ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 7, с. 889–899

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.642.2

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

© 2021 г. Н. С. Габбасов

Исследовано линейное интегро-дифференциальное уравнение с особым дифференциальным оператором в главной части. Для его приближённого решения в пространстве обобщённых функций предложен и обоснован специальный обобщённый вариант метода коллокации.

DOI: 10.31857/S0374064121070037

Объектом исследования в работе является линейное интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) вида

$$Ax \equiv x^{(p)}(t) \prod_{j=1}^{q} (t - t_j)^{m_j} + \int_{-1}^{1} K(t,s) x(s)\, ds = y(t), \tag{1}$$

в котором $t \in I \equiv [-1,1]$, числа $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in \mathbb{N}$ $(j = \overline{1,q})$ и $p \in \mathbb{Z}_+$ фиксированы; K и y – известные непрерывные функции, обладающие определёнными свойствами "гладкости" точечного характера, а x – искомая функция. Очевидно, что задача о нахождении решения уравнения (1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной. Следовательно, возникает важный вопрос о построении основных пространств, обеспечивающих корректность этой задачи. При изучении этого вопроса естественно учитывать то, что при $p = 0$ ИДУ (1) представляет собой интегральное уравнение третьего рода (УТР) (т.е. в этом смысле эти уравнения являются "родственными"). Последнее уравнение встречается в ряде задач теорий переноса нейтронов, упругости, рассеяния частиц (см., например, [1 и библиографию в ней; 2, с. 121–129]), теории уравнений с частными производными смешанного типа [3], а также теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. При этом, как правило, естественными классами решений УТР являются специальные пространства обобщённых функций типа D или V. Под D (соответственно, V) понимается пространство обобщённых функций, построенных при помощи функционала "дельта-функция Дирака" (соответственно, "конечная часть интеграла по Адамару"). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по УТР можно найти в монографии [5, с. 3–11, 168–173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106–114].

ИДУ (1) при $q = 1$, $t_1 = 0$ исследовано в работе [7, с. 25–43], в которой с использованием известных результатов по УТР построена теория Нётера для такого уравнения в классах гладких и обобщённых функций типа D. При этом вопросы фредгольмовости и обратимости оператора A, поиска точного решения ИДУ (1) в пространстве обобщённых функций остались не решёнными. Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях. Поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближённого решения в пространствах обобщённых функций с соответствующим теоретическим обоснованием. Построение таких методов до настоящего времени в литературе не рассматривалось.

В данной работе построена полная теория разрешимости общего ИДУ (1) в некотором пространстве типа D обобщённых функций (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A). Более того, разработан полиномиальный прямой проекционный метод, специально приспособленный к приближённому решению ИДУ (1) в классе обобщённых функций, и дано его обоснование в смысле [8, гл. 1]. Именно, доказана теорема существования и единственности решения соответствующего приближённого уравнения, установлены оценки погрешности этого решения и доказана сходимость последовательности приближённых решений к точному решению в пространстве обобщённых функций. Исследованы также вопросы устойчивости и обусловленности аппроксимирующих уравнений.

1. Пространства основных и обобщённых функций. Пусть $C \equiv C(I)$ – банахово пространство всех непрерывных на I функций с обычной max-нормой и $m \in \mathbb{N}$. Следуя [9], скажем, что функция $f \in C$ принадлежит классу $C\{m; t_0\} \equiv C_{t_0}^{\{m\}}(I)$, если в точке $t_0 \in \in (-1,1)$ существует тейлоровская производная $f^{\{m\}}(t_0)$ порядка m (естественно считаем, что $C\{0; t_0\} \equiv C$).

Далее, пусть $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_q$ – произвольно фиксированные попарно различные точки интервала $(-1,1)$. Каждой точке t_j поставим в соответствие некоторое натуральное число m_j $(j = \overline{1,q})$. Введём векторное пространство

$$C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \equiv C_{\overline{\tau}}^{\{\overline{m}\}}(I) \equiv \bigcap_{j=1}^{q} C\{m_j; t_j\},$$

где $\overline{m} \equiv (m_1, m_2, \ldots, m_q)$ и $\overline{\tau} \equiv (t_1, t_2, \ldots, t_q)$ – конечные наборы соответствующих величин. Построим теперь основное в наших исследованиях пространство

$$Y \equiv \{y \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} : y^{\{i\}}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, p-1}, \quad j = \overline{1,q})\},$$

где $p \in \mathbb{Z}_+$ таково, что $p < \mu,\ \ \mu \equiv \min\{m_1, m_2, \ldots, m_q\}$. Снабдим его нормой

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_C + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=p}^{m_j-1} |y^{\{i\}}(t_j)|, \tag{2}$$

где $T : Y \to C$ – “характеристический” оператор класса Y, определяемый следующим образом:

$$(Ty)(t) \equiv \left[y(t) - \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=p}^{m_j-1} y^{\{i\}}(t_j) H_{ji}(t) \right] (u(t))^{-1} \equiv H(t) \in C,$$

$$u(t) \equiv \prod_{j=1}^{q} (t - t_j)^{m_j}, \quad H(t_j) \equiv \lim_{t \to t_j} H(t) \quad (j = \overline{1,q}),$$

H_{ji} – фундаментальные полиномы Эрмита степени $m-1$ по системе $\{t_j\}$, $m \equiv \sum_{j=1}^{q} m_j$.

Лемма 1. *i) Включение $y \in Y$ равносильно равенству*

$$y(t) = (u \cdot H)(t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=p}^{m_j-1} \alpha_{ji} H_{ji}(t), \tag{3}$$

причём $Ty = H \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точках t_j $(j = \overline{1,q})$, а $y^{\{i\}}(t_j) = = \alpha_{ji} \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{p, m_j - 1},\ \ j = \overline{1,q})$.

ii) Пространство Y по норме (2) полно и вложено в пространство C.

Справедливость леммы 1 легко следует из леммы 1.4.5 [5, с. 23] для класса $C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ и определения пространства Y основных функций.

Критерий компактности множеств в пространстве Y устанавливает

Лемма 2. *Множество $M \subset Y$ относительно компактно в Y тогда и только тогда, когда: i) M ограничено; ii) семейство $T(M)$ непрерывных на I функций равностепенно непрерывно.*

Доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 1.2.2 из [5, с. 15]. Отличие заключается лишь в том, что роль пространства $C\{m;0\}$ и его "характеристического" оператора, фигурирующих в теореме 1.2.2, играют соответственно Y и T.

Обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на I функций и наделим его специальной нормой

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} |z^{(i)}(-1)| \quad (z \in C^{(p)}), \tag{4}$$

где $Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C$. В силу формулы Тейлора (см., например, [10, с. 20]) очевидно, что включение $z \in C^{(p)}$ равносильно равенству

$$z(t) = (Jg)(t) + \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i (t+1)^i, \tag{5}$$

здесь $Dz = g \in C$, $z^{(i)}(-1) = \alpha_i i!$ $(i = \overline{0, p-1})$;

$$Jg \equiv (J_{p-1}g)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^{t} (t-s)^{p-1} g(s)\, ds;$$

при этом $J : C \to C^{(p)}$, $(Jg)^{(i)} = J_{p-i-1}g$ $(i = \overline{0, p-1})$, $DJg = g$.

Из соотношений (5) и (4) легко следует

Лемма 3. *Пространство $C^{(p)}$ с нормой (4) полно и нормально вложено в пространство C.*

Следствие 1. *Обычная норма $\|\cdot\|_{C^{(p)}}$ в $C^{(p)}$ и норма (4) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d \geqslant 1$ такая, что $\|z\|_{(p)} \leqslant \|z\|_{C^{(p)}} \leqslant d\|z\|_{(p)}$ для любой функции $z \in C^{(p)}$, где $\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum_{i=0}^{p} \|z^{(i)}\|_C$.*

Пусть $C_{-1}^{(p)} \equiv C_{-1}^{(p)}(I) \equiv \{z \in C^{(p)} | z^{(i)}(-1) = 0 \ \ (i = \overline{0, p-1})\}$ – банахово пространство гладких функций с нормой $\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C$.

Теперь над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{\overline{m}; \overline{\tau}\}$ обобщённых функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} \gamma_{ji} \delta^{\{i\}}(t-t_j), \tag{6}$$

где $t \in I$, $z \in C_{-1}^{(p)}$, $\gamma_{ji} \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и её "тейлоровские" производные, действующие на пространстве Y основных функций по следующему правилу:

$$(\delta^{\{i\}}, y) \equiv \int_{-1}^{1} \delta^{\{i\}}(t-t_j) y(t)\, dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(t_j) \quad (y \in Y, \quad i = \overline{0, m_j - p - 1}, \quad j = \overline{1, q}). \tag{7}$$

Очевидно, что векторное пространство X по норме

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} |\gamma_{ji}| \tag{8}$$

является банаховым.

2. Фредгольмовость ИДУ (1). Пусть задано ИДУ (1):

$$(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (\mathcal{K}x)(t) = y(t) \quad (t \in I), \tag{9}$$

$$V \equiv UD, \quad Uf \equiv (u \cdot f)(t), \quad \mathcal{K}x \equiv \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)x(s)\,ds,$$

где $y \in Y$, ядро K удовлетворяет следующим условиям:

$$K(\,\cdot\,,s) \in C, \quad K(t,\cdot\,) \in Y, \quad \varphi_{ji}(s) \equiv K_t^{\{i\}}(t_j,s) \in C \quad (i = \overline{p, m_j - 1}, j = \overline{1,q}),$$

$$\psi_{ji}(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t,t_j) \in Y \quad (i = \overline{0, m_j - p - 1}, \quad j = \overline{1,q}); \tag{10}$$

а $x \in X$ − искомая обобщённая функция.

Теорема 1. *При выполнении условий (10) оператор $A : X \to Y$ фредгольмов.*

Доказательство. Предварительно изучим уравнение

$$Vx \equiv x^{(p)}(t) \prod_{j=1}^{q} (t - t_j)^{m_j} = y(t), \tag{11}$$

в котором $p < \mu$, $\mu \equiv min\{m_1, m_2, \ldots, m_q\}$; $y \in Y$. Покажем, что оператор $V : X \to Y$ ограничен. В силу равенств (6) и (11) имеем

$$(Dx)(t) = (Dz)(t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} \gamma_{ji}\delta^{\{i+p\}}(t - t_j) = (Dz)(t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=p}^{m_j-1} \gamma_{j,k-p}\delta^{\{k\}}(t - t_j). \tag{12}$$

Тогда, учитывая свойство

$$(u(t) \cdot \delta^{\{k\}}(t - t_j), \varphi(t)) \equiv (\delta^{\{k\}}, (u\varphi)(t)) \equiv (-1)^k (u\varphi)^{\{k\}}(t_j) = 0$$

$$(k = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1,q}; \quad \varphi \in C\{\overline{m}; \overline{\tau}\}), \tag{13}$$

получаем $Vx \equiv UDx = UDz$, откуда на основании соотношений (2), (3) и (8) следует, что

$$\|Vx\|_Y = \|UDz\|_Y \equiv \|TUDz\|_C = \|Dz\|_C \equiv \|z\|_{(p)} \leqslant \|x\|_X,$$

т.е. $\|V\| \equiv \|V\|_{X \to Y} \leqslant 1$.

Теперь найдём в пространстве $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{\overline{m};\ \overline{\tau}\}$ решение уравнения (11) и индекс оператора V. Из равенств (12) и (13) вытекает, что в пространстве X общее решение однородного уравнения $Vx = 0$ имеет вид

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} \gamma_{ji}\delta^{\{i\}}(t - t_j) \quad (\gamma_{ji} \in \mathbb{R}).$$

Следовательно, $\alpha(V) \equiv \dim\ker V = m - pq$. С другой стороны, неоднородное уравнение (11) разрешимо в пространстве X тогда и только тогда, когда выполнены дополнительные условия $(\delta^{\{i\}}(t - t_j), y) = 0$ $(i = \overline{p, m_j - 1},\ \ j = \overline{1,q})$. При их выполнении общее решение уравнения (11) представляется формулой

$$x(t) = (JTy)(t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} \gamma_{ji}\delta^{\{i\}}(t - t_j) \quad (\gamma_{ji} \in \mathbb{R}).$$

Это означает, что $\beta(V) \equiv \dim\operatorname{coker} V = m - pq$. Таким образом, $\operatorname{ind} V \equiv \alpha(V) - \beta(V) = 0$, т.е. оператор $V : X \to Y$ фредгольмов.

Далее обсудим свойства интегрального оператора $\mathcal{K}$. В силу соотношений (9), (6) и (7) имеем

$$(\mathcal{K}x)(t) = (\mathcal{K}z)(t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} (-1)^i \gamma_{ji}\psi_{ji}(t). \tag{14}$$

Отсюда с учётом условий (10) видим, что $Kx \in Y \quad (x \in X)$. Используя определение (2), следствие 1 и определение (8), последовательно находим, что

$$\|\mathcal{K}x\|_Y \leqslant \|\mathcal{K}z\|_Y + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} |\gamma_{ji}|\|\psi_{ji}\|_Y \leqslant 2dd_0\|x\|_X,$$

где $d_0 \equiv \|T_t\mathcal{K}\|_C + (m - pq) \max\limits_{s\in I; i,j} |\varphi_{ji}(s)|$. Следовательно, оператор $\mathcal{K}$ действует из X в Y ограниченно, причём $\|\mathcal{K}\| \equiv \|\mathcal{K}\|_{X\to Y} \leqslant 2dd_0$.

Пусть $L \equiv \{x\} \subset X$ – произвольное ограниченное множество. Рассуждая аналогично случаю интегральных уравнений третьего рода (см. [5, с. 52, 53]), с использованием леммы 2 несложно показать, что множество $M \equiv \mathcal{K}(L)$ относительно компактно в Y. Другими словами, оператор $\mathcal{K} : X \to Y$ вполне непрерывен. Тогда утверждение теоремы 1 непосредственно следует из того, что возмущение нётерова оператора вполне непрерывным оператором сохраняет нётеровость и не изменяет его индекса.

3. Непрерывная обратимость интегро-дифференциального оператора. Рассмотрим ИДУ (1), в котором ядро K подчинено условиям (10), $y \in Y$, а $x \in X$ – искомая обобщённая функция вида (6). С учётом соотношений (6), (12)–(14) преобразуем уравнение (1) к виду

$$(Az)(t) = y(t) - \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} c_{ji}\psi_{ji}(t), \tag{15}$$

где $c_{ji} \equiv (-1)^i\gamma_{ji} \quad (i = \overline{0, m_j - p - 1}, \ \ j = \overline{1, q})$. Наша задача заключается в нахождении функции $z \in C^{(p)}_{-1}$ и произвольных постоянных c_{ji}.

Лемма 4. *Если ядро K (по s) принадлежит классу C, а ядро K (по t) и функция y принадлежат пространству Y, то ИДУ (1) $(A : C^{(p)}_{-1} \to Y)$ эквивалентно в $C^{(p)}_{-1}$ ИДУ*

$$Bx \equiv (Dx)(t) + \int_{-1}^{1} (T_tK)(t, s)x(s)\,ds = (Ty)(t)$$

и соотношениям

$$\int_{-1}^{1} \varphi_{lk}(s)x(s)\,ds = y^{\{k\}}(t_l) \quad (k = \overline{p, m_l - 1}, \quad l = \overline{1, q}).$$

Доказательство. В силу равенства (3) очевидно, что для любой функции $g \in Y$ имеет место эквивалентность

$$g = 0 \Leftrightarrow Tg = 0, \quad g^{\{k\}}(t_l) = 0 \quad (k = \overline{p, m_l - 1}, \quad l = \overline{1, q}). \tag{16}$$

Тогда, взяв в (16) $g \equiv Ax - y \in Y \quad (x \in C^{(p)}_{-1}, \ \ y \in Y)$, убеждаемся в справедливости утверждения леммы. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что уравнение (15) равносильно ИДУ

$$(Bz)(t) = (Ty)(t) - \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} c_{ji}(T\psi_{ji})(t) \tag{17}$$

в пространстве $C_{-1}^{(p)}$ и соотношениям

$$y^{\{k\}}(t_l) - \int_{-1}^{1} \varphi_{lk}(s)z(s)\,ds - \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} c_{ji}\psi_{ji}^{\{k\}}(t_l) = 0 \quad (k = \overline{p, m_l - 1}, \quad l = \overline{1, q}). \tag{18}$$

Очевидно, что подстановка $z^{(p)} \equiv w(t) \in C$ равносильным образом приводит ИДУ (17) к следующему уравнению Фредгольма второго рода в пространстве C:

$$w(t) + \int_{-1}^{1} G(t, \rho)w(\rho)\,d\rho = (Ty)(t) - \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} c_{ji}(T\psi_{ji})(t), \tag{19}$$

где

$$G(t, \rho) \equiv \frac{1}{(p-1)!} \int_{\rho}^{1} (T_t K)(t, s)(s - \rho)^{p-1}\,ds,$$

причём $G \in C(I^2)$.

Пусть $\lambda = -1$ не является собственным значением уравнения (19) (или ядра G) и R – разрешающий оператор этого уравнения. Тогда функция

$$w^*(t) \equiv (RTy)(t) - \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} c_{ji}(RT\psi_{ji})(t)$$

является единственным непрерывным решением уравнения (19). Следовательно,

$$z^*(t) \equiv (Jw^*)(t) = (JRTy)(t) - \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} c_{ji}(JRT\psi_{ji})(t)$$

– единственное гладкое решение ИДУ (17), которое будет решением и исходного уравнения (15), если в силу (18) постоянные $\{c_{ji}\}$ удовлетворяют квадратной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} c_{ji}(Q\psi_{ji})^{\{k\}}(t_l) = (Qy)^{\{k\}}(t_l) \quad (k = \overline{p, m_l - 1}, \quad l = \overline{1, q}), \tag{20}$$

где оператор $Q \equiv E - KJRT$ отображает Y в Y, а E – единичный оператор в Y.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

a) ядро K удовлетворяет условиям (10), и $y \in Y$;

b) число $\lambda = -1$ не является собственным значением ядра $G(t, \rho)$;

c) определитель СЛАУ (20) отличен от нуля.

Тогда для любой правой части $y \in Y$ ИДУ(1) допускает единственное обобщённое решение $x^* \in X$. Это решение представляется формулой

$$x^*(t) = (JRTy)(t) - \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} c_{ji}^*(JRT\psi_{ji})(t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-p-1} (-1)^i c_{ji}^* \delta^{\{i\}}(t - t_j), \tag{21}$$

где $\{c_{ji}^*\}$ – единственное решение СЛАУ (20).

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 интегро-дифференциальный оператор* $A : X \to Y$, *определённый равенством (1), непрерывно обратим.*

Теперь построим пример, который, во-первых, хорошо иллюстрирует содержание теоремы 2 и, во-вторых, играет полезную роль при оптимизации прямых проекционных методов решения ИДУ вида (1).

Пример 1. Ради упрощения выкладок в ИДУ (1) будем считать $q = 1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv t^m x^{(p)}(t) + \int_{-1}^{1} K(t,s)x(s)\,ds = y(t) \quad (t \in I), \tag{22}$$

в котором $p < m$, $y \in Y \equiv \{y \in C\{m;0\}| : y^{\{i\}}(0) = 0 \;\; (i = \overline{0, p-1})\}$,

$$K(t,s) = K^*(t,s) \equiv \sum_{j=p}^{m-1} (j!(j-p)!)^{-1} t^j s^{j-p},$$

а $x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t)$ – искомая обобщённая функция. В обозначениях теоремы 2 последовательно заключаем, что справедливы импликации:

$$T_t K = 0 \Rightarrow G(t,\rho) \equiv 0 \Rightarrow R = E : C \to C \Rightarrow Qy = y - KJTy \quad (y \in Y);$$

$$\psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t,0) = ((i+p)!)^{-1} t^{i+p} \quad (i = \overline{0, m-p-1}) \Rightarrow T\psi_i = 0 \Rightarrow Q\psi_i = \psi_i \quad (i = \overline{0, m-p-1}).$$

Следовательно, СЛАУ (20) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{m-p-1} c_i \delta_{k,i+p} = (y - KJTy)^{\{k\}}(0) \quad (k = \overline{p, m-1}),$$

где $\delta_{k,i+p}$ – символ Кронекера, откуда получаем, что $c_i^* = (y - KJTy)^{\{i+p\}}(0)$ $(i = \overline{0, m-p-1})$. Тогда в силу (21) имеем

$$x^*(t) = (JTy)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i (y - KJTy)^{\{i+p\}}(0) \delta^{\{i\}}(t). \tag{23}$$

Непосредственная подстановка элемента x^* в уравнение (22) показывает, что ИДУ (22) при $K = K^*$ имеет единственное обобщённое решение (23) для любой правой части $y \in Y$.

4. Обобщённый метод коллокации (ОМК) приближённого решения ИДУ (1). Пусть задано ИДУ (1). Ради сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать $q = 1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (t \in I), \tag{24}$$

$$V \equiv UD, \quad Df \equiv f^{(p)}(t), \quad Ug \equiv t^m g(t), \quad Kx \equiv \int_{-1}^{1} K(t,s)x(s)\,ds,$$

где $p \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, $p < m$; $y \in Y \equiv C\{m,p;0\} \equiv \{y \in C\{m;0\} : y^{\{i\}}(0) = 0 \;\; (i = \overline{0, p-1})\}$, ядро K обладает следующими свойствами:

$$K(\cdot\,, s) \in C, \quad K(t, \cdot) \in Y, \quad \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t,0) \in Y \quad (i = \overline{0, m-p-1}), \tag{25}$$

а $x \in X$ – искомый элемент. В данном случае, согласно определению (6), $X \equiv D^{(p)}_{-1}\{m;0\}$ – пространство обобщённых функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t) \quad (z \in C^{(p)}_{-1}, \quad \gamma_i \in \mathbb{R}).$$

Приближённое решение уравнения (24) будем искать в виде

$$x_n \equiv x_n(t;\{c_j\}) \equiv g_n(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} c_{i+n}\delta^{\{i\}}(t), \tag{26}$$

$$g_n(t) \equiv (Jz_n)(t), \quad z_n(t) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{27}$$

Неизвестные коэффициенты $c_j = c_j^{(n)}$ $(j = \overline{0, n+m-p-1})$ найдём, согласно ОМК, из квадратной СЛАУ $(n+m-p)$-го порядка:

$$(T\rho_n)(\nu_k) = 0 \quad (k = \overline{1,n}), \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{p, m-1}), \tag{28}$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$– невязка приближённого решения, а $\{\nu_k\} \subset I$ – система узлов Чебышёва первого (или второго) рода.

Для вычислительной схемы (24)–(28) справедлива

Теорема 3. *Пусть однородное ИДУ $Ax = 0$ имеет в X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2), а функции $h \equiv T_t K$ (по t), $f_i \equiv T\psi_i$ $(i = \overline{0, m-p-1})$ и Ty принадлежат классу Дини–Липшица. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant n_0)$ СЛАУ (28) обладает единственным решением $\{c_j^*\}$ и последовательность приближённых решений $x_n^* \equiv x_n(t;\{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ по норме пространства X со скоростью*

$$\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\| = O\biggl\{\biggl[E^t_{n-1}(h) + \sum_{i=0}^{m-p-1} E_{n-1}(f_i) + E_{n-1}(Ty)\biggr]\ln n\biggr\}, \tag{29}$$

где $E_l(f)$– наилучшее равномерное приближение функции $f \in C$ алгебраическими полиномами степени не выше l, а через $E^t_l(\cdot)$ обозначен функционал $E_l(\cdot)$, применённый по переменной t.

Доказательство. Очевидно, что ИДУ (24) представляется в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y \quad (x \in X \equiv D^{(p)}_{-1}\{m;0\}, \quad y \in Y \equiv C\{m,p;0\}), \tag{30}$$

в котором оператор $A : X \to Y$ непрерывно обратим.

Систему (26)–(28) требуется записать также в операторной форме. С этой целью построим соответствующие конечномерные подпространства. Именно, через $X_n \subset X$ обозначим $(n+m-p)$-мерное подпространство элементов вида (26), а за $Y_n \subset Y$ примем класс $\operatorname{span}\{t^i\}_p^{n+m-1}$. Далее введём линейный оператор $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+m-p} : Y \to Y_n$ согласно правилу

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m-p}(y;t) \equiv (UL_nTy)(t) + \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0)\frac{t^i}{i!}, \tag{31}$$

где $L_n : C \to \Pi_{n-1} \equiv \operatorname{span}\{t^i\}_0^{n-1}$ представляет собой интерполяционный оператор Лагранжа по системе узлов $\{\nu_k\}_1^n$.

Покажем теперь, что система (26)–(28) равносильна линейному уравнению

$$A_n x_n \equiv Vx_n + \Gamma_n K x_n = \Gamma_n y \quad (x_n \in X_n, \quad \Gamma_n y \in Y_n). \tag{32}$$

Пусть $x_n^* \equiv x_n(t;\{c_j^*\})$ – решение уравнения (32), т.е. $Vx_n^* + \Gamma_n \eta_n^* = 0$ $(\eta_n^* \equiv Kx_n^* - y)$. В силу равенств (26), (27) и (31) последнее означает, что

$$(U(z_n^* + L_n T\eta_n^*))(t) + \sum_{i=p}^{m-1} (\eta_n^*)^{\{i\}}(0)\frac{t^i}{i!} \equiv 0. \tag{33}$$

На основании равенства (3) при $q=1$, $t_1=0$ с учётом того, что $L_n^2 = L_n$, очевидна эквивалентность тождества (33) системе

$$(L_n(z_n^* + T\eta_n^*))(t) \equiv 0, \quad (\eta_n^*)^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{p, m-1}). \tag{34}$$

Далее, согласно структуре уравнения (30) и равенствам (26), (27) имеем

$$(\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = (\eta_n^*)^{\{i\}}(0) \quad (i = \overline{p, m-1}, \quad \rho_n^* \equiv Ax_n^* - y)$$

и

$$T\rho_n^* = T(Vx_n^* + \eta_n^*) = z_n^* + T\eta_n^*.$$

Поэтому в системе (34) тривиальность интерполяционного полинома означает, что

$$(T\rho_n^*)(\nu_k) = (z_n^* + T\eta_n^*)(\nu_k) = 0 \quad (k = \overline{1, n}).$$

Следовательно, система (34) принимает вид

$$(T\rho_n^*)(\nu_k) = 0 \quad (k = \overline{1, n}), \quad (\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{p, m-1}).$$

Итак, СЛАУ (28) имеет решение $\{c_j^*\}_0^{n+m-p-1}$, т.е. решение уравнения (32) является решением системы (26)–(28).

Для получения обратного утверждения достаточно провести те же рассуждения в обратном порядке.

Таким образом, для доказательства теоремы 3 достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнений (32). В этих целях нам понадобится аппроксимативное свойство оператора Γ_n, которое содержит

Лемма 5. *Для любой функции* $y \in Y$ *справедлива оценка*

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \leqslant d_1 E_{n-1}(Ty)\ln n \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{35}$$

(здесь и далее d_i $(i = \overline{1, 2})$ *– некоторые константы, значения которых не зависят от числа* n*).*

Справедливость леммы 5 легко следует из представления (3) (при $q=1$, $t_1=0$), определений (31), (2) и оценки (см., например, [8, с. 107]) $\|f - L_n f\|_C \leqslant d_1 E_{n-1}(f)\ln n$ $(f \in C)$.

Рассмотрим теперь вопрос о близости операторов A и A_n на подпространстве X_n. Используя уравнения (24), (32) и оценку (35), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n Kx_n\|_Y \leqslant d_1 E_{n-1}(TKx_n)\ln n. \tag{36}$$

В силу равенств (14) и (26) имеем

$$(Kx_n)(t) = (Kg_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n}\psi_i(t).$$

Следовательно,

$$TKx_n = \int_{-1}^{1} h(t,s)g_n(s)\,ds + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n} f_i(t). \tag{37}$$

Для полиномиального приближения функции $TKx_n \in C$ построим следующий элемент:

$$(P_{n-1}x_n)(t) \equiv \int_{-1}^{1} h_{n-1}^t(t,s)g_n(s)\,ds + \sum_{i=0}^{m-p-1}(-1)^i c_{i+n}f_{n-1}^i(t), \tag{38}$$

где $h_{n-1}^t(t,s)$ и $f_{n-1}^i(t)$ – полиномы степени $n-1$ наилучшего равномерного приближения для $h(t,s)$ (по t) и $f_i(t)$ соответственно. Из вида функции (38) следует, что $P_{n-1}x_n \in \Pi_{n-1}$.

На основании выражений (37) и (38), леммы 3 и определения (8) последовательно выводим промежуточную оценку

$$E_{n-1}(TKx_n) \leqslant \|TKx_n - P_{n-1}x_n\|_C \equiv$$
$$\equiv \max_{t\in I}\left|\int_{-1}^{1}(h-h_{n-1}^t)(t,s)g_n(s)\,ds + \sum_i(-1)^i c_{i+n}(f_i - f_{n-1}^i)(t)\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\|g_n\|_C E_{n-1}^t(h) + \sum_i |c_{i+n}|E_{n-1}(f_i) \leqslant 2\|g_n\|_{(p)}E_{n-1}^t(h) + \|x_n\|_X\sum_i E_{n-1}(f_i) \leqslant$$
$$\leqslant 2\|x_n\|_X E_{n-1}^t(h) + 2\|x_n\|_X\sum_i E_{n-1}(f_i) = 2\left(E_{n-1}^t(h) + \sum_i E_{n-1}(f_i)\right)\|x_n\|. \tag{39}$$

Из неравенств (36) и (39) следует искомая оценка близости операторов A и A_n:

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n\to Y} \leqslant d_2\left(E_{n-1}^t(h) + \sum_i E_{n-1}(f_i)\right)\ln n. \tag{40}$$

Обозначим пространство

$$H_\alpha^r(S) \equiv \{f \in C^{(r)}(I) : \omega(f^{(r)};\Delta) \leqslant S\Delta^\alpha, \quad S \equiv \mathrm{const} > 0\},$$

где $\omega(f;\Delta)$ – модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом Δ $(0 < \Delta \leqslant 2)$.

На основании оценок (40) и (35) из теоремы 7 [8, с. 19] вытекает утверждение теоремы 3 с оценкой погрешности (29).

Следствие 3. *Если функции h (по t), f_i и Ty принадлежат пространству $H_\alpha^r(S)$, то в условиях теоремы 3 справедлива оценка $\Delta x_n^* = O(n^{-r-\alpha}\ln n)$ $(r+1 \in \mathbb{N},\ \alpha \in (0,1])$.*

5. Заключительные замечания.

1. В силу определения нормы в пространстве $D_{-1}^{(p)}\{m;0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности (x_n^*) к $x^* = A^{-1}y$ в метрике $D_{-1}^{(p)}\{m;0\}$ следует обычная сходимость в пространстве обобщённых функций, т.е. слабая сходимость.

2. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко вытекает из основной теоремы 3, а именно: если исходные данные уравнения (24) принадлежат классу H_α^r $(0 < \alpha \leqslant 1,\ r = 0,1,2,\ldots)$, то в условиях теоремы 3 справедлива оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(n^{-r-\alpha}\ln n)$.

3. При $p = 0$ исследуемое ИДУ (24) является интегральным уравнением третьего рода с оператором $A : D\{m;0\} \to C\{m;0\}$, а прямой проекционный метод (26)–(28) – специальным для уравнения третьего рода вариантом ОМК. Следовательно, теорема 3 содержит в себе известные результаты [5, с. 105, 106] по обоснованию специального варианта ОМК для решения уравнений третьего рода в классе $D\{m;0\}$ обобщённых функций.

4. Так как в условиях теоремы 3 аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством вида $\|A_n^{-1}\| = O(1)$ $(A_n^{-1} : Y_n \to X_n,\ n \geqslant n_1)$, то очевидно [8, с. 23, 24], что предложенный в данной работе прямой метод для ИДУ (24) устойчив относительно малых возмущений исходных данных. Последнее позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперёд заданной степенью точности. Более того, если ИДУ (24) хорошо обусловлено, то хорошо обусловленной является также СЛАУ (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bart G.R., Warnock R.L.* Linear integral equations of the third-kind // SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
2. *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М., 1972.
3. *Бжихатлов Х.Г.* Об одной краевой задаче со смещением // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.
4. *Расламбеков С.Н.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. 1983. № 10. С. 51–56.
5. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщённых функций. Казань, 2006.
6. *Замалиев Р.Р.* О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 2012.
7. *Абдурахман.* Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 2003.
8. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань, 1980.
9. *Прессдорф З.* Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // Мат. исследования. 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
10. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М., 1988.

Набережночелнинский институт
Казанского (Приволжского) федерального университета

Поступила в редакцию 15.01.2021 г.
После доработки 15.01.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.