ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 7, с. 900–906

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.642+517.956.3

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧЕ

© 2021 г. С. В. Гаврилов, А. М. Денисов

Рассматривается обратная задача для линейной системы уравнений в частных производных. Обратная задача состоит в определении двух неизвестных коэффициентов системы по дополнительной информации об одной из компонент решения. Обратная задача сводится к нелинейному операторному уравнению для одного из неизвестных коэффициентов. Для численного решения этого операторного уравнения применяются метод последовательных приближений и метод Ньютона. Приводятся результаты расчётов, иллюстрирующие сходимость численных методов решения обратной задачи.

DOI: 10.31857/S0374064121070049

1. Введение. Рассмотрим задачу определения функций $u(x,t)$ и $a(x,t)$ таких, что

$$u_x + a_t = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.1}$$

$$a_t = \gamma(t)(\varphi(t)u - a), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.3}$$

$$a(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{1.4}$$

Эта задача представляет собой математическую модель процесса динамики сорбции [1, с. 174; 2, с. 6] в предположении, что свойства поглощающего вещества меняются со временем.

В работе [3] изучены вопросы существования и единственности решения следующей обратной задачи.

Пусть функции $\mu(t)$ и $\psi(x)$ заданы, а функции $\gamma(t)$ и $\varphi(t)$ неизвестны. Требуется определить $\gamma(t)$, $\varphi(t)$, $u(x,t)$ и $a(x,t)$, если задана следующая дополнительная информация об одной из компонент решения задачи (1.1)–(1.4):

$$u(l,t) = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.5}$$

$$u_x(l,t) = p(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.6}$$

Будем предполагать, что для известных функций $\mu(t)$, $\psi(x)$, $g(t)$ и $p(t)$ выполняются

Условия А. Функции $\mu(t)$, $\psi(x)$, $g(t)$ и $p(t)$ таковы, что: $\mu, g, p \in C[0,T]$; $\psi \in C[0,l]$; $\mu(t) > 0$, $g(t) > 0$, $p(t) < 0$ для $0 \leqslant t \leqslant T$; $\psi(x) \geqslant 0$ для $0 \leqslant x \leqslant l$, $\psi(l) = 0$, $\psi(x)$ не равна нулю тождественно.

Дадим определение решения обратной задачи. Пусть $t_0 \in (0,T]$. Введём прямоугольник $Q_{t_0} = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$.

Определение. Четвёрка функций $(\gamma(t),\ \varphi(t),\ u(x,t),\ a(x,t))$ называется *решением обратной задачи* при $t \in [0,t_0]$, если $\gamma, \varphi \in C[0,t_0]$, $u, u_x, a, a_t \in C(Q_{t_0})$, $\gamma(t) > 0$, $\varphi(t) > 0$ для $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $u(x,t) > 0$, $a(x,t) \geqslant 0$ для $(x,t) \in Q_{t_0}$, $\gamma(t)$, $\varphi(t)$, $u(x,t)$, $a(x,t)$ удовлетворяют уравнениям (1.1), (1.2) и условиям (1.3)–(1.6) в Q_{t_0}.

Приведём некоторые результаты работы [3], которые будут использованы в дальнейшем.

Для функции $u(x,t)$ при заданной функции $\gamma(t)$ рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x,t) = \mu(t)\exp\{-R(t;\gamma)x\} + \gamma(t)\exp\biggl\{-\int\limits_0^t \gamma(\theta)\,d\theta\biggr\}\int\limits_0^x \exp\{-R(t;\gamma)(x-s)\}\psi(s)\,ds +$$

$$+\gamma(t)\int\limits_0^x\int\limits_0^t \exp\biggl\{-R(t;\gamma)(x-s) - \int\limits_\tau^t \gamma(\theta)\,d\theta\biggr\}R(\tau;\gamma)u(s,\tau)\,d\tau\,ds, \quad (x,t)\in Q_{t_0}, \tag{1.7}$$

где

$$R(t;\gamma) = -\biggl[p(t) + \gamma(t)\int\limits_0^t p(\tau)\,d\tau\biggr](g(t))^{-1}.$$

При выполнении условий A решение интегрального уравнения (1.7) существует и единственно. Чтобы подчеркнуть зависимость этого решения от функции $\gamma(t)$, будем обозначать его через $u(x,t;\gamma)$.

Определим оператор

$$(A\gamma)(t) = \biggl[g(t) - \mu(t)\exp\{-R(t;\gamma)l\} - \gamma(t)\int\limits_0^l\int\limits_0^t H(l,s,t,\tau;\gamma)R(\tau;\gamma)u(s,\tau;\gamma)\,d\tau\,ds\biggr]\times$$

$$\times\biggl(\int\limits_0^l H(l,s,t,0;\gamma)\psi(s)\,ds\biggr)^{-1}, \quad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{1.8}$$

где

$$H(x,s,t,\tau;\gamma) = \exp\biggl\{-R(t;\gamma)(x-s) - \int\limits_\tau^t \gamma(\theta)\,d\theta\biggr\}.$$

В работе [3] показано, что решение обратной задачи сводится к решению нелинейного операторного уравнения

$$\gamma(t) = (A\gamma)(t), \quad 0\leqslant t\leqslant t_0. \tag{1.9}$$

Данная статья посвящена численным методам решения уравнения (1.9) и сформулированной обратной задачи. Для решения нелинейного операторного уравнения (1.9) используются два итерационных метода: метод последовательных приближений и метод Ньютона. Итерационным методам решения операторных уравнений, к которым сводятся обратные задачи, посвящено достаточно много работ (см., например, [4–11]). Большое их число обусловлено особенностями и спецификой каждой конкретной обратной задачи.

Рассмотрим метод последовательных приближений для решения операторного уравнения (1.9).

Предположим, что выполнено неравенство

$$g(0) - \mu(0)\exp\{(p(0)/g(0))l\} > 0. \tag{1.10}$$

Определим положительную постоянную

$$\gamma_0 = (g(0) - \mu(0)\exp\{(p(0)/g(0))l\})\biggl(\int\limits_0^l \exp\{(p(0)/g(0))(l-s)\}\psi(s)\,ds\biggr)^{-1}.$$

Введём множество функций

$$\Gamma_0 = \{\gamma(t) : \gamma\in C[0,t_0], \ \ \gamma_0/2\leqslant\gamma(t)\leqslant 3\gamma_0/2, \ \ 0\leqslant t\leqslant t_0\}.$$

Рассмотрим последовательность функций $\gamma_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, определяемую рекуррентно посредством метода последовательных приближений для решения уравнения (1.9):

$$\gamma_0(t) \in \Gamma_0, \quad \gamma_{n+1}(t) = (A\gamma_n)(t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.11}$$

Из результатов работы [3] следует утверждение о сходимости метода последовательных приближений.

Теорема 1. *Пусть для функций $\mu(t)$, $\psi(x)$, $g(t)$ и $p(t)$ выполнены условия A и неравенство (1.10). Тогда найдётся $t_0 \in (0, T]$ такое, что для любой функции $\gamma_0(t) \in \Gamma_0$ последовательность функций $\gamma_n(t)$ принадлежит множеству Γ_0 и при $n \to \infty$ равномерно сходится к непрерывной функции $\bar{\gamma}(t)$, являющейся решением уравнения (1.9).*

2. Метод Ньютона. Рассмотрим вопрос о применении метода Ньютона для численного решения исследуемой обратной задачи. Как уже отмечалось, для этого достаточно применить метод Ньютона для решения нелинейного операторного уравнения (1.9).

Для построения метода Ньютона нужно знать производную оператора, определяемого формулой (1.8). Вначале рассмотрим вопрос о дифференцируемости по параметру решения интегрального уравнения (1.7).

Пусть функции $\gamma(t)$, $\gamma_\Delta(t)$ и число ξ таковы, что функции $\gamma(t)$ и $\gamma(t) + \xi\gamma_\Delta(t)$ положительны и непрерывны на отрезке $[0, t_0]$ для всех $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Лемма. *Если выполнены условия A, то у решения $u(x, t; \gamma + \xi\gamma_\Delta)$ уравнения (1.7) существует частная производная $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \xi}(x, t; \gamma + \xi\gamma_\Delta)\right|_{\xi=0}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v(x, t; \gamma, \gamma_\Delta, \xi) = \frac{u(x, t; \gamma + \xi\gamma_\Delta) - u(x, t; \gamma)}{\xi}.$$

Так как функции $u(x, t; \gamma + \xi\gamma_\Delta)$ и $u(x, t; \gamma)$ являются решением уравнения (1.7) для $\gamma(t) + \xi\gamma_\Delta(t)$ и $\gamma(t)$ соответственно, то $v(x, t; \gamma, \gamma_\Delta, \xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} v(x, t; \gamma, \gamma_\Delta, \xi) = {} & \frac{F_1(x, t; \gamma, \gamma_\Delta, \xi) - F_1(x, t; \gamma, 0, 0)}{\xi} + \\ & + \int_0^x \int_0^t \frac{F_2(x, t, s, \tau; \gamma, \gamma_\Delta, \xi) - F_2(x, t, s, \tau; \gamma, 0, 0)}{\xi} u(s, \tau; \gamma + \xi\gamma_\Delta)\, d\tau\, ds + \\ & + \int_0^x \int_0^t F_2(x, t, s, \tau; \gamma, 0, 0) v(s, \tau; \gamma, \gamma_\Delta, \xi)\, d\tau\, ds, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$F_1(x, t; \gamma, \gamma_\Delta, \xi) = \mu(t) \exp\{-R(t; \gamma + \xi\gamma_\Delta)x\} + (\gamma(t) + \xi\gamma_\Delta(t)) \int_0^x H(x, s, t, 0; \gamma + \xi\gamma_\Delta)\psi(s)\, ds,$$

а $F_2(x, t, s, \tau; \gamma, \gamma_\Delta, \xi) = (\gamma(t) + \xi\gamma_\Delta(t))H(x, s, t, \tau; \gamma + \xi\gamma_\Delta)R(\tau; \gamma + \xi\gamma_\Delta)$. Переходя к пределу при $\xi \to 0$, получаем, что

$$\lim_{\xi \to 0} [F_1(x, t; \gamma, \gamma_\Delta, \xi) - F_1(x, t; \gamma, 0, 0)]/\xi = F_3(x, t; \gamma, \gamma_\Delta), \tag{2.2}$$

$$\lim_{\xi \to 0} [F_2(x, t, s, \tau; \gamma, \gamma_\Delta, \xi) - F_2(x, t, s, \tau; \gamma, 0, 0)]/\xi = F_4(x, t, s, \tau; \gamma, \gamma_\Delta), \tag{2.3}$$

где

$$F_3(x,t;\gamma,\gamma_\Delta)=\mu(t)\exp\{-R(t;\gamma)x\}\frac{1}{g(t)}\int\limits_0^t p(\theta)\,d\theta x\gamma_\Delta(t)+\gamma_\Delta(t)\int\limits_0^x H(x,s,t,0;\gamma)\psi(s)\,ds+$$

$$+\gamma(t)\int\limits_0^x H(x,s,t,0;\gamma)\bigg(\frac{1}{g(t)}\int\limits_0^t p(\theta)\,d\theta(x-s)\gamma_\Delta(t)-\int\limits_0^t\gamma_\Delta(\theta)\,d\theta\bigg)\psi(s)\,ds,$$

а

$$F_4(x,t,s,\tau;\gamma,\gamma_\Delta)=\gamma_\Delta(t)H(x,s,t,\tau;\gamma)R(\tau;\gamma)+$$

$$+\gamma(t)H(x,s,t,\tau;\gamma)\bigg(\frac{1}{g(t)}\int\limits_0^t p(\theta)\,d\theta(x-s)\gamma_\Delta(t)-\int\limits_\tau^t\gamma_\Delta(\theta)\,d\theta\bigg)R(\tau;\gamma)-$$

$$-\gamma(t)H(x,s,t,\tau;\gamma)\frac{1}{g(\tau)}\int\limits_0^\tau p(\theta)\,d\theta\gamma_\Delta(\tau).$$

Уравнение (2.1) представляет собой интегральное уравнение Вольтерры второго рода для функции $v(x,t;\gamma,\gamma_\Delta,\xi)$. Разрешив его относительно $v(x,t;\gamma,\gamma_\Delta,\xi)$, перейдя к пределу при $\xi\to 0$ и использовав формулы (2.2), (2.3), получим, что производная $\partial u(x,t;\gamma+\xi\gamma_\Delta)/\partial\xi$ существует при $\xi=0$. Обозначим её $w(x,t;\gamma,\gamma_\Delta)$. Из уравнения (2.1) следует, что $w(x,t;\gamma,\gamma_\Delta)$ является решением интегрального уравнения

$$w(x,t;\gamma,\gamma_\Delta)=F_3(x,t;\gamma,\gamma_\Delta)+\int\limits_0^x\int\limits_0^t F_4(x,t,s,\tau;\gamma,\gamma_\Delta)u(s,\tau;\gamma)\,d\tau\,ds+$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^t F_2(x,t,s,\tau;\gamma,0,0)w(s,\tau;\gamma,\gamma_\Delta)\,d\tau\,ds,\quad (x,t)\in Q_{t_0}.\qquad(2.4)$$

Лемма доказана.

Рассмотрим вопрос о дифференцируемости по Гато оператора A, определяемого равенством (1.8). Из результатов [3] следует, что существует такое $t_0\in(0,T]$, что оператор A отображает множество Γ_0 в себя. Далее будем предполагать что число t_0 удовлетворяет этому условию.

Введём множество

$$\Gamma_{00}=\{\gamma(t):\gamma\in C[0,t_0],\quad \gamma_0/2<\gamma(t)<3\gamma_0/2,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0\}.$$

Теорема 2. *Если выполнены условия A и неравенство (1.10), то для любой функции* $\gamma\in\Gamma_{00}$ *оператор* A *дифференцируем по Гато в* Γ_{00}.

Доказательство. Пусть $\gamma(t)$ – произвольная функция из Γ_{00}, а функция $\gamma_\Delta(t)$ и число ξ таковы, что функция $\gamma(t)+\xi\gamma_\Delta(t)$ также принадлежит множеству Γ_{00}. Покажем, что при $\xi\to 0$ функции $((A(\gamma+\xi\gamma_\Delta))(t)-(A\gamma)(t))/\xi$ равномерно сходятся на отрезке $[0,t_0]$.

Рассмотрим функции

$$\frac{1}{\xi}\bigg[\bigg(\int\limits_0^l H(l,s,t,0;\gamma+\xi\gamma_\Delta)\psi(s)\,ds\bigg)^{-1}-\bigg(\int\limits_0^l H(l,s,t,0;\gamma)\psi(s)\,ds\bigg)^{-1}\bigg].$$

При $\xi \to 0$ они равномерно на отрезке $[0, t_0]$ сходятся к функции

$$F_5(t;\gamma,\gamma_\Delta) = -\Big(\int\limits_0^l H(l,s,t,0;\gamma)\psi(s)\,ds\Big)^{-2} \times$$

$$\times \int\limits_0^l H(l,s,t,0;\gamma)\Big[\frac{1}{g(t)}\int\limits_0^t p(\theta)\,d\theta(l-s)\gamma_\Delta(t) - \int\limits_0^t \gamma_\Delta(\theta)\,d\theta\Big]\psi(s)\,ds. \tag{2.5}$$

Из леммы следует, что при $\xi \to 0$ функции

$$\gamma(t)\int\limits_0^l\int\limits_0^t H(l,s,t,\tau;\gamma)R(\tau;\gamma)\frac{u(s,\tau;\gamma+\xi\gamma_\Delta)-u(s,\tau;\gamma)}{\xi}\,d\tau\,ds$$

равномерно на отрезке $[0, t_0]$ сходятся к функции

$$\gamma(t)\int\limits_0^l\int\limits_0^t H(l,s,t,\tau;\gamma)R(\tau;\gamma)w(s,\tau;\gamma,\gamma_\Delta)\,d\tau\,ds. \tag{2.6}$$

Из формул (2.3), (2.5) и (2.6) вытекает, что

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{(A(\gamma+\xi\gamma_\Delta))(t)-(A\gamma)(t)}{\xi} = \Big(\int\limits_0^l H(l,s,t,0;\gamma)\psi(s)\,ds\Big)^{-1} \times$$

$$\times\Big[-\frac{\mu(t)}{g(t)}\int\limits_0^t p(\theta)\,d\theta\exp\{-R(t;\gamma)l\}l\gamma_\Delta(t) - \int\limits_0^l\int\limits_0^t F_4(l,t,s,\tau;\gamma,\gamma_\Delta)u(s,\tau;\gamma)\,d\tau\,ds\Big] -$$

$$-\Big(\gamma(t)\int\limits_0^l\int\limits_0^t H(l,s,t,\tau;\gamma)R(\tau;\gamma)w(s,\tau;\gamma,\gamma_\Delta)\,d\tau\,ds\Big)\Big(\int\limits_0^l H(l,s,t,0;\gamma)\psi(s)\,ds\Big)^{-1} +$$

$$+\Big[g(t)-\mu(t)\exp\{-R(t;\gamma)l\} - \gamma(t)\int\limits_0^l\int\limits_0^t H(l,s,t,\tau;\gamma)R(\tau;\gamma)u(s,\tau;\gamma)\,d\tau\,ds\Big]F_5(t;\gamma,\gamma_\Delta), \tag{2.7}$$

где функция $w(x,t;\gamma,\gamma_\Delta)$ определяется из уравнения (2.4). Таким образом, оператор A дифференцируем по Гато на множестве Γ_{00} и его производная $A'[\gamma]\gamma_\Delta$ определяется правой частью равенства (2.7). Теорема доказана.

Итерационный процесс, соответствующий методу Ньютона [12, с. 669], определяется следующим образом. Задаётся функция $\gamma_0(t)$. Последующие функции $\gamma_{n+1}(t)$, $n = 0, 1, \ldots,$ определяются по формуле $\gamma_{n+1}(t) = \gamma_n(t) + \gamma_{\Delta n}(t)$, где $\gamma_{\Delta n}(t)$ – решение линейного интегрального уравнения

$$\gamma_{\Delta n} - A'[\gamma_n]\gamma_{\Delta n} = -\gamma_n + A\gamma_n. \tag{2.8}$$

3. Вычислительные эксперименты. Приведём результаты некоторых вычислительных экспериментов, в которых для решения исследуемой обратной задачи использовались метод последовательных приближений (1.11) и метод Ньютона (2.8).

Общая схема вычислительных экспериментов была следующей. На отрезке $[0, T]$ задавались функции $\mu(t)$, $\gamma(t)$ и $\varphi(t)$, а на отрезке $[0, l]$ – функция $\psi(x)$. С этими функциями решалась задача (1.1)–(1.4) и определялись функции $g(t) = u(l,t)$ и $p(t) = u_x(l,t)$. Затем с функциями $\mu(t)$, $g(t)$, $p(t)$ и $\psi(x)$ итерационными методами (1.11) и (2.8) решалось операторное уравнение (1.9) и находилась приближённая функция $\tilde\gamma(t)$. Для определения приближённой функции $\tilde\varphi(t)$ использовалась полученная в [3] формула

$$\tilde\varphi(t) = -\left[p(t) + \tilde\gamma(t)\int\limits_0^t p(\tau)\,d\tau\right](g(t)\tilde\gamma(t))^{-1}. \tag{3.1}$$

При приближённом решении операторного уравнения (1.9) для обоих итерационных методов использовалось одинаковое начальное приближение $\gamma_0(t) = \gamma_0$ и один и тот же критерий останова

$$\|\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)\|_{C[0,T]}(\|\gamma_n(t)\|_{C[0,T]})^{-1} \leqslant \delta.$$

В первом вычислительном эксперименте $T = 0.5$, $l = 1$ и

$$\mu(t) = 1 + t, \quad \psi(x) = 2 - 2x, \quad \gamma(t) = 3 + \sin(2\pi t), \quad \varphi(t) = 0.5 + 0.1\cos(2\pi t).$$

На рис. 1 приведены функция $\gamma(t) = 3 + \sin(2\pi t)$, первая $\gamma_1^I(t)$ и вторая $\gamma_2^I(t)$ итерации метода последовательных приближений, а также первая $\gamma_1^N(t)$ и вторая $\gamma_2^N(t)$ итерации метода Ньютона. При величине $\delta = 0.001$ метод последовательных приближений остановился на 9-м шаге итераций, а метод Ньютона – на 6-м шаге итераций. Полученные при этом приближённые решения $\tilde\gamma^I(t) = \gamma_9^I(t)$ и $\tilde\gamma^N(t) = \gamma_6^N(t)$, в рамках масштаба рис. 1, визуально совпадают с точным решением $\gamma(t) = 3 + \sin(2\pi t)$ и поэтому не показаны.

На рис. 2 изображены функция $\varphi(t) = 0.5 + 0.1\cos(2\pi t)$ и функции $\varphi_1^I(t)$, $\varphi_2^I(t)$, $\varphi_1^N(t)$, $\varphi_2^N(t)$, полученные при подстановке функций $\gamma_1^I(t)$, $\gamma_2^I(t)$, $\gamma_1^N(t)$, $\gamma_2^N(t)$ в формулу (3.1) соответственно. Найденные аналогично приближённые решения $\tilde\varphi^I(t) = \varphi_9^I(t)$ и $\tilde\varphi^N(t) = \varphi_6^N(t)$ визуально совпадают с точным решением $\varphi(t) = 0.5 + 0.1\cos(2\pi t)$ и поэтому не показаны.

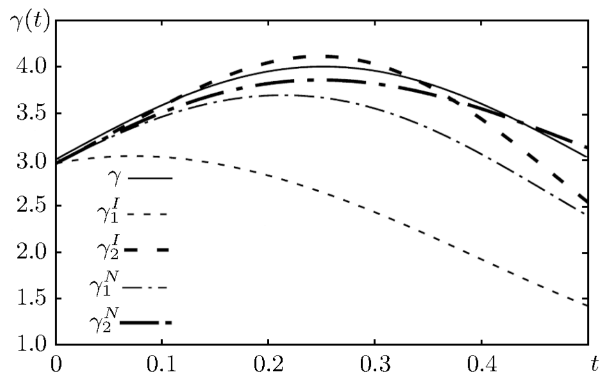

Рис. 1. Результаты первого вычислительного эксперимента: точная функция $\gamma(t)$ и функции, определённые на первых двух итерациях.

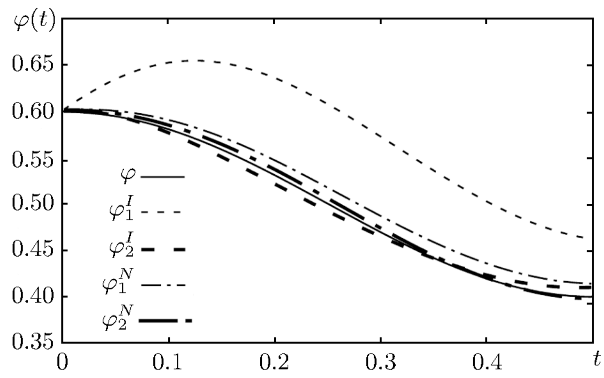

Рис. 2. Результаты первого вычислительного эксперимента: точная функция $\varphi(t)$ и функции, определённые на первых двух итерациях.

В втором вычислительном эксперименте $T = 0.5$, $l = 1$ и

$$\mu(t) = 1 + t, \quad \psi(x) = 2 - 2x, \quad \gamma(t) = 1.5 - 0.5\sin(\pi t), \quad \varphi(t) = 2 + 0.5\sin(2\pi t).$$

Величина δ выбиралась равной 0.001. Аналогично рис. 1 на рис. 3 показаны значения точной функции $\gamma(t)$, а также функции, полученные на первых двух итерациях для обоих методов. Критерий сходимости был удовлетворён на 7-м шаге метода последовательных приближений и на 9-м шаге метода Ньютона. В рамках масштаба рис. 3 приближённые решения, найденные на заключительной итерации обоих методов $\tilde\gamma^I(t) = \gamma_7^I(t)$ и $\tilde\gamma^N(t) = \gamma_9^N(t)$, визуально совпадают с точным решением.

На рис. 4 изображена функция $\varphi(t) = 2 + 0.5\sin(2\pi t)$, а также соответствующие первым двум итерациям функции $\varphi_1^I(t)$, $\varphi_2^I(t)$, $\varphi_1^N(t)$, $\varphi_2^N(t)$. Функции $\tilde{\varphi}^I(t) = \varphi_7^I(t)$ и $\tilde{\varphi}^N(t) = \varphi_9^N(t)$, найденные по формуле (3.1), совпадают на рисунке с $\varphi(t) = 2 + 0.5\sin(2\pi t)$.

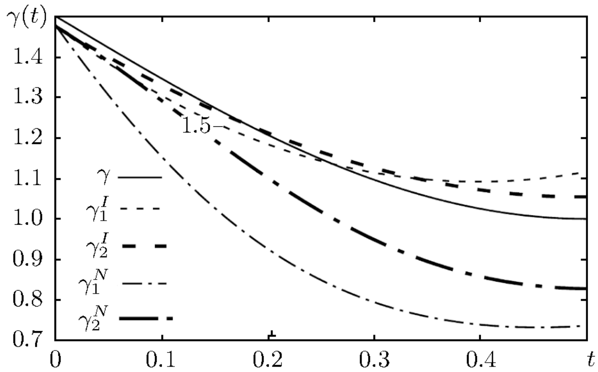

Рис. 3. Результаты второго вычислительного эксперимента: точная функция $\gamma(t)$ и функции, определённые на первых двух итерациях.

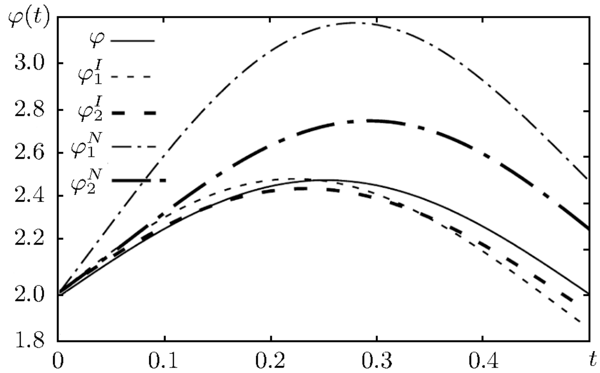

Рис. 4. Результаты второго вычислительного эксперимента: точная функция $\varphi(t)$ и функции, определённые на первых двух итерациях.

Приведённые примеры, а также ряд других численных расчётов позволяют сделать вывод о достаточно быстрой сходимости обоих методов и об отсутствии существенных преимуществ в скорости сходимости одного из методов в сравнении с другим.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1999.
2. *Денисов А.М., Лукшин А.В.* Математические модели неравновесной динамики сорбции. М., 1989.
3. *Денисов А.М.* Существование и единственность решения системы нелинейных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1174–1181.
4. *Бимуратов С.Ш., Кабанихин С.И.* Решение одномерной обратной задачи электродинамики методом Ньютона–Канторовича // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1992. Т. 32. № 12. С. 1900–1915.
5. *Monch L.* A Newton method for solving inverse scattering problem for a sound-hard obstacle // Inverse problems. 1996. V. 12. № 3. P. 309–324.
6. *Kabanikhin S.I., Scherzer O., Shichlenin M.A.* Iteration method for solving a two-dimensional inverse problem for hyperbolic equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2003. V. 11. № 1. P. 1–23.
7. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М., 2004.
8. *Yan-Bo Ma.* Newton method for estimation of the Robin coefficient // J. Nonlin. Sci. Appl. 2015. V. 8. № 5. P. 660–669.
9. *Денисов А.М.* Итерационный метод решения обратной коэффициентной задачи для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 7. С. 943–949.
10. *Баев А.В., Гаврилов С.В.* Итерационный метод решения обратной задачи рассеяния для системы уравнений акустики в слоисто-неоднородной среде с поглощением // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2018. № 2. С. 7–14.
11. *Денисов А.М.* Итерационный метод решения обратной задачи для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 7. С. 973–981.
12. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1977.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.
После доработки 03.02.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.