0, \quad C - \frac{\tau^2}{4}A > 0 \tag{10}$$

*$\mathcal{E}^{n+1}$ определяет норму решения, а (8) является оценкой устойчивости*

$$\left\|\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau}\right\|_G^2 + \left\|\frac{y^{n+1} + y^n}{2}\right\|_A^2 = \left\|\frac{\overline{u}^1 - u^0}{\tau}\right\|_G^2 + \left\|\frac{\overline{u}^1 + u^0}{2}\right\|_A^2, \quad n = \overline{1, N-1}, \tag{11}$$

*для разностной схемы (5), (7).*

**Следствие 2.** *При менее жёстких, чем (10), ограничениях*

$$A > 0, \quad C - \frac{\tau^2}{4}A \geqslant 0$$

*оценка устойчивости имеет место в более слабой норме: вместо равенства (11) выполняется неравенство*

$$\left\|\frac{y^{n+1}+y^n}{2}\right\|_A^2 \leqslant \left\|\frac{\overline{u}^1-u^0}{\tau}\right\|_G^2 + \left\|\frac{\overline{u}^1+u^0}{2}\right\|_A^2, \quad n=\overline{1,N-1},$$

*для* $0.5(y^{n+1}+y^n)$.

Теперь мы можем сформулировать условия устойчивости схемы (4), (5). Уравнение (4) записывается в виде (7) при $C = I + \sigma\tau^2 A$. Тем самым

$$G = I + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 A$$

и условия устойчивости (10) будут выполнены при стандартных [2, гл. IV; 8, гл. 4] ограничениях на вес: $\sigma \geqslant 0.25$.

Основной недостаток неявных схем связан с вычислительной сложностью задачи для определения решения на новом слое по времени. При использовании схемы (4), (5) приближённое решение $y^{n+1}$ находится как решение задачи

$$(I+\sigma\tau^2 A)y^{n+1} = \varphi^n$$

при известной правой части

$$\varphi^n = (I+\sigma\tau^2 A)(2y^n - y^{n-1}) - \tau^2 A y^n.$$

Актуальной является задача построения таких аппроксимаций по времени, которые приводили бы к более простым алгоритмам для нахождения приближённого решения на новом слое по времени.

В методах расщепления [5, гл. II; 6, гл. 3] упрощение задачи достигается за счёт того или иного представления оператора (операторов) задачи в виде суммы более простых операторов. Если оператор задачи $A$ имеет аддитивное представление

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha,$$

то для приближённого решения задачи (1), (2) применяются явно-неявные аппроксимации. Переход на новый слой по времени обеспечивается решением ряда более простых задач, которые формируются отдельными операторами $A_\alpha$, $\alpha=\overline{1,p}$:

$$(I+\sigma\tau^2 A_\alpha)y_\alpha^{n+1} = \varphi_\alpha^n, \quad \sigma_\alpha = \text{const}, \quad \alpha=\overline{1,p}.$$

Мы рассматриваем новый класс численных методов приближённого решения нестационарных задач. Эти методы основываются не на расщеплении операторов, а на расщеплении самого решения [7]. Выделим общие конструкции аддитивного представления приближённого решения и построим соответствующие явно-неявные схемы для задачи Коши (1), (2).

**2. Расщепление решения.** Будем работать с семейством некоторых конечномерных гильбертовых пространств $V_\alpha$, $\alpha=\overline{1,p}$, которые имеют, например, существенно меньшую размерность, чем пространство $V$. Из решений в пространствах $V_\alpha$ строится аддитивное представление решения в исходном пространстве $V$.

Для каждого их этих пространств определены линейные операторы – оператор $R_\alpha$ ограничения с пространства $V$ на пространство $V_\alpha$ и оператор $R_\alpha^*$ продолжения с $V_\alpha$ на $V$:

$$R_\alpha : V \to V_\alpha, \quad R_\alpha^* : V_\alpha \to V, \quad \alpha=\overline{1,p}.$$

Мы предполагаем, что для $V$ имеет место разложение

$$V = \sum_{\alpha=1}^{p} R_\alpha^* V_\alpha,$$

так что для каждого $u \in V$ справедливо равенство

$$u = \sum_{\alpha=1}^{p} R_\alpha^* u_\alpha, \quad u_\alpha \in V_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,p}. \tag{12}$$

Тем самым имеет место аддитивное представление для $u \in V$:

$$u = \sum_{\alpha=1}^{p} w_\alpha, \quad w_\alpha = R_\alpha^* u_\alpha, \quad w_\alpha \in V, \quad \alpha = \overline{1,p}.$$

Чтобы получить систему уравнений для отдельных слагаемых $u_\alpha$, $\alpha = \overline{1,p}$, подставим представление (12) в уравнение (1) и поочерёдно домножим его на $R_\alpha$, $\alpha = \overline{1,p}$. Это даёт

$$\sum_{\beta=1}^{p} R_\alpha R_\beta^* \frac{d^2 u_\beta}{dt^2} + \sum_{\beta=1}^{p} R_\alpha A R_\beta^* u_\beta = 0, \quad \alpha = \overline{1,p}. \tag{13}$$

Полученная система уравнений дополняется начальными условиями

$$u_\alpha(0) = u_\alpha^0, \quad \frac{du_\alpha}{dt}(0) = \widetilde{u}_\alpha^0, \quad \alpha = \overline{1,p}, \tag{14}$$

которые вытекают из условий (2). В (14) векторы $u_\alpha^0$, $\alpha = \overline{1,p}$, и $\widetilde{u}_\alpha^0$, $\alpha = \overline{1,p}$, – решения, возможно не единственные, систем уравнений

$$\sum_{\beta=1}^{p} R_\alpha R_\beta^* u_\beta^0 = R_\alpha u^0, \quad \sum_{\beta=1}^{p} R_\alpha R_\beta^* \widetilde{u}_\beta^0 = R_\alpha \widetilde{u}^0, \quad \alpha = \overline{1,p}.$$

Наша цель состоит в том, чтобы построить такие аппроксимации по времени для задачи Коши (13), (14), которые обеспечивали бы переход на новый слой по времени с помощью решения отдельных задач для $u_\alpha$, $\alpha = \overline{1,p}$. В этом случае, принимая во внимание представление (12), речь идёт о схемах расщепления решения для задачи (1), (2).

Запишем систему (13) в виде одного уравнения второго порядка для векторных величин. Определим вектор $\boldsymbol{u} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ и от задачи (13), (14) перейдём к задаче Коши

$$\boldsymbol{B} \frac{d^2 \boldsymbol{u}}{dt^2} + \boldsymbol{A} \boldsymbol{u} = 0, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}^0, \quad \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}(0) = \widetilde{\boldsymbol{u}}^0, \tag{16}$$

где $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}$ – следующие операторные матрицы: $\boldsymbol{B} = (R_\alpha R_\beta^*)$, $\boldsymbol{A} = (R_\alpha A R_\beta^*)$, $\alpha, \beta = \overline{1,p}$.

Задачу (15), (16) естественно рассматривать на прямой сумме $\boldsymbol{V} = V_1 \bigoplus \ldots \bigoplus V_p$ пространств $V_1, \ \ldots, \ V_p$; при этом для $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ скалярное произведение и норма определяются выражениями

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{\alpha=1}^{p} (u_\alpha, v_\alpha)_\alpha \quad \text{и} \quad \|\boldsymbol{u}\| = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})^{1/2},$$

здесь и далее $(\,\cdot\,,\cdot\,)_\alpha$ – скалярное произведение в пространстве $V_\alpha$, $\alpha = \overline{1,p}$.

В силу того, что $(R_\alpha R_\beta^*)^* = R_\beta R_\alpha^*$, $\alpha, \beta = \overline{1,p}$, оператор $\boldsymbol{B}$ самосопряжён. Кроме того, непосредственно убеждаемся в том, что справедливо равенство

$$(\boldsymbol{Bu}, \boldsymbol{u}) = \left( \left( \sum_{\alpha=1}^{p} R_\alpha^* u_\alpha \right)^2, 1 \right), \tag{17}$$

из которого вытекает неотрицательность оператора $\boldsymbol{B}$. В силу равенств (17) и (12) имеем

$$(\boldsymbol{Bu}, \boldsymbol{u}) = \|u\|^2. \tag{18}$$

Аналогичные свойства при выполнении условий (3) имеют место для оператора $\boldsymbol{A}$:

$$(\boldsymbol{Au}, \boldsymbol{u}) = \left( \left( \sum_{\alpha=1}^{p} R_\alpha^* u_\alpha \right)^2, 1 \right)_A = \|u\|_A^2. \tag{19}$$

Таким образом, приходим к векторной задаче (15), (16), в которой $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^* \geqslant 0$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^* \geqslant 0$.

Домножая уравнение (15) скалярно в $\boldsymbol{V}$ на $d\boldsymbol{u}/dt$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left( \left( \boldsymbol{B} \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \right) + (\boldsymbol{Au}, \boldsymbol{u}) \right) = 0.$$

Тем самым имеет место равенство

$$\left( \boldsymbol{B} \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \right) + (\boldsymbol{Au}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{u}}^0, \widetilde{\boldsymbol{u}}^0) + (\boldsymbol{Au}^0, \boldsymbol{u}^0),$$

которое с учётом равенств (18), (19) равносильно оценке (6) для решения задачи (1), (2).

После декомпозиции (12) решения задачи (1), (2) приходим к векторной задаче (13), (14) для отдельных слагаемых решения $u_\alpha$, $\alpha = \overline{1,p}$. Они связаны друг с другом компонентами не только операторной матрицы $\boldsymbol{A}$, но и матрицы $\boldsymbol{B}$. Чтобы получить распадающиеся задачи, нужно строить те или иные расщепления обеих операторных матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Особенно проблематично это сделать для матрицы $\boldsymbol{B}$ – приходится ориентироваться на четырёхслойные разностные аппроксимации по времени. Явно-неявные аппроксимации при расщеплении оператора при производной по времени для эволюционных уравнений первого порядка рассмотрены в статье [4] и использовались в [7] при построении схем расщепления решения. В настоящей работе рассматриваются варианты расщепления решения в случае, когда операторная матрица $\boldsymbol{B}$ является диагональной и необходимо расщеплять только операторную матрицу $\boldsymbol{A}$. Выделим два типа такого расщепления, которые связаны с дополнительными ограничениями на пространства $V_\alpha$, $\alpha = \overline{1,p}$.

Будем искать решение $u$ на прямой сумме подпространств, когда для $V$ используется декомпозиция

$$V = \bigoplus_{\alpha=1}^{p} R_\alpha^* V_\alpha.$$

В этом случае для операторов ограничения имеет место соотношение

$$R_\alpha R_\beta^* = \begin{cases} > 0, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad \alpha, \beta = \overline{1,p}. \tag{20}$$

Поэтому для отдельных слагаемых решения в представлении (12) получаем $R_\alpha R_\alpha^* u_\alpha = R_\alpha u$, $\alpha = \overline{1,p}$. Для векторной задачи (15), (16) в случае (20) операторная матрица $\boldsymbol{B}$ является диагональной и положительной, а матрица $\boldsymbol{A}$ та же, что и выше:

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{diag}(R_1 R_1^*, \ldots, R_p R_p^*), \quad \boldsymbol{A} = (R_\alpha A R_\beta^*), \quad \alpha, \beta = \overline{1,p}. \tag{21}$$

Отметим второй подход к аддитивному представлению решения (12), который также приводит к диагональной операторной матрице $\boldsymbol{B}$. Эта новая конструкция предложена в работах [9, 10] для построения схем декомпозиции области для нестационарных задач. Будем считать, что для операторов ограничения справедливо равенство

$$\sum_{\alpha=1}^{p} R_\alpha^* R_\alpha = I. \tag{22}$$

Тем самым в (12) имеем $u_\alpha = R_\alpha u,\ \ \alpha = \overline{1,p}$. Тогда при расщеплении решения (12), (22) в векторной задаче (15), (16) для операторных матриц $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}$ получаем

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{A} = (R_\alpha A R_\beta^*), \quad \alpha, \beta = \overline{1,p}, \tag{23}$$

где $\boldsymbol{I}$ – единичная операторная матрица в $\boldsymbol{V}$.

**3. Аппроксимация по времени.** Мы ориентируемся на схемы расщепления решения, в которых отдельные компоненты $v_\alpha,\ \ \alpha = \overline{1,p}$, вектора $\boldsymbol{v}$ определяются из независимых задач. Благодаря выбору подпространств (20) или (22) эти компоненты (см. (21) и (23)) связываются только операторной матрицей $\boldsymbol{A}$.

Схемы расщепления решения мы можем строить на выделении диагональной части операторной матрицы $\boldsymbol{A}$, тогда приходим к аналогам блочных методов Якоби. Второй вариант базируется на треугольном разложении операторной матрицы $\boldsymbol{A}$ – приходим к аналогам блочных методов Зейделя. Подобные классы аддитивных схем используются, например, при численном решении краевых задач для систем параболических уравнений [6, гл. 10].

Выделим диагональную часть $\boldsymbol{A}_0$ операторной матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}_0 = \operatorname{diag}(R_1 A R_1^*, \ldots, R_p A R_p^*).$$

Для приближённого решения задачи (15), (16) будем использовать трёхслойную схему

$$\boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{y}^{n+1} - 2\boldsymbol{y}^n + \boldsymbol{y}^{n-1}}{\tau^2} + \boldsymbol{A}_0(\sigma\boldsymbol{y}^{n+1} + (1-2\sigma)\boldsymbol{y}^n + \sigma\boldsymbol{y}^{n-1}) + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{y}^n = 0, \quad n = \overline{1, N-1}, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{u}^0, \quad \boldsymbol{y}^1 = \overline{\boldsymbol{u}}^1, \tag{25}$$

с весовым параметром $\sigma = \mathrm{const} > 0$. Второе начальное условие (25) рассчитывается, например, с использованием двухслойной схемы

$$\left(\boldsymbol{I} + \frac{\tau^2}{2}\boldsymbol{A}_0\right)\overline{\boldsymbol{u}}^1 = \boldsymbol{u}^0 + \tau\widetilde{\boldsymbol{u}}^0 + \frac{\tau^2}{2}(\boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u}^0.$$

Для нахождения приближённого решения на новом слое в рассматриваемых нами случаях (21) или (23) имеем систему распадающихся уравнений

$$(\boldsymbol{B} + \sigma\tau^2\boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{w}^{n+1} = \boldsymbol{\varphi}^n,$$

которая однозначно разрешима. Условия устойчивости даются следующим утверждением с учётом того, что $\boldsymbol{A} \geqslant 0$.

**Теорема 1.** *Для трёхслойной явно-неявной схемы (24), (25) при выполнении условий (21) или (23) имеет место равенство (8), в котором*

$$\mathcal{E}^{n+1} = \left(\boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{y}^{n+1} + \boldsymbol{y}^n}{2}, \frac{\boldsymbol{y}^{n+1} + \boldsymbol{y}^n}{2}\right) + \left(\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{y}^{n+1} - \boldsymbol{y}^n}{\tau}, \frac{\boldsymbol{y}^{n+1} - \boldsymbol{y}^n}{\tau}\right), \tag{26}$$

*где* $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{B} + \sigma\tau^2\boldsymbol{A}_0 - \tau^2\boldsymbol{A}/4$.

*При $\sigma \geqslant 0.25p$ справедливо неравенство $\boldsymbol{G} > 0$, которое обеспечивает безусловную устойчивость схемы с выполнением априорной оценки*

$$\left\|\frac{\boldsymbol{y}^{n+1}-\boldsymbol{y}^n}{\tau}\right\|^2_{\boldsymbol{G}} \leqslant \left\|\frac{\overline{\boldsymbol{u}}^1-\boldsymbol{u}^0}{\tau}\right\|^2_{\boldsymbol{G}} + \left\|\frac{\overline{\boldsymbol{u}}^1+\boldsymbol{u}^0}{2}\right\|^2_{\boldsymbol{A}}, \quad n=\overline{1,N-1}. \tag{27}$$

**Доказательство.** Запишем схему (24) в виде

$$\boldsymbol{C}\frac{\boldsymbol{y}^{n+1}-2\boldsymbol{y}^n+\boldsymbol{y}^{n-1}}{\tau^2}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^n=0, \quad n=\overline{1,N-1}, \tag{28}$$

где $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+\sigma\tau^2\boldsymbol{A}_0$. На основании доказанной леммы справедливо равенство (8) при задании $\mathcal{E}^{n+1}$ равенством (26).

Очевидно, что $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{C}-\tau^2\boldsymbol{A}/4$. Поэтому с учётом (19) и неравенства

$$\left(\sum_{\alpha=1}^p a_\alpha\right)^2 \leqslant p\sum_{\alpha=1}^p a_\alpha^2$$

получаем

$$(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=\sum_{\alpha=1}^p((R_\alpha^* v_\alpha)^2,1)_A \geqslant \frac{1}{p}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}).$$

Тем самым $\boldsymbol{G}>0$ при $\sigma \geqslant 0.25p$. Это даёт нам возможность из равенства (8), (26) вывести оценку устойчивости по начальным данным (27). Теорема доказана.

Можно ориентироваться на оценки устойчивости непосредственно для исходной задачи (1), (2). Например, в случае (21) вследствие (18), (19) при $\sigma \geqslant 0.25p$ имеем

$$\left(\boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{y}^{n+1}+\boldsymbol{y}^n}{2},\frac{\boldsymbol{y}^{n+1}+\boldsymbol{y}^n}{2}\right)+\left(\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{y}^{n+1}-\boldsymbol{y}^n}{\tau},\frac{\boldsymbol{y}^{n+1}-\boldsymbol{y}^n}{\tau}\right) \geqslant \left\|\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}\right\|^2+\left\|\frac{y^{n+1}+y^n}{2}\right\|^2_A$$

с учётом того, что

$$y^{n+1}=\sum_{\alpha=1}^p R_\alpha^* y_\alpha^{n+1}, \quad \boldsymbol{y}^{n+1}=\{y_1^{n+1},\ldots,y_p^{n+1}\}.$$

Равенство (8), (26) приводит нас к аналогу оценки (6):

$$\left\|\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}\right\|^2+\left\|\frac{y^{n+1}+y^n}{2}\right\|^2_A \leqslant \left\|\frac{\overline{u}^1-u^0}{\tau}\right\|^2+\left\|\frac{\overline{u}^1+u^0}{2}\right\|^2_A+\left((\boldsymbol{G}-\boldsymbol{B})\frac{\overline{\boldsymbol{u}}^1-\boldsymbol{u}^0}{\tau},\frac{\overline{\boldsymbol{u}}^1-\boldsymbol{u}^0}{\tau}\right), \tag{29}$$

где $n=\overline{1,N-1}$.

Любое расщепление операторов задачи приводит к дополнительным погрешностям при приближённом решении нестационарных задач. Повышения точности схем расщепления для задачи (15), (16) можно достичь использованием треугольного расщепления операторной матрицы $\boldsymbol{A}$. Определим треугольные матрицы

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}R_1AR_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ R_2AR_1^* & \frac{1}{2}R_2AR_2^* & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ R_pAR_1^* & R_pAR_2^* & \cdots & \frac{1}{2}R_pAR_p^* \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}R_1AR_1^* & R_1AR_2^* & \cdots & R_1AR_p^* \\ 0 & \frac{1}{2}R_2AR_2^* & \cdots & R_2AR_p^* \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}R_pRR_p^* \end{pmatrix}.$$

Тогда очевидны равенства

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2, \quad \boldsymbol{A}_1^*=\boldsymbol{A}_2. \tag{30}$$

Расщепления (30) связываются со схемами попеременно-треугольного метода Самарского [11].

При двухкомпонентном расщеплении (30) наибольший интерес представляют аналоги классических схем переменных направлений. Такие аддитивные схемы для эволюционных уравнений второго порядка рассмотрены в [6, гл. 4]. Для приближённого решения задачи (15), (16), (30) будем использовать схему

$$(\boldsymbol{B} + \sigma\tau^2 \boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B} + \sigma\tau^2 \boldsymbol{A}_2)\frac{\boldsymbol{y}^{n+1} - 2\boldsymbol{y}^n + \boldsymbol{y}^{n-1}}{\tau^2} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^n = 0, \quad n = \overline{1, N-1}. \tag{31}$$

Вычислительная реализация (31) обеспечивается последовательным определением компонент решения на новом слое по времени. В плане адаптации в архитектуре параллельных вычислительных систем схема (24) более предпочтительна, так как компоненты решения находятся независимо друг от друга.

**Теорема 2.** *Для трёхслойной явно-неявной схемы (25), (31) при выполнении условий (21) или (23) имеет место равенство (8), (26), в котором*

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C} - \frac{\tau^2}{4}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} + \sigma\tau^2\boldsymbol{A} + \sigma^2\tau^4\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_2.$$

*При* $\sigma \geqslant 0.25$ *справедливы соотношения* $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}^* > 0,$ *что обеспечивает безусловную устойчивость схемы с выполнением априорной оценки (27).*

**Доказательство.** Исследование устойчивости проводится по схеме доказательства теоремы 1. Схема (31) записывается в виде (28) при $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^* \geqslant \boldsymbol{B} + \sigma\tau^2\boldsymbol{A}$. Устойчивость в силу доказанной в работе леммы имеет место при стандартных ограничениях на вес $\sigma \geqslant 0.25$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (соглашение № 14.Y26.31.0013).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference Schemes. New York, 2001.
2. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973.
3. *Hundsdorfer W., Verwer J.* Numerical Solution of Time-Dependent Advection–Diffusion–Reaction Equations. Berlin, 2003.
4. *Вабищевич П.Н.* Явно-неявные схемы для эволюционных уравнений первого порядка // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 910–917.
5. *Marchuk G.I.* Splitting and alternating direction methods // Handbook of Numerical Analysis / Eds. P.G. Ciarlet, J.-L. Lions. V. I. North-Holland, 1990. P. 197–462.
6. *Vabishchevich P.N.* Additive Operator-Difference Schemes: Splitting Schemes. Berlin, 2014.
7. *Efendiev Y., Vabishchevich P.N.* Splitting methods for solution decomposition in nonstationary problems // Appl. Math. and Comput. 2021. V. 397. P. 125785.
8. *Samarskii A.A., Matus P.P., Vabishchevich P.N.* Difference Schemes with Operator Factors. Dordrecht, 2002.
9. *Vabishchevich P.N.* Vector domain decomposition schemes for parabolic equations // Comput. Math. Math. Phys. 2017. V. 57. № 9. P. 1511–1527.
10. *Vabishchevich P.N.* Two classes of vector domain decomposition schemes for time-dependent problems with overlapping subdomains // In: I. Lirkov, S. Margenov Eds. Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2017. Lecture Notes in Computer Science. V. 10665. Springer, 2018. P. 85–92.
11. *Samarskii A.A.* An economical algorithm for the numerical solution of systems of differential and algebraic equations // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1964. V. 4. № 3. P. 263–271.

Институт проблем безопасного развития
атомной энергетики РАН, г. Москва,
Северо-Восточный федеральный университет
им. М.К. Аммосова, г. Якутск

Поступила в редакцию 22.01.2021 г.
После доработки 22.01.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.