

УДК 519.633+517.962.2+517.958

К ВОПРОСУ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА НА ПОДВИЖНЫХ И ФИКСИРОВАННЫХ СЕТКАХ

© 2021 г. А. О. Гусев, О. В. Щерица, О. С. Мажорова

Для двумерной задачи Стефана представлены разностные схемы, полученные методами с явным выделением границы фазового перехода. Показано, что разностная схема, построенная на подвижной сетке, и разностная схема, построенная методом выпрямления фронта, эквивалентны.

DOI: 10.31857/S0374064121070050

Введение. Работа посвящена построению разностных схем для численного решения классической задачи Стефана. Задача состоит в определении поля температуры и положения границы раздела фаз в области, содержащей два агрегатных состояния чистого вещества. На движущейся границе раздела фаз задаётся фиксированная температура фазового перехода и условие баланса внутренней энергии. В работе рассматриваются методы решения задачи Стефана, основанные на процедуре явного выделения границы фазового перехода. При таком подходе положение границы раздела фаз определяется положением закреплённых на ней узлов сетки. Это обеспечивается за счёт либо использования подвижных сеток, согласованных в исходном пространстве с формой границы фазового перехода [1–8], либо с помощью динамической замены переменных [9–17]; замена переменных выбирается так, чтобы в новых координатах расчётная область была регулярной, с фиксированными границами, совпадающими с координатными линиями – метод выпрямления фронта [18]. В первом случае осуществляется аппроксимация исходных дифференциальных уравнений, во втором – уравнений, полученных в результате замены переменных. На уровне постановки дифференциальной задачи оба эти подхода эквивалентны. В работе [19] для одномерной термодиффузионной задачи Стефана построено семейство разностных схем, для которых подходы, основанные на использовании подвижной и фиксированной сеток, эквивалентны.

В данной работе консервативные разностные схемы на подвижной и фиксированной сетках построены для двумерной задачи Стефана. Доказана алгебраическая эквивалентность построенных схем. Преобразование одной схемы в другую осуществляется с помощью замены переменных, аналогично тому, как это делается в дифференциальной задаче.

1. Постановка задачи. Задачу о фазовом переходе в чистом веществе рассмотрим в декартовой системе координат Oxy в прямоугольнике $\Omega = \Omega(t, x, y) = [0, H_1] \times [0, H_2]$. В подобласти $\Omega^1(t, x, y) = \{(x, y) : x \in [0, H_1], y \in [0, \zeta(t, x)]\}$ находится твёрдая фаза, а в оставшейся части прямоугольника Ω , т.е. в подобласти $\Omega^2(t, x, y) = \{(x, y) : x \in [0, H_1], y \in [\zeta(t, x), H_2]\}$, располагается жидкая фаза. Здесь и далее $y = \zeta(t, x)$ – дифференцируемая функция, представляющая собой в каждый момент времени t границу раздела фаз, положение которой меняется в ходе процесса (см. левую часть рис. 1).

Твёрдая и жидкая фазы имеют одинаковую плотность $\rho^{cr} = \rho^{lq} = \rho$ и удельную теплоёмкость $c_p^{cr} = c_p^l = c_p$, но раз-

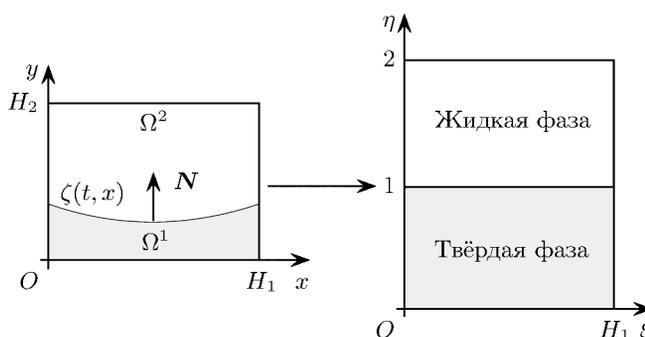


Рис. 1. Преобразование системы координат.

личные коэффициенты теплопроводности – k^{cr} и k^{l} соответственно. Распределение температуры в области описывается уравнением теплопроводности

$$\partial_t T = \nabla \cdot (\varkappa \nabla T). \quad (1)$$

Здесь $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_t = \partial/\partial t$. Коэффициент температуропроводности является кусочно-постоянной функцией: $\varkappa(x, y) = \varkappa^{\text{cr}}$ при $(x, y) \in \Omega^1$, $\varkappa(x, y) = \varkappa^{\text{l}}$ при $(x, y) \in \Omega^2$, где $\varkappa^{\text{cr}} = k^{\text{cr}}/(c_p \rho)$ и $\varkappa^{\text{l}} = k^{\text{l}}/(c_p \rho)$.

На межфазной границе температура равна температуре плавления чистого вещества

$$T|_{y=\zeta(t,x)} = T_{\text{melt}} \quad (2)$$

и выполняется закон сохранения энергии (условие Стефана):

$$(k^{\text{cr}} \nabla T \cdot \mathbf{N})|_{y=\zeta(t,x)-0} - (k^{\text{l}} \nabla T \cdot \mathbf{N})|_{y=\zeta(t,x)+0} = \lambda \rho v^{\text{ph}}(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{N}). \quad (3)$$

Здесь λ – скрытая теплота плавления, $v^{\text{ph}} = v^{\text{ph}}(t, x) = \partial_t \zeta$ – скорость движения границы раздела фаз, \mathbf{N} – единичная нормаль к межфазной границе, направленная в жидкую фазу, \mathbf{e}_y – единичный вектор оси y .

На границе области Ω задана температура

$$T|_{\partial\Omega} = T_b. \quad (4)$$

2. Метод выпрямления фронта.

2.1. Замена переменных. Для решения задачи с внутренней подвижной границей, положение которой необходимо определять в ходе решения задачи, применим метод выпрямления фронта [18]. Основу этого метода составляет динамическая замена переменных специального вида, при которой физическая область $\Omega(t, x, y)$ отображается в расчётную область $\Omega(\tilde{t}, \xi, \eta)$ так, что в новой системе координат положение границы раздела фаз фиксировано и совпадает с координатной линией $\eta = \text{const}$.

В данной работе используется замена переменных, при которой области Ω^m , $m = 1, 2$, в новой системе координат становятся прямоугольниками (рис. 1), а границы областей $y = Y_0 = 0$, $y = Y_1 = \zeta(t, x)$ и $y = Y_2 = H_2$ переходят в прямые $\eta = 0$, $\eta = 1$ и $\eta = 2$ соответственно. Связь между системами координат имеет вид

$$\tilde{t} = t, \quad \xi = x, \quad \eta = (y - Y_{m-1})/l^m + m - 1, \quad m = 1, 2, \quad (5)$$

где $l^m = l^m(t, \xi) = Y_m - Y_{m-1}$ – толщина зоны Ω^m .

Запишем задачу (1)–(4) в неподвижной системе координат [20]. Частные производные от температуры преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial \eta}. \quad (6)$$

Для вычисления метрических коэффициентов $\partial \eta / \partial t$, $\partial \eta / \partial x$, $\partial \eta / \partial y$ воспользуемся обратным преобразованием координат

$$t = \tilde{t}, \quad x = \xi, \quad y = \varphi^m(\tilde{t}, \xi, \eta) = Y_{m-1} + l^m(\eta - m + 1), \quad m = 1, 2. \quad (7)$$

Якобиан преобразования (7): $J^m = \partial(t, x, y) / \partial(\tilde{t}, \xi, \eta) = l^m$, $m = 1, 2$. Нетрудно показать [21, 22], что справедливы равенства

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{J^m} \frac{\partial y}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{l^m} \frac{\partial \varphi^m}{\partial \tilde{t}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{J^m} \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{1}{l^m} \frac{\partial \varphi^m}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J^m} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{l^m}. \quad (8)$$

Дифференциальные операторы в уравнениях (1)–(4) преобразуем с помощью соотношений (6), (8) и умножим затем их на J^m . В дальнейшем для краткости будем опускать волну над

\tilde{t} и верхний индекс m у функций $l^m, \varphi^m, \varphi_t^m = \partial\varphi^m/\partial t, \varphi_\xi^m = \partial\varphi^m/\partial\xi$. Для производной по времени получим

$$\mathcal{T}^{(\xi,\eta)}(T) = \partial_t(lT) - \partial_\eta(\varphi_t T). \tag{9}$$

Для диссипативных членов имеем

$$\mathcal{L}^{(\xi,\eta)}(T) = \partial_\xi \mathcal{W}^\xi + \partial_\eta \mathcal{W}^\eta. \tag{10}$$

Поток $\mathcal{W}^{(\xi,\eta)} = (\mathcal{W}^\xi, \mathcal{W}^\eta)$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{W}^\xi = L^{\xi\xi} \partial_\xi T + L^{\xi\eta} \partial_\eta T, \quad \mathcal{W}^\eta = L^{\eta\xi} \partial_\xi T + L^{\eta\eta} \partial_\eta T,$$

где метрические коэффициенты $L^{\xi\xi}, L^{\xi\eta}, L^{\eta\xi}, L^{\eta\eta}$ вычисляются следующим образом:

$$L^{\xi\xi} = \varkappa l, \quad L^{\xi\eta} = L^{\eta\xi} = \varkappa(-\varphi_\xi), \quad L^{\eta\eta} = \varkappa(1 + \varphi_\xi^2)/l.$$

Важно отметить, что метрические коэффициенты зависят от неизвестного положения границы раздела фаз.

Таким образом, в расчётной области $\Omega(t, \xi, \eta)$ уравнение теплопроводности (1) имеет вид

$$\mathcal{T}^{(\xi,\eta)}(T) = \mathcal{L}^{(\xi,\eta)}(T). \tag{11}$$

2.2. Сетка и сеточные функции. В расчётной области $\Omega(t, \xi, \eta)$ введём прямоугольную сетку $\omega_h^{(\xi,\eta)} = \omega_h^\xi \times \omega_h^\eta$, где $\omega_h^\xi = \{\xi_i, i = \overline{0, M}, \xi_0 = 0, \xi_M = H_1\}, \omega_h^\eta = \{\eta_j, j = \overline{0, N}, \eta_0 = 0, \eta_{j^*} = 1, \eta_N = 2\}$, шаги сетки: $h_{i+1/2}^\xi = \xi_{i+1} - \xi_i, h_{j+1/2}^\eta = \eta_{j+1} - \eta_j$. Введём также полуцелые узлы: $\xi_{i+1/2} = (\xi_{i+1} + \xi_i)/2, \eta_{j+1/2} = (\eta_{j+1} + \eta_j)/2$. Расчётную область $\Omega(t, \xi, \eta)$ разобьём на прямоугольные ячейки $S_{ij}^{(\xi,\eta)} = [\xi_{i-1/2}, \xi_{i+1/2}] \times [\eta_{j-1/2}, \eta_{j+1/2}]$; длины граней ячейки $S_{ij}^{(\xi,\eta)}$ равны $\tilde{h}_i^\xi = 0.5(h_{i+1/2}^\xi + h_{i-1/2}^\xi)$ и $\tilde{h}_j^\eta = 0.5(h_{j+1/2}^\eta + h_{j-1/2}^\eta)$, её площадь $dS_{ij}^{(\xi,\eta)} = \tilde{h}_i^\xi \tilde{h}_j^\eta$. Также рассмотрим ячейки $S_{i+1/2, j+1/2}^{(\xi,\eta)}$ с центрами в точках $(\xi_{i+1/2}, \eta_{j+1/2})$ (рис. 2). Сетка по времени $\omega_\tau = \{t_0 = 0, t_{k+1} = t_k + \tau, k = 0, 1, \dots\}$, где τ – шаг по времени.

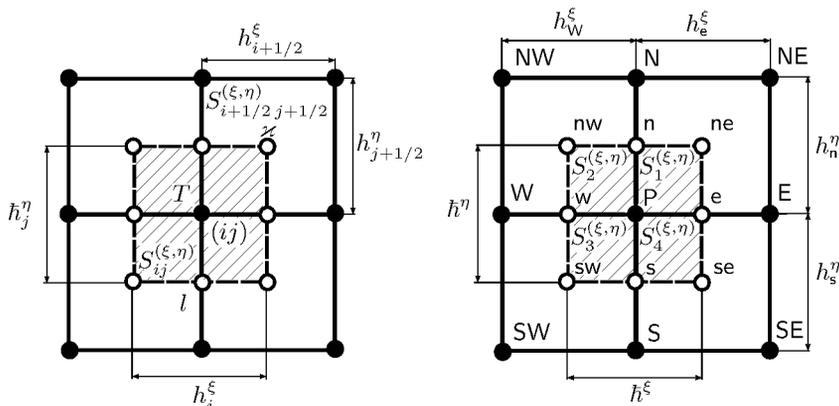


Рис. 2. Сетка и сеточные функции.

Сеточную функцию $T_{ij}^k = T(t_k, \xi_i, \eta_j)$ будем относить к узлам сетки $\omega_h^{(\xi,\eta)}$. Доопределим эту функцию внутри расчётных ячеек: $T(t_k, \xi, \eta) = T_{ij}^k$ при $(\xi, \eta) \in S_{ij}^{(\xi,\eta)}$. Длины фаз l и скорость движения границы раздела v^{ph} внутри ячеек доопределим линейным образом:

$$l(t_k, \xi, \eta_{j+1/2}) = l_{ij+1/2}^k + [l_{i+1, j+1/2}^k - l_{ij+1/2}^k](\xi - \xi_i)/h_{i+1/2}^\xi,$$

$$v^{ph}(t_k, \xi) = (v^{ph})_i^k + [(v^{ph})_{i+1}^k - (v^{ph})_i^k](\xi - \xi_i)/h_{i+1/2}^\xi \quad \text{при } \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}]. \tag{12}$$

Температуропроводность \varkappa и метрические коэффициенты $L^{\xi\xi}$, $L^{\xi\eta}$, $L^{\eta\eta}$ относятся к центрам ячеек $S_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)}$ (см. рис. 2).

Для обозначения узлов сетки также будем использовать локальную географическую нотацию [23]. Доопределим температуру в узлах \mathbf{n} и \mathbf{s} следующим образом: $T_{\mathbf{n}} = 0.5[T_{\mathbf{P}} + T_{\mathbf{N}}]$, $T_{\mathbf{s}} = 0.5[T_{\mathbf{P}} + T_{\mathbf{S}}]$. Введём сеточные операторы разностного дифференцирования. Для пространственных производных в направлении оси ξ имеем $T_{\mathbf{P},\xi} = (T_{\mathbf{E}} - T_{\mathbf{P}})/h_{\mathbf{e}}^{\xi}$, $T_{\mathbf{P},\bar{\xi}} = T_{\mathbf{W},\xi}$; разностные аппроксимации пространственных производных в направлении оси η : $T_{\mathbf{P},\eta} = (T_{\mathbf{N}} - T_{\mathbf{P}})/h_{\mathbf{n}}^{\eta}$, $T_{\mathbf{P},\bar{\eta}} = T_{\mathbf{S},\eta}$, $T_{\mathbf{P},\tilde{\eta}} = (T_{\mathbf{n}} - T_{\mathbf{P}})/(0.5h_{\mathbf{n}}^{\eta})$, $T_{\mathbf{P},\bar{\tilde{\eta}}} = T_{\mathbf{S},\tilde{\eta}}$. Разностную производную по времени обозначим через $T_t = (\hat{T}_{\mathbf{P}} - T_{\mathbf{P}})/\tau$, где $\hat{T}_{\mathbf{P}} = T(t_k + \tau, \xi_{\mathbf{P}}, \eta_{\mathbf{P}})$. Контрольный объём $S_{\mathbf{P}}^{(\xi,\eta)} = \bigcup_{q=1}^4 S_q^{(\xi,\eta)}$.

2.3. Разностная схема. Построим консервативную разностную схему с помощью интегро-интерполяционного метода. Проинтегрируем уравнение (11) по ячейке $S_{\mathbf{P}}^{(\xi,\eta)}$:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_{\mathbf{P}}^{(\xi,\eta)}} \mathcal{T}^{(\xi,\eta)}(T) d\xi d\eta dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_{\mathbf{P}}^{(\xi,\eta)}} \mathcal{L}^{(\xi,\eta)}(T) d\xi d\eta dt.$$

Подробное описание построения разностной схемы приведено в работе [20].

Аппроксимация диссипативных членов. Для диссипативных членов получаем

$$\mathcal{L}_{\mathbf{P}}^{(\xi,\eta)}(T) dS_{\mathbf{P}}^{(\xi,\eta)} = (\mathcal{W}_{\mathbf{n}}^{\eta} - \mathcal{W}_{\mathbf{s}}^{\eta})\tilde{h}^{\xi} + (\mathcal{W}_{\mathbf{e}}^{\xi} - \mathcal{W}_{\mathbf{w}}^{\xi})\tilde{h}^{\eta}.$$

Аппроксимация потоков $\mathcal{W}_{\mathbf{n}}^{\eta}$, $\mathcal{W}_{\mathbf{e}}^{\xi}$ имеет вид

$$\mathcal{W}_{\mathbf{n}}^{\eta}\tilde{h}^{\xi} = 0.5[h_{\mathbf{e}}^{\xi}L_{\mathbf{ne}}^{\eta\eta} + h_{\mathbf{w}}^{\xi}L_{\mathbf{nw}}^{\eta\eta}]T_{\mathbf{P},\eta} + 0.5[h_{\mathbf{e}}^{\xi}L_{\mathbf{ne}}^{\eta\xi}T_{\mathbf{n},\xi} + h_{\mathbf{w}}^{\xi}L_{\mathbf{nw}}^{\eta\xi}T_{\mathbf{n},\bar{\xi}}], \tag{13}$$

$$\mathcal{W}_{\mathbf{e}}^{\xi}\tilde{h}^{\eta} = 0.5[h_{\mathbf{n}}^{\eta}L_{\mathbf{ne}}^{\xi\xi} + h_{\mathbf{s}}^{\eta}L_{\mathbf{se}}^{\xi\xi}]T_{\mathbf{P},\xi} + 0.5[h_{\mathbf{n}}^{\eta}L_{\mathbf{ne}}^{\xi\eta}T_{\mathbf{e},\eta} + h_{\mathbf{s}}^{\eta}L_{\mathbf{se}}^{\xi\eta}T_{\mathbf{e},\bar{\eta}}], \tag{14}$$

здесь $T_{\mathbf{n},\xi} = 0.5(T_{\mathbf{P},\xi} + T_{\mathbf{N},\xi})$, $T_{\mathbf{n},\bar{\xi}} = 0.5(T_{\mathbf{P},\bar{\xi}} + T_{\mathbf{N},\bar{\xi}})$, $T_{\mathbf{e},\eta} = 0.5(T_{\mathbf{P},\eta} + T_{\mathbf{E},\eta})$, $T_{\mathbf{e},\bar{\eta}} = 0.5(T_{\mathbf{P},\bar{\eta}} + T_{\mathbf{E},\bar{\eta}})$. Метрические коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$L_{\mathbf{ne}}^{\xi\xi} = \varkappa_{\mathbf{ne}}l_{\mathbf{ne}}, \quad L_{\mathbf{se}}^{\xi\xi} = \varkappa_{\mathbf{se}}l_{\mathbf{se}}, \quad L_{\mathbf{ne}}^{\eta\eta} = \varkappa_{\mathbf{ne}}[1 + (\varphi_{\mathbf{n},\xi})^2]/l_{\mathbf{n}}, \quad L_{\mathbf{nw}}^{\eta\eta} = \varkappa_{\mathbf{nw}}[1 + (\varphi_{\mathbf{n},\bar{\xi}})^2]/l_{\mathbf{n}},$$

$$L_{\mathbf{ne}}^{\xi\eta} = L_{\mathbf{ne}}^{\eta\xi} = \varkappa_{\mathbf{ne}}(-\varphi_{\mathbf{n},\xi}), \quad L_{\mathbf{se}}^{\xi\eta} = \varkappa_{\mathbf{se}}(-\varphi_{\mathbf{s},\xi}), \quad L_{\mathbf{nw}}^{\eta\xi} = \varkappa_{\mathbf{nw}}(-\varphi_{\mathbf{n},\bar{\xi}}).$$

Потоки $\mathcal{W}_{\mathbf{s}}^{\eta}$ и $\mathcal{W}_{\mathbf{w}}^{\xi}$ вычисляются аналогично.

На межфазной границе в разностной аппроксимации диссипативных членов возникает слабое, обеспечивающее выполнение условия Стефана (3). Это слабое имеет вид

$$\mathcal{E}_{\mathbf{P}^*}^{(\xi,\eta)}(T) dS_{\mathbf{P}^*}^{(\xi,\eta)} = \tilde{h}^{\xi}\tilde{\lambda}(\bar{\mathbf{v}}^{\text{ph}})^{\eta}.$$

Здесь \mathbf{P}^* – индекс узлов сетки, лежащих на границе раздела фаз, $\tilde{\lambda} = \lambda\rho/c_{\mathbf{p}}$,

$$(\bar{\mathbf{v}}^{\text{ph}})^{\eta} = (0.5[v_{\mathbf{p}}^{\text{ph}} + v_{\mathbf{w}}^{\text{ph}}]h_{\mathbf{w}}^{\xi} + 0.5[v_{\mathbf{p}}^{\text{ph}} + v_{\mathbf{e}}^{\text{ph}}]h_{\mathbf{e}}^{\xi})/(2\tilde{h}^{\xi}). \tag{15}$$

Значения $v_{\mathbf{w}}^{\text{ph}}$ и $v_{\mathbf{e}}^{\text{ph}}$ вычисляются по формуле (12).

С помощью несложных, но достаточно громоздких преобразований показывается, что предложенная аппроксимация диссипативных членов задаёт самосопряжённый отрицательно определённый разностный оператор.

Аппроксимация производной по времени. Построим пространственную аппроксимацию производной по времени. Для этого проинтегрируем выражение (9) по ячейке $S_{\mathbf{P}}^{(\xi,\eta)}$. Для

удобства интеграл по ячейке $S^{(\xi,\eta)}$ представим в виде суммы интегралов по ячейкам $S_q^{(\xi,\eta)}$, $q = \overline{1,4}$:

$$\int_{S_P^{(\xi,\eta)}} \mathcal{T}^{(\xi,\eta)}(T) d\xi d\eta = \sum_{q=1}^4 \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_q^{(\xi,\eta)}} lT d\xi d\eta - \int_{S_q^{(\xi,\eta)}} \frac{\partial(\varphi_t T)}{\partial \eta} d\xi d\eta \right]. \quad (16)$$

Интегрируя первое слагаемое в (16) по ячейке $S_1^{(\xi,\eta)}$, с учётом формулы (12) получаем

$$\int_{S_1^{(\xi,\eta)}} lT d\xi d\eta = [l_n + l_{ne}]T_P(h_e^\xi h_n^\eta)/8.$$

Интегралы по ячейкам $S_2^{(\xi,\eta)}$, $S_3^{(\xi,\eta)}$ и $S_4^{(\xi,\eta)}$ вычисляются аналогичным образом. Для второго слагаемого в (16) имеем

$$\int_{S_1^{(\xi,\eta)}} \frac{\partial(\varphi_t T)}{\partial \eta} d\xi d\eta + \int_{S_4^{(\xi,\eta)}} \frac{\partial(\varphi_t T)}{\partial \eta} d\xi d\eta = 0.5[(\varphi_t)_n + (\varphi_t)_{ne}]T_n h_e^\xi/2 - 0.5[(\varphi_t)_s + (\varphi_t)_{se}]T_s h_e^\xi/2,$$

$$\int_{S_2^{(\xi,\eta)}} \frac{\partial(\varphi_t T)}{\partial \eta} d\xi d\eta + \int_{S_3^{(\xi,\eta)}} \frac{\partial(\varphi_t T)}{\partial \eta} d\xi d\eta = 0.5[(\varphi_t)_n + (\varphi_t)_{nw}]T_n h_w^\xi/2 - 0.5[(\varphi_t)_s + (\varphi_t)_{sw}]T_s h_w^\xi/2.$$

Таким образом, пространственная аппроксимация производной по времени принимает вид

$$\int_{S_P^{(\xi,\eta)}} \mathcal{T}^{(\xi,\eta)}(T) d\xi d\eta = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{l}_P T_P) dS_P^{(\xi,\eta)} - [(\overline{\varphi_t})_n T_n - (\overline{\varphi_t})_s T_s] h^\xi, \quad (17)$$

где

$$\bar{l}_P = [(0.5[l_n + l_{ne}]h_e^\xi + 0.5[l_n + l_{nw}]h_w^\xi)h_n^\eta + (0.5[l_s + l_{se}]h_e^\xi + 0.5[l_s + l_{sw}]h_w^\xi)h_s^\eta]/(4\hbar^\xi \hbar^\eta),$$

$$(\overline{\varphi_t})_n = (0.5[(\varphi_t)_n + (\varphi_t)_{ne}]h_e^\xi + 0.5[(\varphi_t)_n + (\varphi_t)_{nw}]h_w^\xi)/(2\hbar^\xi).$$

Пространственные аппроксимации операторов (9) и (10) проинтегрируем по отрезку $[t_k, t_{k+1}]$, получившиеся выражения разделим на шаг по времени τ . В результате получим следующую аппроксимацию по времени оператора (17):

$$\mathcal{T}_P^{(\xi,\eta)}(T) dS_P^{(\xi,\eta)} = (\bar{l}_P T_P)_t dS_P^{(\xi,\eta)} - [(\overline{\varphi_t})_n \widehat{T}_n - (\overline{\varphi_t})_s \widehat{T}_s] h^\xi. \quad (18)$$

Во внутренних точках сетки разностная схема для задачи (1)–(4), полученная с помощью метода выпрямления фронта, имеет вид

$$\mathcal{T}_P^{(\xi,\eta)}(T) dS_P^{(\xi,\eta)} = [\mathcal{L}_P^{(\xi,\eta)}(\widehat{T}) + \mathcal{E}_{P^*}^{(\xi,\eta)}(\widehat{T})\delta_{PP^*}] dS_P^{(\xi,\eta)}. \quad (19)$$

Здесь $\delta_{PP^*} = 1$, если $P = P^*$, и $\delta_{PP^*} = 0$ в противном случае. Разностная схема (19) является консервативной, метрические коэффициенты $L^{\xi\xi}$, $L^{\xi\eta}$, $L^{\eta\eta}$ в ней взяты с верхнего временного слоя, соответствующая система нелинейных сеточных уравнений решается относительно вектора неизвестных, компонентами которого являются температуры в твёрдой и жидкой фазах и скорость межфазной границы.

Несложно показать (см. [19]), что в регулярной точке выражение (18) преобразуется к виду

$$\mathcal{T}_P^{(\xi,\eta)}(T) dS_P^{(\xi,\eta)} = \bar{l}_P T_{P,t} dS_P^{(\xi,\eta)} - 0.5[h_n^\eta (\overline{\varphi_t})_n \widehat{T}_{\bar{\eta}} + h_s^\eta (\overline{\varphi_t})_s \widehat{T}_{\bar{\eta}}] h^\xi. \quad (20)$$

Заменив в системе уравнений (19) её левую часть представлением (20), получим разностную схему, аппроксимирующую недивергентную форму записи задачи (11) в расчётной области.

3. Метод расчёта на подвижной сетке.

3.1. Сетка и сеточные функции. В физической области $\Omega(t, x, y)$ введём подвижную сетку $\omega_h^{(x,y)}(t) = \{(x_i, y_j(t, x_i)), i = \overline{0, M}, j = \overline{0, N}\}$ таким образом, чтобы $y_0(t, x_i) = 0, y_N(t, x_i) = H_2, y_j^*(t, x_i) = \zeta(t, x_i)$ для любого x_i . Сетка по времени $\omega_\tau = \{t_0 = 0, t_{k+1} = t_k + \tau, k = 0, 1, \dots\}$, где τ – шаг по времени.

Утверждение 1. Если в начальный момент времени координаты узлов сеток $\omega_h^{(x,y)}(0)$ и $\omega_h^{(\xi,\eta)}$ связаны соотношениями

$$x_i = \xi_i, \quad y_j(0, x_i) = \varphi(0, \xi_i, \eta_j), \quad i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{0, N}, \tag{21}$$

и движение узлов сетки $\omega_h^{(x,y)}(t)$ определяется выражением

$$y_j(t_{k+1}, x_i) = y_j(t_k, x_i) + \tau v_j^y(x_i), \quad v_j^y(x_i) = \begin{cases} y_j v_i^{\text{ph}} / \zeta_i, & 0 < j \leq j^*, \\ (H_2 - y_j) v_i^{\text{ph}} / (H_2 - \zeta_i), & j^* < j < N, \end{cases} \tag{22}$$

то координаты узлов сеток $\omega_h^{(x,y)}(t)$ и $\omega_h^{(\xi,\eta)}$ связаны соотношениями

$$x_i = \xi_i, \quad y_j(t_k, x_i) = \varphi(t_k, \xi_i, \eta_j), \quad i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{0, N}, \tag{23}$$

для любого $k > 0$.

Доказательство. Для определённости рассмотрим узлы сетки, расположенные в твёрдой фазе. Доказательство утверждения проведём методом математической индукции. Из формулировки утверждения следует, что в начальный момент времени (т.е. при $k = 0$) равенство выполнено. Пусть это равенство выполнено на k -м временном слое, т.е. $y_j(t_k, x_i) = \varphi(t_k, \xi_i, \eta_j) = \eta_j l(t_k, \xi_i)$. Покажем, что оно выполняется и в момент времени $t_{k+1} = t_k + \tau$. Из равенств (5) и (22) следует, что $v_j^y(x_i) = \eta_j v_i^{\text{ph}}$, поэтому в момент времени t_{k+1} имеем

$$y_j(t_{k+1}, x_i) = y_j(t_k, x_i) + \tau v_j^y(x_i) = [l(t_k, \xi_i) + \tau v_i^{\text{ph}}] \eta_j = l(t_{k+1}, \xi_i) \eta_j = \varphi(t_{k+1}, \xi_i, \eta_j).$$

Для узлов сетки, лежащих в жидкой фазе, утверждение доказывается аналогично. Утверждение доказано.

В дальнейшем в физической области будем использовать сетку $\omega_h^{(x,y)}(t)$, удовлетворяющую условиям (21), (22). Полуцелые узлы подвижной сетки определим равенствами

$$x_{i+1/2} = \xi_{i+1/2}, \quad y_j(t, x_{i+1/2}) = \varphi(t, \xi_{i+1/2}, \eta_j), \quad y_{j+1/2}(t, x_{i+1/2}) = \varphi(t, \xi_{i+1/2}, \eta_{j+1/2}).$$

Шаги подвижной сетки

$$\begin{aligned} h_{i+1/2}^x &= x_{i+1} - x_i, \quad h_{i,j+1/2}^y(t_k) = y_{j+1}(t_k, x_i) - y_j(t_k, x_i), \\ h_{i+1/2,j+1/2}^y(t_k) &= y_{j+1}(t_k, x_{i+1/2}) - y_j(t_k, x_{i+1/2}), \quad \bar{h}_i^x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, \\ \bar{h}_{i+1/2,j}^y(t_k) &= y_{j+1/2}(t_k, x_{i+1/2}) - y_{j-1/2}(t_k, x_{i+1/2}). \end{aligned}$$

В общем случае $h_{i,j+1/2}^y \neq h_{i+1/2,j+1/2}^y \neq h_{i+1,j+1/2}^y$.

Сетка $\omega_h^{(x,y)}(t)$ разбивает физическую область на четырёхугольные ячейки $S_{i+1/2,j+1/2}^{(x,y)}(t)$ с вершинами в точках $(x_{i+\alpha}, y_{j+\beta}(t, x_{i+\alpha}))$, $\alpha, \beta = 0, 1$. Соединим середины противоположных границ данных ячеек отрезками прямых. Полученные отрезки разбивают область на шестиугольные ячейки $S_{ij}^{(x,y)}(t)$, $i = \overline{0, M}, j = \overline{0, N}$ (заштрихованная область на рис. 3). Из соотношения (23) следует, что $S_{ij}^{(x,y)}(t_k) = \{(x = \xi, y = \varphi(t_k, \xi, \eta)) : (\xi, \eta) \in S_{ij}^{(\xi,\eta)}\}$. Поэтому температуру внутри расчётной ячейки $S_{ij}^{(x,y)}(t)$ доопределим так же, как на фиксированной сетке $\omega_h^{(\xi,\eta)}$.

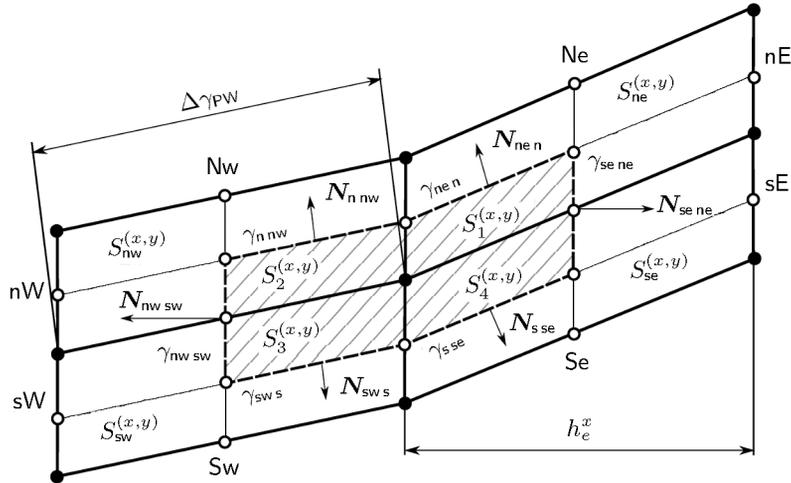


Рис. 3. Подвижная сетка.

Далее для обозначения узлов сетки будем использовать локальную географическую нотацию. Обозначим $S_P^{(x,y)} = \bigcup_{q=1}^4 S_q^{(x,y)}$ (рис. 3) и $dS_q^{(x,y)}$ – площадь ячейки $S_q^{(x,y)}$. Границу ячейки $S_P^{(x,y)}$ будем считать положительно ориентированной и введём упорядоченное в соответствии с ориентацией границы множество вершин $V = \{ne, n, nw, sw, s, se\}$. Пусть $\gamma_{\alpha\beta}$ – участок границы с началом в точке α и концом в точке β ($\alpha, \beta \in V$); $\Delta\gamma_{\alpha\beta}$ – длина отрезка $\gamma_{\alpha\beta}$, $\Delta\gamma_{\alpha\beta} = \sqrt{\delta x_{\alpha\beta}^2 + \delta y_{\alpha\beta}^2}$, где $\delta x_{\alpha\beta} = x_\beta - x_\alpha$, $\delta y_{\alpha\beta} = y_\beta - y_\alpha$; $N_{\alpha\beta}$ – вектор внешней единичной нормали к границе $\gamma_{\alpha\beta}$ с координатами $(N_{\alpha\beta}^x, N_{\alpha\beta}^y)$; $\mu_{\alpha\beta}$ – единичный направляющий вектор границы, $\mu_{\alpha\beta} = (\mu_{\alpha\beta}^x, \mu_{\alpha\beta}^y)$. В нашем случае

$$\mu_{\alpha\beta}^x = -N_{\alpha\beta}^y, \quad \mu_{\alpha\beta}^y = N_{\alpha\beta}^x, \tag{24}$$

где $N_{\alpha\beta}^x = \delta y_{\alpha\beta} / \Delta\gamma_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}^y = -\delta x_{\alpha\beta} / \Delta\gamma_{\alpha\beta}$. Производная вдоль участка границы $\gamma_{\alpha\beta}$ вычисляется по формуле $T_{\mu_{\alpha\beta}} = (T_\beta - T_\alpha) / \Delta\gamma_{\alpha\beta}$.

Наряду с множеством V введём упорядоченное множество $\tilde{V} = \{nE, n, nW, sW, s, sE\}$, образованное серединами вертикальных границ ячеек основной сетки $S_\nu^{(x,y)}$, $\nu \in \{ne, nw, sw, se\}$. Доопределим функцию T в серединах границ ячейки основной сетки $S_\nu^{(x,y)}$ как полусумму её значений на концах соответствующих границ, т.е. $T_n = 0.5[T_P + T_N]$, $T_{nE} = 0.5[T_E + T_{NE}]$, $T_e = 0.5[T_P + T_E]$, $T_{Ne} = 0.5[T_N + T_{NE}]$ и т.д.; значение температуры в центре ячейки основной сетки $S_\nu^{(x,y)}$ равно среднему значению, вычисленному по значениям T в вершинах данной ячейки, т.е. $T_{ne} = 0.25[T_P + T_E + T_N + T_{NE}]$ и т.д. При такой переинтерполяции на “северных” и “южных” границах ячейки $S_P^{(x,y)}$ для сонаправленных векторов $\mu_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$, $\alpha, \beta \in V$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{V}$, имеем

$$T_{\mu_{\alpha\beta}} = T_{\mu_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}} = (T_{\tilde{\beta}} - T_{\tilde{\alpha}}) / (2\Delta\gamma_{\alpha\beta}), \tag{25}$$

например, $T_{\mu_{ne n}} = (T_n - T_{nE}) / (2\Delta\gamma_{ne n}) = ([T_P + T_N] - [T_{NE} + T_E]) / (4\Delta\gamma_{ne n})$. Производную $\partial_y T$ в центрах ячеек основной сетки $S_\nu^{(x,y)}$ аппроксимируем следующим образом:

$$[\partial_y T]_{ne}^h = T_{e,y} = \frac{T_{Ne} - T_e}{h_{ne}^y}, \quad [\partial_y T]_{se}^h = T_{e,\bar{y}} = \frac{T_e - T_{Se}}{h_{se}^y}, \quad [\partial_y T]_{nw}^h = T_{w,y}, \quad [\partial_y T]_{sw}^h = T_{w,\bar{y}}. \tag{26}$$

Остальные разностные аппроксимации пространственных производных на подвижной сетке вычисляются стандартным образом.

3.2. Разностная схема. Разностную схему будем строить с помощью интегро-интерполяционного метода. Проинтегрируем уравнения (1)–(4) по контрольному объёму $S_P^{(x,y)}(t)$:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(x,y)}(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(x,y)}(t)} \nabla \cdot (\varkappa \nabla T) dx dy dt.$$

Аппроксимация диссипативных членов. Построим пространственную аппроксимацию диссипативных членов

$$\mathcal{L}_P^{(x,y)}(T) dS_P^{(x,y)} = \int_{S_P^{(x,y)}(t)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{W}^x + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{W}^y \right] dx dy.$$

Здесь $\mathcal{W}^x = \varkappa \partial_x T$, $\mathcal{W}^y = \varkappa \partial_y T$. В силу формулы Остроградского–Гаусса имеем

$$\int_{S_P^{(x,y)}(t)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{W}^x + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{W}^y \right] dx dy = \sum_{\alpha, \beta \in V_{\gamma_{\alpha\beta}}} \int [\mathcal{W}^x N_{\alpha\beta}^x + \mathcal{W}^y N_{\alpha\beta}^y] d\gamma.$$

Вычислим интегралы вдоль “горизонтальных” границ $\gamma_{ne n}$, $\gamma_{n nw}$, $\gamma_{sw s}$, γ_{sse} . Воспользовавшись тем, что

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\mu_{\alpha\beta}^x} \left(\frac{\partial T}{\partial \mu_{\alpha\beta}} - \mu_{\alpha\beta}^y \frac{\partial T}{\partial y} \right),$$

запишем интеграл вдоль границы следующим образом:

$$\int_{\gamma_{\alpha\beta}} \left[\varkappa \frac{\partial T}{\partial x} N_{\alpha\beta}^x + \varkappa \frac{\partial T}{\partial y} N_{\alpha\beta}^y \right] d\gamma = \int_{\gamma_{\alpha\beta}} \frac{N_{\alpha\beta}^x}{\mu_{\alpha\beta}^x} \varkappa \frac{\partial T}{\partial \mu_{\alpha\beta}} d\gamma + \int_{\gamma_{\alpha\beta}} \left[N_{\alpha\beta}^y - \frac{\mu_{\alpha\beta}^y}{\mu_{\alpha\beta}^x} N_{\alpha\beta}^x \right] \varkappa \frac{\partial T}{\partial y} d\gamma. \tag{27}$$

Для интегралов в правой части равенства (27) с учётом соотношений (24) получаем

$$\int_{\gamma_{\alpha\beta}} \frac{N_{\alpha\beta}^x}{\mu_{\alpha\beta}^x} \varkappa \frac{\partial T}{\partial \mu_{\alpha\beta}} d\gamma = \int_{\gamma_{\alpha\beta}} -\frac{N_{\alpha\beta}^x}{N_{\alpha\beta}^y} \varkappa \frac{\partial T}{\partial \mu_{\alpha\beta}} d\gamma \approx \Delta \gamma_{\alpha\beta} \left(\frac{\delta y_{\alpha\beta}}{\delta x_{\alpha\beta}} [\varkappa]^h T_{\mu_{\alpha\beta}} \right), \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\alpha\beta}} \left[N_{\alpha\beta}^y - \frac{\mu_{\alpha\beta}^y}{\mu_{\alpha\beta}^x} N_{\alpha\beta}^x \right] \varkappa \frac{\partial T}{\partial y} d\gamma &= \int_{\gamma_{\alpha\beta}} \frac{(N_{\alpha\beta}^x)^2 + (N_{\alpha\beta}^y)^2}{N_{\alpha\beta}^y} \varkappa \frac{\partial T}{\partial y} d\gamma = \int_{\gamma_{\alpha\beta}} \frac{1}{N_{\alpha\beta}^y} \varkappa \frac{\partial T}{\partial y} d\gamma \approx \\ &\approx \Delta \gamma_{\alpha\beta} \left(-\frac{\Delta \gamma_{\alpha\beta}}{\delta x_{\alpha\beta}} [\varkappa]^h [\partial_y T]_P^h \right) = -\delta x_{\alpha\beta} [1 + (\delta y_{\alpha\beta} / \delta x_{\alpha\beta})^2] [\varkappa]^h [\partial_y T]_P^h. \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь $[\varkappa]^h = \varkappa_{ne}$ для $\gamma_{ne n}$, $[\varkappa]^h = \varkappa_{nw}$ для $\gamma_{n nw}$, $[\varkappa]^h = \varkappa_{se}$ для γ_{ses} и $[\varkappa]^h = \varkappa_{sw}$ для γ_{ssw} ; $[\partial_y T]_P^h$ – разностная аппроксимация оператора $\partial_y T$, $[\partial_y T]_P^h = T_{P,y}$ для “северных” границ $\gamma_{ne n}$ и $\gamma_{n nw}$, $[\partial_y T]_P^h = T_{P,\bar{y}}$ для “южных” границ γ_{ses} и γ_{ssw} .

Преобразуем теперь правые части в (28) и (29) к виду, удобному для сравнения с аппроксимацией теплового потока (13) через образ отрезка $\gamma_{\alpha\beta}$ в расчётной системе координат (t, ξ, η) . На границе $\gamma_{ne n}$ для ориентированной разности имеем $\delta x_{ne n} = -h_e/2$; тогда $\delta y_{ne n} / \delta x_{ne n} = y_{n,x} = (y_{nE} - y_n) / h_e^x$ и, учитывая равенство (25), получаем $T_{\mu_{ne n}} = -T_{n,\mu}$, где

$$T_{n,\mu} = (T_{nE} - T_n) / (2\Delta \gamma_{ne n}) = ([T_E + T_{NE}] - [T_P + T_N]) / (4\Delta \gamma_{ne n}).$$

На $\gamma_{n\text{nw}}$ справедливы равенства

$$\delta x_{n\text{nw}} = -h_w/2, \quad \delta y_{n\text{nw}}/\delta x_{n\text{nw}} = y_{n,\bar{x}} = (y_n - y_{n\text{w}})/h_w^x \quad \text{и} \quad T_{\mu_{n\text{nw}}} = -T_{n,\bar{\mu}},$$

где $T_{n,\bar{\mu}} = [T_n - T_{n\text{w}}]/(2\Delta\gamma_{ne n})$. Таким образом, поток \mathcal{I}_n через “северную” границу представляется в виде

$$\mathcal{I}_n = 0.5[h_e^x M_{ne}^{yy} + h_w^x M_{nw}^{yy}]T_{P,y} + \Delta\gamma_{ne n} M_{ne}^{y\mu} T_{n,\mu} + \Delta\gamma_{n\text{nw}} M_{nw}^{y\mu} T_{n,\bar{\mu}}, \quad (30)$$

где коэффициенты M^{yy} и $M^{y\mu}$ вычисляются по формулам

$$M_{ne}^{yy} = \varkappa_{ne}[1 + (y_{n,x})^2], \quad M_{nw}^{yy} = \varkappa_{nw}[1 + (y_{n,\bar{x}})^2], \quad M_{ne}^{y\mu} = \varkappa_{ne}(-y_{n,x}), \quad M_{nw}^{y\mu} = \varkappa_{nw}(-y_{n,\bar{x}}).$$

На южных границах $\gamma_{sw s}$ и γ_{se} выполняются равенства:

$$\delta x_{sw s} = h_w/2, \quad \delta y_{sw s}/\delta x_{sw s} = y_{s,\bar{x}}, \quad T_{\mu_{sw s}} = T_{s,\bar{\mu}} = [T_s - T_{s\text{w}}]/(2\Delta\gamma_{sw s});$$

$$\delta x_{s se} = h_e/2, \quad \delta y_{s se}/\delta x_{s se} = y_{s,x}, \quad T_{\mu_{s se}} = T_{s,\mu} = [T_{s\text{e}} - T_s]/(2\Delta\gamma_{s se}).$$

Поэтому поток \mathcal{I}_s через “южную” границу представляется в виде

$$\mathcal{I}_s = -0.5[h_e^x M_{se}^{yy} + h_w^x M_{sw}^{yy}]T_{P,\bar{y}} - \Delta\gamma_{s se} M_{se}^{y\mu} T_{s,\mu} - \Delta\gamma_{sw s} M_{sw}^{y\mu} T_{s,\bar{\mu}}, \quad (31)$$

где коэффициенты M^{yy} и $M^{y\mu}$ вычисляются по формулам

$$M_{se}^{yy} = \varkappa_{se}[1 + (y_{s,x})^2], \quad M_{sw}^{yy} = \varkappa_{sw}[1 + (y_{s,\bar{x}})^2], \quad M_{se}^{y\mu} = \varkappa_{se}(-y_{s,x}), \quad M_{sw}^{y\mu} = \varkappa_{sw}(-y_{s,\bar{x}}).$$

Запишем интегралы вдоль вертикальных границ $\gamma_{nw sw}$ и $\gamma_{se ne}$. В этом случае $N_{\alpha\beta}^x = \delta y_{\alpha\beta}/|\delta y_{\alpha\beta}|$, $N_{\alpha\beta}^y = 0$ и

$$\int_{\gamma_{\alpha\beta}} \left[\varkappa \frac{\partial T}{\partial x} N_{\alpha\beta}^x + \varkappa \frac{\partial T}{\partial y} N_{\alpha\beta}^y \right] d\gamma = \int_{\gamma_{\alpha\beta}} \frac{\delta y_{\alpha\beta}}{|\delta y_{\alpha\beta}|} \varkappa \frac{\partial T}{\partial x} dy.$$

Как и выше, производную $\partial_x T$ выразим через производную по некоторому направлению. В качестве такого направления выберем $\mu = \mu_{PE}$ на “восточной” границе $\gamma_{se ne}$ и $\mu = \mu_{PW}$ на “западной” границе $\gamma_{nw sw}$. Для “восточной” границы $\gamma_{se ne}$ получим

$$\int_{\gamma_{se ne}} \frac{\delta y_{se ne}}{|\delta y_{se ne}|} \varkappa \frac{\partial T}{\partial x} dy = \int_{\gamma_{se ne}} \frac{1}{\mu_{PE}^x} \varkappa \frac{\partial T}{\partial \mu_{PE}} dy + \int_{\gamma_{se ne}} \left(-\frac{\mu_{PE}^y}{\mu_{PE}^x} \right) \varkappa \frac{\partial T}{\partial y} dy. \quad (32)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (32) аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{se ne}} \frac{1}{\mu_{PE}^x} \varkappa \frac{\partial T}{\partial \mu_{PE}} dy &= \int_{\gamma_{se ne}} \frac{\Delta\gamma_{PE}}{\delta x_{PE}} \varkappa \frac{\partial T}{\partial \mu_{PE}} dy \approx \frac{1}{2} [h_{ne}^y \varkappa_{ne} + h_{se}^y \varkappa_{se}] \frac{\Delta\gamma_{PE}}{\delta x_{PE}} T_{\mu_{PE}} = \\ &= 0.5 [h_{ne}^y \varkappa_{ne} + h_{se}^y \varkappa_{se}] (|\delta x_{PE}|/\delta x_{PE}) \sqrt{1 + (\delta y_{PE}/\delta x_{PE})^2} T_{\mu_{PE}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Для аппроксимации второго слагаемого в правой части равенства (32) воспользуемся следующей квадратурной формулой:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{se ne}} \left(-\frac{\mu_{PE}^y}{\mu_{PE}^x} \right) \varkappa \frac{\partial T}{\partial y} dy &\approx \frac{1}{2} \left[h_{ne}^y \left(-\frac{\mu_{ne}^y}{\mu_{ne}^x} \right) \varkappa_{ne} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{ne} + h_{se}^y \left(-\frac{\mu_{se}^y}{\mu_{se}^x} \right) \varkappa_{se} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{se} \right] = \\ &= 0.5 [h_{ne}^y (-\delta y_{ne}/\delta x_{ne}) \varkappa_{ne} [\partial_y T]_{ne}^h + h_{se}^y (-\delta y_{se}/\delta x_{se}) \varkappa_{se} [\partial_y T]_{se}^h]. \end{aligned} \quad (34)$$

Интеграл вдоль “западной” границы $\gamma_{nw\ sw}$ вычисляется аналогично:

$$\int_{\gamma_{nw\ sw}} \frac{\delta y_{nw\ sw}}{|\delta y_{nw\ sw}|} \varkappa \frac{\partial T}{\partial x} dy = -0.5[h_{nw}^y \varkappa_{nw} + h_{sw}^y \varkappa_{sw}] (|\delta x_{pw}| / \delta x_{pw}) \sqrt{1 + (\delta y_{pw} / \delta x_{pw})^2} T_{\mu_{pw}} - \\ - 0.5[h_{nw}^y (-\delta y_{n\ nw} / \delta x_{n\ nw}) \varkappa_{nw} [\partial_y T]_{nw}^h + h_{sw}^y (-\delta y_{s\ sw} / \delta x_{s\ sw}) \varkappa_{sw} [\partial_y T]_{sw}^h]. \quad (35)$$

Преобразуем правые части равенств (33), (34) и (35) к виду, удобному для сравнения с аппроксимацией теплового потока (14) в расчётной области. На границе $\gamma_{se\ ne}$ имеем: $\delta x_{pe} = h_e^x$, $\delta y_{pe} / \delta x_{pe} = y_{p,x} = [y_e - y_p] / h_e^x$, $T_{\mu_{pe}} = T_{p,\mu} = [T_e - T_p] / \Delta \gamma_{pe}$ и, учитывая (26), $[\partial_y T]_{ne}^h = T_{e,y}$, $[\partial_y T]_{se}^h = T_{e,\bar{y}}$. Поэтому поток \mathcal{I}_e через “восточную” границу ячейки можно представить в виде

$$\mathcal{I}_e = 0.5[h_{ne}^y M_{ne}^{\mu\mu} + h_{se}^y M_{se}^{\mu\mu}] T_{p,\mu} + 0.5[h_{ne}^y M_{ne}^{\mu y} T_{e,y} + h_{se}^y M_{se}^{\mu y} T_{e,\bar{y}}], \quad (36)$$

где

$$M_{ne}^{\mu\mu} = \varkappa_{ne} \sqrt{1 + (y_{p,x})^2}, \quad M_{se}^{\mu\mu} = \varkappa_{se} \sqrt{1 + (y_{p,x})^2}, \quad \mathcal{M}_{ne}^{\mu y} = \mathcal{M}_{ne}^{y\mu}, \quad \mathcal{M}_{se}^{\mu y} = \mathcal{M}_{se}^{y\mu}.$$

На границе $\gamma_{nw\ sw}$ имеем: $\delta x_{pw} = -h_w^x$, $\delta y_{pe} / \delta x_{pe} = y_{p,\bar{x}} = [y_p - y_w] / h_w^x$, $T_{\mu_{pw}} = -T_{p,\bar{\mu}}$, где $T_{p,\bar{\mu}} = [T_p - T_w] / \Delta \gamma_{pw}$ и $[\partial_y T]_{nw}^h = T_{w,y}$, $[\partial_y T]_{sw}^h = T_{w,\bar{y}}$. Таким образом, поток \mathcal{I}_w через “западную” границу можно представить в виде

$$\mathcal{I}_w = -0.5[h_{nw}^y M_{nw}^{\mu\mu} + h_{sw}^y M_{sw}^{\mu\mu}] T_{p,\bar{\mu}} - 0.5[h_{nw}^y M_{nw}^{\mu y} T_{w,y} + h_{sw}^y M_{sw}^{\mu y} T_{w,\bar{y}}], \quad (37)$$

где

$$M_{nw}^{\mu\mu} = \varkappa_{nw} \sqrt{1 + (y_{p,\bar{x}})^2}, \quad M_{sw}^{\mu\mu} = \varkappa_{sw} \sqrt{1 + (y_{p,\bar{x}})^2}, \quad \mathcal{M}_{nw}^{\mu y} = \mathcal{M}_{nw}^{y\mu}, \quad \mathcal{M}_{sw}^{\mu y} = \mathcal{M}_{sw}^{y\mu}.$$

Аппроксимация диссипативных членов на подвижной сетке запишется следующим образом:

$$\mathcal{L}_p^{(x,y)}(T) dS_p^{(x,y)} = \mathcal{I}_n + \mathcal{I}_s + \mathcal{I}_e + \mathcal{I}_w. \quad (38)$$

На фронте кристаллизации в аппроксимации диссипативных членов возникает дополнительное слагаемое. Из условия Стефана (3) следует, что для скачка теплового потока справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{p^*}^{(x,y)}(T) dS_{p^*}^{(x,y)} = \int_{\gamma_{wp}} \tilde{\lambda} v^{ph} N_{wp}^y d\gamma + \int_{\gamma_{pe}} \tilde{\lambda} v^{ph} N_{pe}^y d\gamma \approx \tilde{h}^x \tilde{\lambda} (\bar{v}^{ph})^y, \quad (39)$$

здесь

$$(\bar{v}^{ph})^y = (0.5[v_p^{ph} + v_w^{ph}] h_w^x + 0.5[v_p^{ph} + v_e^{ph}] h_e^x) / (2\tilde{h}_p^x). \quad (40)$$

Аппроксимация производной по времени. Для построения аппроксимации производной по времени воспользуемся транспортной теоремой Рейнольдса:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_p^{(x,y)}(t)} T dx dy = \int_{S_p^{(x,y)}(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dx dy + \int_{\partial S_p^{(x,y)}(t)} (Tv \cdot N) d\gamma, \quad (41)$$

где v – скорость движения границы ячейки $S_p^{(x,y)}(t)$. Проинтегрировав соотношение (41) по отрезку $[t_k, t_{k+1}]$, получим

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_p^{(x,y)}(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d}{dt} \int_{S_p^{(x,y)}(t)} T dx dy dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\partial S_p^{(x,y)}(t)} (Tv \cdot N) d\gamma dt. \quad (42)$$

Рассмотрим слагаемые, стоящие в правой части равенства (42). Первое слагаемое аппроксимируем следующим образом:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d}{dt} \int_{S_P^{(x,y)}(t)} T dx dy dt = \widehat{T}_P \sum_{q=1}^4 \widehat{dS}_q^{(x,y)} - T_P \sum_q dS_q^{(x,y)}. \quad (43)$$

Площади ячеек $dS_q^{(x,y)}$ и $\widehat{dS}_q^{(x,y)}$ будем вычислять по формуле трапеций, используя значения координат вершин этих ячеек на слое t_k и t_{k+1} соответственно. Для $dS_q^{(x,y)}$, $q = \overline{1,4}$, имеем

$$dS_1^{(x,y)} = \frac{(y_n - y_P) + (y_{ne} - y_e) h_e^x}{2} = \frac{[h_n^y + h_{ne}^y] h_e^x}{8},$$

$$dS_2^{(x,y)} = \frac{[h_n^y + h_{nw}^y] h_w^x}{8}, \quad dS_3^{(x,y)} = \frac{[h_s^y + h_{sw}^y] h_w^x}{8}, \quad dS_4^{(x,y)} = \frac{[h_s^y + h_{se}^y] h_e^x}{8}.$$

Расчётная ячейка $S_P^{(x,y)}(t)$ перемещается только в направлении оси y , т.е. $v = (0, v^y)$. Поэтому для второго слагаемого в правой части соотношения (42) справедливо равенство

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\partial S_P^{(x,y)}(t)} (Tv \cdot N) d\gamma dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{\alpha, \beta \in V} \int_{\gamma_{\alpha\beta}} T v^y N_{\alpha\beta}^y d\gamma dt. \quad (44)$$

Для интегралов вдоль “горизонтальных” границ получаем

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\gamma_{\alpha\beta}} T v^y N_{\alpha\beta}^y d\gamma dt \approx \tau \left(\Delta \gamma_{\alpha\beta} [T]^h \frac{v_\alpha^y + v_\beta^y}{2} N_{\alpha\beta}^y \right) \Big|_{t=t_k}^{t=t_{k+1}} = \tau \left(-\delta x_{\alpha\beta} [\widehat{T}]^h \frac{v_\alpha^y + v_\beta^y}{2} \right). \quad (45)$$

Здесь $[\widehat{T}]^h = \widehat{T}_n$ для “северных” границ γ_{nen} , γ_{nnw} и $[\widehat{T}]^h = \widehat{T}_s$ для “южных” границ γ_{sws} , γ_{sse} . Скорости движения v_α^y , $\alpha \in V$, вершин контрольного объёма равны средним значениям, вычисленным по соответствующим значениям скоростей узлов сетки, например,

$$v_n^y = 0.5[v_P^y + v_N^y], \quad v_{ne} = 0.25[v_P^y + v_N^y + v_E^y + v_{NE}^y]$$

и т.д. Суммируя равенства (45) по “северным” и “южным” границам ячейки, приходим к следующей формуле для приближённого вычисления интеграла (44):

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\partial S_P^{(x,y)}(t)} (Tv \cdot N) d\gamma dt \approx -\tau (\bar{v}_n^y \widehat{T}_n - \bar{v}_s^y \widehat{T}_s) \bar{h}_P^x. \quad (46)$$

Здесь скорость \bar{v}^y вычисляется по формулам

$$\bar{v}_n^y = (0.5[v_n^y + v_{ne}^y] h_e^x + 0.5[v_n^y + v_{nw}^y] h_w^x) / (2\bar{h}_P^x), \quad \bar{v}_s^y = (0.5[v_s^y + v_{se}^y] h_e^x + 0.5[v_s^y + v_{sw}^y] h_w^x) / (2\bar{h}_P^x).$$

Разделив равенства (43) и (46) на шаг τ , найдём аппроксимацию производной по времени на подвижной сетке $\omega^{(x,y)}(t)$:

$$\mathcal{T}_P^{(x,y)}(T) dS_P^{(x,y)} = (T_P dS_P^{(x,y)})_t - (\bar{v}_n^y \widehat{T}_n - \bar{v}_s^y \widehat{T}_s) \bar{h}_P^x. \quad (47)$$

Разностный оператор (47) можно преобразовать к виду

$$\mathcal{T}_P^{(x,y)}(T) dS_P^{(x,y)} = (T_P dS_P^{(x,y)})_t - 0.5[\widehat{h}_n^y (\widehat{T}_P \bar{v}_P^y)_{\bar{y}} + \widehat{h}_s^y (\widehat{T}_P \bar{v}_P^y)_{\bar{y}}] \bar{h}_P^x, \quad (48)$$

где $\bar{v}_P^y = (0.5[v_P^y + v_e^y] h_e^x + 0.5[v_P^y + v_w^y] h_w^x) / (2\bar{h}_P^x)$.

По аналогии с [19] преобразуем аппроксимацию производной по времени (48) к недивергентному виду. Рассмотрим верхнюю часть ячейки $S_P^{(x,y)}$, т.е. $S_1^{(x,y)} \cup S_2^{(x,y)}$. Воспользуемся формулами разностного дифференцирования произведения [24]. Для разностной производной по времени получаем

$$([dS_1^{(x,y)} + dS_2^{(x,y)}]T_P)_t = (dS_1^{(x,y)} + dS_2^{(x,y)})T_{P,t} + \left(\frac{h_e^x[h_{n,t}^y + h_{ne,t}^y]}{8} + \frac{h_w^x[h_{n,t}^y + h_{nw,t}^y]}{8} \right) \widehat{T}_P.$$

Для разностной производной по переменной y имеем

$$(\widehat{T} \bar{v}_P^y)_{\bar{y}} = \bar{v}_{P,\bar{y}}^y \widehat{T}_P + \bar{v}_n^y \widehat{T}_{P,\bar{y}}.$$

В силу соотношения (23) производная по времени от шага по пространству выражается равенствами

$$\begin{aligned} 0.5(h_{n,t}^y + h_{ne,t}^y) &= [y_{n,t} - y_{P,t}] + [y_{ne,t} - y_{e,t}] = [v_n^y - v_P^y] + [v_{ne}^y - v_e^y], \\ 0.5(h_{n,t}^y + h_{nw,t}^y) &= [y_{n,t} - y_{P,t}] + [y_{nw,t} - y_{w,t}] = [v_n^y - v_P^y] + [v_{nw}^y - v_w^y], \end{aligned}$$

из которых вытекает, что

$$\left(\frac{h_e^x[h_{n,t}^y + h_{ne,t}^y]}{8} + \frac{h_w^x[h_{n,t}^y + h_{nw,t}^y]}{8} \right) \widehat{T}_P = \frac{\widehat{h}_P^x \widehat{h}_n^y}{2} \bar{v}_{P,\bar{y}}^y \widehat{T}_P.$$

Откуда, приводя подобные члены, в регулярной точке сетки получаем равенство

$$([dS_1^{(x,y)} + dS_2^{(x,y)}]T_P)_t - \frac{\widehat{h}_P^x \widehat{h}_n^y}{2} (\widehat{T}_P \bar{v}_P^y)_{\bar{y}} = (dS_1^{(x,y)} + dS_2^{(x,y)})T_{P,t} - \frac{\widehat{h}_P^x \widehat{h}_n^y}{2} \bar{v}_n^y \widehat{T}_{P,\bar{y}}. \tag{49}$$

Аналогично, для нижней части ячейки $S_P^{x,y}$ имеем

$$([dS_3^{(x,y)} + dS_4^{(x,y)}]T_P)_t - \frac{\widehat{h}_P^x \widehat{h}_s^y}{2} (\widehat{T}_P \bar{v}_P^y)_{\bar{y}} = (dS_3^{(x,y)} + dS_4^{(x,y)})T_{P,t} - \frac{\widehat{h}_P^x \widehat{h}_s^y}{2} \bar{v}_s^y \widehat{T}_{P,\bar{y}}. \tag{50}$$

Используя выражения (48)–(50), получим недивергентную форму записи аппроксимации производной по времени:

$$\mathcal{T}_P^{(x,y)}(T) dS_P^{(x,y)} = T_{P,t} dS_P^{(x,y)} - 0.5[\widehat{h}_n^y \bar{v}_n^y \widehat{T}_{P,\bar{y}} + \widehat{h}_s^y \bar{v}_s^y \widehat{T}_{P,\bar{y}}] \widehat{h}_P^x. \tag{51}$$

Во внутренних точках сетки $\omega^{(x,y)}(t)$ разностная схема для задачи (1)–(4) имеет вид

$$\mathcal{T}_P^{(x,y)}(T) \widehat{dS}_P^{(x,y)} = [\mathcal{L}_P^{(x,y)}(\widehat{T}) + \mathcal{E}_{P*}^{(x,y)}(\widehat{T}) \delta_{PP*}] \widehat{dS}_P^{(x,y)}. \tag{52}$$

Разностная схема (52) является консервативной, коэффициенты $M^{\tau\tau}$, $M^{\tau y}$, M^{yy} в ней взяты с верхнего временного слоя, а соответствующая система нелинейных сеточных уравнений решается относительно вектора неизвестных, компонентами которого являются температуры в твёрдой и жидкой фазах и скорость межфазной границы.

4. Эквивалентность разностных схем.

Утверждение 2. *Разностная схема (19), построенная с помощью метода выпрямления фронта, и разностная схема (52), построенная на подвижной сетке, удовлетворяющей соотношению (23), алгебраически эквивалентны.*

Доказательство. Выполним в разностной схеме (52) дискретный аналог замены переменных (5). Нетрудно проверить, что шаги сеток $\omega_h^{(x,y)}$ и $\omega_h^{(\xi,\eta)}$ связаны соотношениями

$$h_e^x = h_e^\xi, \quad h_w^x = h_w^\xi, \tag{53}$$

$$h_n^y = y_N - y_P = \varphi(t_k, \xi_P, \eta_N) - \varphi(t_k, \xi_P, \eta_P) = l_n(\eta_N - \eta_P) = l_n h_n^\eta, \\ h_\alpha^y = l_\alpha h_\alpha^\eta, \quad \widehat{h}_\alpha^y = \widehat{l}_\alpha h_\alpha^\eta, \quad \alpha \in V. \quad (54)$$

В силу равенств (7), (22) скорости движения вершин контрольного объёма v_α^y , $\alpha \in V$, можно записать следующим образом:

$$v_\alpha^y = \varphi_{\alpha,t}, \quad \alpha \in V. \quad (55)$$

Выполним замену переменных в разностном операторе $\mathcal{L}_P^{(x,y)}(\widehat{T}) \widehat{dS}_P^{(x,y)}$. Последовательно рассмотрим потоки через все границы ячейки $S_P^{(x,y)}$. Начнём с “северной” границы, поток через которую определяется выражением (30). Замена переменных в разностных аналогах смешанных производных, входящих в (30), приводит к следующему равенству:

$$\widehat{\Delta} \gamma_{ne n} M_{ne}^{y\mu} \widehat{T}_{n,\mu} + \widehat{\Delta} \gamma_{n nw} M_{nw}^{y\mu} \widehat{T}_{n,\bar{\mu}} = 0.5[h_e^\xi L_{ne}^{\eta\xi} \widehat{T}_{n,\xi} + h_w^\xi L_{nw}^{\eta\xi} \widehat{T}_{n,\bar{\xi}}], \quad (56)$$

потому что $\widehat{\Delta} \gamma_{ne n} \widehat{T}_{n,\mu} = 0.5 h_e^\xi \widehat{T}_{n,\xi}$, $\widehat{\Delta} \gamma_{n nw} \widehat{T}_{n,\bar{\mu}} = 0.5 h_w^\xi \widehat{T}_{n,\bar{\xi}}$ и

$$M_{ne}^{y\mu} = \varkappa_{ne}(-\widehat{y}_{n,x}) = \varkappa_{ne}(\widehat{y}_{nE} - \widehat{y}_n)/h_e^x = -\varkappa_{ne}[\varphi(t_{k+1}, \xi_E, \eta_n) - \varphi(t_{k+1}, \xi_P, \eta_n)]/h_e^\xi = \\ = \varkappa_{ne}(-\widehat{\varphi}_{n,\xi}) = L_{ne}^{\eta\xi}, \quad M_{nw}^{y\mu} = L_{nw}^{\eta\xi}.$$

С помощью соотношений (54) преобразуем члены, связанные с $\widehat{T}_{P,y}$, к виду

$$M_{ne}^{yy} \widehat{T}_{P,y} = \varkappa_{ne}[1 + (\widehat{y}_{n,x})^2] \widehat{T}_{P,y} = \varkappa_{ne}[1 + (\widehat{\varphi}_{n,\xi})^2] (\widehat{T}_N - \widehat{T}_P) / \widehat{h}_n^y = \varkappa_{ne}[1 + (\widehat{\varphi}_{n,\xi})^2] / (\widehat{l}_n) \widehat{T}_{P,\eta} = L_{ne}^{yy} \widehat{T}_{P,\eta}, \\ M_{nw}^{yy} \widehat{T}_{P,y} = L_{nw}^{yy} \widehat{T}_{P,\eta},$$

откуда

$$0.5[h_e^x M_{ne}^{yy} + h_w^x M_{nw}^{yy}] \widehat{T}_{P,y} = 0.5[h_e^\xi L_{ne}^{\eta\eta} + h_w^\xi L_{nw}^{\eta\eta}] \widehat{T}_{P,\eta}. \quad (57)$$

Аналогично выполним замену переменных в выражении (31) для потока через “южную” границу:

$$\widehat{\Delta} \gamma_{sse} M_{se}^{y\mu} \widehat{T}_{s,\mu} + \widehat{\Delta} \gamma_{sw s} M_{sw}^{y\mu} \widehat{T}_{s,\bar{\mu}} = 0.5[h_s^\xi L_{se}^{\eta\xi} \widehat{T}_{s,\xi} + h_w^\xi L_{sw}^{\eta\xi} \widehat{T}_{s,\bar{\xi}}], \quad (58)$$

$$0.5[h_e^x M_{se}^{yy} + h_w^x M_{sw}^{yy}] \widehat{T}_{P,\bar{y}} = 0.5[h_e^\xi L_{se}^{\eta\eta} + h_w^\xi L_{sw}^{\eta\eta}] \widehat{T}_{P,\bar{\eta}}. \quad (59)$$

Рассмотрим поток (36) через “восточную” границу. Так как $\widehat{h}_{ne}^y \widehat{T}_{e,y} = h_n^\eta \widehat{T}_{e,\eta}$, $\widehat{h}_{se}^y \widehat{T}_{e,\bar{y}} = h_s^\eta \widehat{T}_{e,\bar{\eta}}$ и $M_{ne}^{\mu y} = L_{ne}^{\xi\eta}$, $M_{se}^{\mu y} = L_{se}^{\xi\eta}$, то для смешанных производных в (36) будем иметь

$$0.5[\widehat{h}_{ne}^y M_{ne}^{\mu y} \widehat{T}_{e,y} + \widehat{h}_{se}^y M_{se}^{\mu y} \widehat{T}_{e,\bar{y}}] = 0.5[h_n^\eta L_{ne}^{\xi\eta} \widehat{T}_{e,\eta} + h_s^\eta L_{se}^{\xi\eta} \widehat{T}_{e,\bar{\eta}}]. \quad (60)$$

Для производной в направлении μ получаем

$$0.5[\widehat{h}_{ne}^y M_{ne}^{\mu\mu} + \widehat{h}_{se}^y M_{se}^{\mu\mu}] \widehat{T}_{P,\mu} = 0.5[h_n^\eta L_{ne}^{\xi\xi} + h_s^\eta L_{se}^{\xi\xi}] \widehat{T}_{P,\xi}. \quad (61)$$

Здесь воспользовались тем, что в силу соотношений (53) и (54) справедливы равенства

$$\widehat{h}_{ne}^y M_{ne}^{\mu\mu} \widehat{T}_{P,\mu} = \widehat{h}_{ne}^y \varkappa_{ne} \sqrt{1 + (\widehat{y}_{P,x})^2} \widehat{T}_{P,\mu} = \widehat{h}_{ne}^y \varkappa_{ne} (\widehat{T}_E - \widehat{T}_P) / h_e^x = \widehat{l}_n h_n^\eta \varkappa_{ne} \widehat{T}_{P,\xi} = h_n^\eta L_{ne}^{\xi\xi} \widehat{T}_{P,\xi}, \\ \widehat{h}_{se}^y M_{se}^{\mu\mu} \widehat{T}_{P,\mu} = h_s^\eta L_{se}^{\xi\xi} \widehat{T}_{P,\xi}.$$

Для потока (37) на “западной” границе имеем

$$0.5[\widehat{h}_{nw}^y M_{nw}^{\mu y} \widehat{T}_{w,y} + \widehat{h}_{sw}^y M_{sw}^{\mu y} \widehat{T}_{w,\bar{y}}] = 0.5[h_n^\eta L_{nw}^{\xi\eta} \widehat{T}_{w,\eta} + h_s^\eta L_{sw}^{\xi\eta} \widehat{T}_{w,\bar{\eta}}], \quad (62)$$

$$0.5[\widehat{h}_{nw}^y M_{nw}^{\mu\mu} + \widehat{h}_{sw}^y M_{sw}^{\mu\mu}] \widehat{T}_{P,\bar{\mu}} = 0.5[h_n^\eta L_{nw}^{\xi\xi} + h_s^\eta L_{sw}^{\xi\xi}] \widehat{T}_{P,\bar{\xi}}. \quad (63)$$

Учитывая соотношения (56)–(63) в формуле (38), получаем

$$\mathcal{L}_P^{(x,y)}(\widehat{T}) \widehat{dS}_P^{(x,y)} = \mathcal{L}_P^{(\xi,\eta)}(\widehat{T}) dS_P^{(\xi,\eta)}.$$

На фронте кристаллизации в уравнение (52) входит слагаемое, отвечающее за выполнение условия Стефана и описывающее скачок теплового потока при изменении агрегатного состояния вещества. Из формул (15) и (40) следует, что $(\overline{v}^{\text{ph}})^y = (\overline{v}^{\text{ph}})^\eta$, откуда вытекает, что на границе раздела фаз выполняется равенство

$$\mathcal{E}^{(x,y)}(\widehat{T}) \widehat{dS}_P^{(x,y)} = \mathcal{E}^{(\xi,\eta)}(\widehat{T}) dS_P^{(\xi,\eta)}. \quad (64)$$

Выполним замену переменных в $\mathcal{T}_P^{(x,y)}(T) \widehat{dS}_P^{(x,y)}$. В силу соотношений (53) и (54) имеем

$$dS_1^{(x,y)} = (h_n^y + h_{ne}^y) h_e^x / 8 = (l_n + l_{ne}) h_e^\xi h_n^\eta / 8.$$

Площади остальных четвертей ячейки преобразуются аналогичным образом. Поэтому первое слагаемое в аппроксимации (51) запишется в виде

$$T_{P,t} dS_P^{(x,y)} = T_{P,t} \bar{l}_P dS_P^{(\xi,\eta)}. \quad (65)$$

Воспользовавшись формулой (55), для второго слагаемого в (51) получим

$$0.5[\widehat{h}_n^y \bar{v}_n^y \widehat{T}_{P,\bar{y}} + \widehat{h}_s^y \bar{v}_s^y \widehat{T}_{P,\bar{y}}] \widehat{h}_P^x = 0.5[h_n^\eta (\overline{\varphi}_t)_n \widehat{T}_{P,\bar{\eta}} + h_s^\eta (\overline{\varphi}_t)_s \widehat{T}_{P,\bar{\eta}}] \widehat{h}_P^\xi. \quad (66)$$

Замена слагаемых в аппроксимации (51) их выражениями (65) и (66) приводит к равенству

$$\mathcal{T}_P^{(x,y)}(T) \widehat{dS}_P^{(x,y)} = \mathcal{T}_P^{(\xi,\eta)}(T) dS_P^{(\xi,\eta)}.$$

В результате показано, что

$$[\mathcal{T}_P^{(x,y)}(T) - \mathcal{L}_P^{(x,y)}(\widehat{T}) - \mathcal{E}_P^{(x,y)}(\widehat{T}) \delta_{PP^*}] \widehat{dS}_P^{(x,y)} = [\mathcal{T}_P^{(\xi,\eta)}(T) - \mathcal{L}_P^{(\xi,\eta)}(\widehat{T}) - \mathcal{E}_P^{(\xi,\eta)}(\widehat{T}) \delta_{PP^*}] dS_P^{(\xi,\eta)}.$$

Таким образом, доказано, что схемы (52) и (19) алгебраически эквивалентны.

Заключение. Для классической двухфазной задачи Стефана выделен класс консервативных разностных схем, для которых метод выпрямления фронта и метод, основанный на использовании подвижных сеток, алгебраически эквивалентны. Получены дивергентная и недивергентная формы записи, аппроксимирующие соответствующие формы записи исходной дифференциальной задачи. Для разностного оператора, аппроксимирующего на неподвижной сетке диссипативные члены в уравнении теплопроводности, можно доказать свойства самосопряжённости и отрицательной определённости. Доказательство указанных свойств является несложным, но громоздким и поэтому в работе не приводится. В силу алгебраической эквивалентности предложенных разностных схем аналогичными свойствами обладает и разностный оператор на подвижной сетке. Таким образом, построенный класс схем наследует основные свойства исходной дифференциальной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакирова О.И. Численное моделирование процесса зонной плавки на основе решения задачи о фазовом переходе в бинарной системе // Математическое моделирование. Получение металлов и полупроводниковых структур. М., 1986. С. 142–158.
2. Дегтярев Л.М., Дроздов В.В., Иванова Т.С. Метод адаптивных к решению сеток в сингулярно-возмущенных одномерных краевых задачах // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 7. С. 1160–1168.

3. Фрязинов И.В., Забелина М.П. Сеточный метод решения задачи Стефана для бинарной системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 7. С. 1188–1197.
4. Vermolen F.J., Vuijk C. A mathematical model for the dissolution of particles in multi-component alloys // J. of Comput. and Appl. Math. 2000. V. 126. P. 233–254.
5. Muray W.D., Landis F. Numerical and machine solutions of the transient heat conduction problems involving melting or freezing // J. Heat Transfer. 1959. V. 81. P. 106–112.
6. Kutluay S. Numerical schemes for one-dimensional Stefan-like problems with a forcing term // Appl. Math. and Comput. 2005. V. 168. P. 1159–1168.
7. Мажукин А.В., Мажукин В.И. Динамическая адаптация в параболических уравнениях // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2007. Т. 47. № 11. С. 1913–1936.
8. Sekhon M., Lent B., Dost S. Numerical study of liquid phase diffusion growth of SiGe subjected to accelerated crucible rotation // J. of Crystal Growth. 2016. V. 438. P. 90–98.
9. Friaizinov I.V., Marchenko M.P., Mazhorova O.S. Transient simulation of crystal growth by Bridgman technique under normal and low gravity // Proc. of Microgravity Science and Low Gravity / Aerospace congress. Moscow, 1991. P. 179–187.
10. Lan C.W., Chen F.C. A finite volume method for solute segregation in directional solidification and comparison with a finite element method // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1996. V. 131. P. 191–207.
11. Zhou Yu., North T.H. Kinetic modelling of diffusion-controlled, two-phase moving interface problems // Model. and Simul. in Material Science and Engineering. 1993. V. 1. № 4. P. 505–516.
12. Illingworth T.C., Golosnoy I.O. Numerical solutions of diffusion-controlled moving boundary problems which conserve solute // J. of Comput. Physics. 2005. V. 209. P. 207–225.
13. Pandelaers L., Verhaeghe F., Wollants P., Blanpain B. An implicit conservative scheme for coupled heat and mass transfer problems with multiple moving interfaces // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2011. V. 54. № 5–6. P. 1039–1045.
14. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М., 2003.
15. Мажорова О.С., Попов Ю.П., Щерица О.В. Алгоритм расчета задачи о фазовом переходе в многокомпонентной системе // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 7. С. 1051–1060.
16. Мажорова О.С., Попов Ю.П., Щерица О.В. Метод численного решения задач кристаллизации многокомпонентных растворов / Препринт Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. М., 2002. № 18.
17. Nobeoka M., Takagi Y., Okano Y et al. Numerical simulation of InGaSb crystal growth by temperature gradient method under normal- and micro-gravity fields // J. of Crystal Growth. 2014. V. 385. P. 66–71.
18. Landau H.G. Heat conduction in a melting solid // J. of Appl. Math. 1950. V. 8. P. 81–94.
19. Мажорова О.С., Попов Ю.П., Щерица О.В. Консервативные разностные схемы для термо-диффузионной задачи Стефана // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 7. С. 897–905.
20. Gusev A.O., Shcheritsa O.V., Mazhorova O.S. Conservative finite volume strategy for investigation of solution crystal growth techniques // Computers & Fluids. 2020. V. 202. P. 104501.
21. Vinokur M. Conservation equations of gasdynamics in curvilinear coordinate system // J. of Comput. Phys. 1974. V. 14. P. 105–125.
22. Steger J. Implicit finite-difference simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometries // American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. 1978. V. 16. № 7. P. 679–686.
23. Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. New York, 1981.
24. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 10.03.2021 г.
После доработки 10.03.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.