ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 7, с. 922–931

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.633.2+517.958:536.71

СПЕКТРАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЯВНОЙ ТРЁХСЛОЙНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© 2021 г. А. А. Злотник, Б. Н. Четверушкин

Изучаются разностные схемы, связанные с упрощённой линеаризованной многомерной гиперболической квазигазодинамической системой дифференциальных уравнений. Показывается, что явную двухслойную векторную разностную схему с релаксацией потоков для гиперболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, являющегося возмущением уравнения переноса с параметром-множителем при старших производных, можно свести к явной трёхслойной разностной схеме. Анализируется спектральное условие равномерной по времени устойчивости такой явной трёхслойной разностной схемы в случае постоянных коэффициентов и выводятся как достаточные, так и необходимые условия его справедливости, в том числе в форме условий типа Куранта на отношение шагов по времени и по пространству.

DOI: 10.31857/S0374064121070062

Введение. Гиперболическая квазигазодинамическая (ГКГД) система уравнений представляет собой специальным образом возмущённую систему уравнений газовой динамики, содержащую слагаемые с производными второго порядка по пространственным и временно́й переменным с малым параметром-множителем $\tau > 0$. Она применяется для построения семейства трёхслойных и двухслойных векторных разностных методов численного решения различных задач газовой динамики [1]. Отметим, что параболические КГД системы представлены в [2, 3]. В [4, 5] установлен набор математических свойств ГКГД системы, в том числе выведены равномерные по времени оценки для соответствующей линеаризованной на постоянном решении системы. Изучались также гиперболическое второго порядка возмущение с параметром τ параболической начально-краевой задачи без конвективных членов [6, 7] и с ними [8] и устойчивость соответствующих трёхслойного с весом и двухслойного векторного численных методов [9]. Равномерная по времени устойчивость неявных трёхслойной с весом и двухслойной векторной разностных схем для линеаризованной ГКГД системы доказана в [10].

На практике наибольший интерес представляют явные разностные схемы для ГКГД системы. Однако обоснование равномерной по τ устойчивости их линеаризаций в настоящее время отсутствует. Применить для этого энергетический метод подобно [4, 10] пока не удалось ввиду достаточно сложной структуры линеаризованных схем, в том числе и по причине наличия в них аппроксимаций слагаемых как с первыми, так и со вторыми производными по пространственным и временно́й переменным, при этом перед вторыми производными присутствует параметр-множитель τ.

Чтобы продвинуться в изучении этого вопроса, в настоящей работе вместо ГКГД системы уравнений рассматривается упрощённый случай одного гиперболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, являющегося возмущением уравнения переноса с параметром τ при вторых производных. Во-первых, показывается, что явную двухслойную векторную разностную схему с релаксацией потоков типа [11] для такого уравнения можно свести к явной трёхслойной разностной схеме. В этой трёхслойной схеме параметр τ перед аппроксимацией второй производной по t умножен на некоторый множитель больше единицы. Во-вторых, и это главное, анализируется спектральное условие равномерной по времени устойчивости такой явной трёхслойной схемы в случае постоянных коэффициентов. Выводятся как достаточные, так и близкие к ним необходимые условия справедливости спектрального условия, в том числе в форме условий типа Куранта на отношение шагов по времени и пространству. Эти условия не зависят от τ. В число необходимых условий входит условие преобладания коэффициентов вязких слагаемых над коэффициентами переноса. Вывод основан на анализе расположения на комплексной плоскости корней соответствующего характеристического многочлена с комплексными коэффициентами с помощью обобщённого критерия Рауса–Гурвица [12, гл. XVI, § 19]. Предварительно анализируются также критерии аналогичного спектрального условия устойчивости для самого дифференциального уравнения и разностной схемы с обнулением параметра τ. Для уравнения таким критерием является условие своего рода преобладания матрицы вязких слагаемых над вектором коэффициентов переноса; условия подобного рода играли существенную роль в [4, 10]. Для указанной схемы критерием служит условие типа Куранта. Полученные результаты являются достаточно обнадёживающими для последующего анализа соответствующих свойств разностных схем для ГКГД системы.

1. Гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка и сведение явной двухслойной векторной разностной схемы с релаксацией потоков для него к трёхслойной схеме. Рассмотрим гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка с параметром-множителем $\tau > 0$ при старших производных

$$\tau\partial_t^2 u + \partial_t u + \partial_i(b_i(x)u) - \tau\,\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) = f. \tag{1}$$

Искомая функция $u = u(x,t)$ определена и уравнение рассматривается при $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$, а $n \geqslant 1$. Здесь и ниже $A(x) = \mathrm{diag}\,\{a_1(x),\ldots,a_n(x)\}$ – диагональная матрица, операторы div и ∇ берутся по x, а по повторяющимся индексам i, j предполагается суммирование от 1 до n.

Введём равномерную сетку ω_{kh} с узлами $x_{kl} = lh_k$, $l \in \mathbb{Z}$, и шагом $h_k > 0$, сетку, сдвинутую на $h_k/2$, с узлами $x_{k(l-1/2)} = (l-(1/2))h_k$, $l \in \mathbb{Z}$, и сеточные операторы

$$s_k v_{l-1/2} = \frac{v_{l-1} + v_l}{2}, \quad \delta_k v_{l-1/2} = \frac{v_l - v_{l-1}}{h_k}, \quad \delta_k^* w_l = \frac{w_{l+1/2} - w_{l-1/2}}{h_k}, \quad \Lambda_k v_l = \frac{v_{l+1} - 2v_l + v_{l-1}}{h_k^2},$$

где $v_l = v(x_{kl})$, $w_{l-1/2} = w(x_{k(l-1/2)})$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Положим также $h = (h_1,\ldots,h_n)$ и введём сетку $\omega_h := \omega_{1h} \times \ldots \times \omega_{nh}$ и операторы $s = (s_1,\ldots,s_n)$, $\nabla_h = (\delta_1,\ldots,\delta_n)$.

Введём равномерную сетку $\overline{\omega}^{h_t}$ с узлами $t_m = mh_t$, $m \geqslant 0$, и шагом $h_t > 0$ и разностные операторы

$$\bar\delta_t y = \frac{y - \check y}{h_t}, \quad \delta_t y = \frac{\widehat y - y}{h_t}, \quad \mathring{\delta}_t y = \frac{\widehat y - \check y}{2h_t}, \quad \Lambda_t y = \delta_t\bar\delta_t y = \frac{\widehat y - 2y + \check y}{h_t^2},$$

где $y^m = y(t_m)$, $\check y^m = y^{m-1}$ и $\widehat y^m = y^{m+1}$. Пусть $\omega^{h_t} = \overline{\omega}^{h_t}\backslash\{0\}$.

Рассмотрим явную двухслойную по t векторную разностную схему с релаксацией потоков типа [11] для уравнения (1), симметричную и трёхточечную по x_1, $\ldots$, x_n:

$$\widehat\varphi = e^{-h_t/\tau}\varphi - (1 - e^{-h_t/\tau})(Bsv - \tau A\nabla_h v), \tag{2}$$

$$\delta_t v = \mathrm{div}_h\widehat\varphi + f. \tag{3}$$

Искомыми являются функция $v \approx u$, определённая на сетке $\omega_h \times \overline{\omega}^{h_t}$, и вспомогательная вектор-функция $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)^{\mathrm{T}}$ с компонентами φ_k, определёнными на сетке, сдвинутой на $h_k/2$ по x_k относительно $\omega_h \times \overline{\omega}^{h_t}$. Здесь $B(x) = \mathrm{diag}\,\{b_1(x),\ldots,b_n(x)\}$ – диагональная матрица, $\mathrm{div}_h\varphi = \delta_1^*\varphi_1 + \ldots + \delta_n^*\varphi_n$ и уравнения схемы записываются на тех же сетках, на которых определены сами искомые функции.

Сведём двухслойную векторную схему к трёхслойной схеме стандартного типа для v.

Теорема 1. *Функция v удовлетворяет явной по времени симметричной и трёхточечной по всем переменным x_1, $\ldots$, x_n, t (трёхслойной по t) разностной схеме*

$$\tau\alpha_0\left(\frac{h_t}{2\tau}\right)\Lambda_t v + \mathring{\delta}_t v + \mathrm{div}_h(Bsv) - \tau\,\mathrm{div}_h(A\nabla_h v) = \tilde f \quad \text{на} \quad \omega_h \times \omega^{h_t}, \tag{4}$$

где $\alpha_0(\zeta) := \zeta \operatorname{cth} \zeta$ *и свободный член имеет вид*

$$\tilde{f} := \frac{f - e^{-h_t/\tau}\check{f}}{1 - e^{-h_t/\tau}}. \tag{5}$$

Доказательство. Применим оператор div_h к уравнению (2) и получим уравнение

$$\operatorname{div}_h\widehat{\varphi} = e^{-h_t/\tau}\operatorname{div}_h\varphi - (1 - e^{-h_t/\tau})\operatorname{div}_h(Bsv - \tau A\nabla_h v).$$

Исключим из него функцию φ, выразив $\operatorname{div}_h\widehat{\varphi}$ и $\operatorname{div}_h\varphi = \bar{\delta}_t v - \check{f}$ в силу уравнения (3):

$$\delta_t v - f = e^{-h_t/\tau}(\bar{\delta}_t v - \check{f}) - (1 - e^{-h_t/\tau})\operatorname{div}_h(Bsv - \tau A\nabla_h v).$$

Симметризуем запись последнего уравнения умножением его на $e^{h_t/(2\tau)}$:

$$e^{h_t/(2\tau)}\delta_t v - e^{-h_t/(2\tau)}\bar{\delta}_t v + 2\operatorname{sh}\frac{h_t}{2\tau}\operatorname{div}_h(Bsv - \tau A\nabla_h v) = e^{h_t/(2\tau)}f - e^{-h_t/(2\tau)}\check{f}.$$

Далее воспользуемся простыми формулами

$$\delta_t v = \mathring{\delta}_t v + (h_t/2)\Lambda_t v, \quad \bar{\delta}_t v = \mathring{\delta}_t v - (h_t/2)\Lambda_t v$$

и перейдём к уравнению

$$h_t\operatorname{ch}\frac{h_t}{2\tau}\Lambda_t v + 2\operatorname{sh}\frac{h_t}{2\tau}\mathring{\delta}_t v + 2\operatorname{sh}\frac{h_t}{2\tau}\operatorname{div}_h(Bsv - \tau A\nabla_h v) = e^{h_t/(2\tau)}f - e^{-h_t/(2\tau)}\check{f}.$$

Поделив его на $2\operatorname{sh}(h_t/(2\tau))$, окончательно получим для v явную трёхслойную по времени разностную схему (4), (5). Теорема доказана.

Отметим, что $\alpha_0(\zeta) > \max\{1, \zeta\}$ при $\zeta > 0$ и $\alpha_0(\zeta) = \zeta(1 + O(e^{-2\zeta}))$ при $\zeta \to +\infty$; при этом $|\alpha_0(\zeta) - \zeta| < 0.075,\ 0.015,\ 0.0027$ уже при $\zeta \geqslant 2, 3, 4$ соответственно. Обратим также внимание на то, что в пределе при $h_t/(2\tau) \to +\infty$ происходит замена $\tau\alpha_0(h_t/(2\tau))$ на $h_t/2$ и трёхслойная разностная схема (4) переходит в явную двухслойную схему

$$\delta_t v + \operatorname{div}_h(Bsv) - \tau\operatorname{div}_h(A\nabla_h v) = f,$$

поскольку $(h_t/2)\Lambda_t v + \mathring{\delta}_t v = \delta_t v$.

Обратим внимание на то, что в случае постоянных коэффициентов умножение разностной схемы (4) на τ и замена шагов $(h, h_t) \mapsto (h/\tau, h_t/\tau)$ приводит к частному случаю этой схемы с $\tau = 1$ (включая аргумент коэффициента $\alpha_0(h_t/(2\tau))$). Поэтому некоторые свойства этой схемы не зависят от значения τ. В том числе это относится к изучаемому ниже спектральному условию равномерной по времени устойчивости.

Существенно, что применённый выше способ сведения двухслойной схемы к трёхслойной можно использовать не только в рассмотренном скалярном случае, но и для самой ГКГД системы уравнений. Сведение других двухслойных векторных методов для гиперболических уравнений второго порядка к трёхслойным методам выполнялось, в том числе, в [10, 13, 14]. Отметим также, что большое количество двухслойных разностных схем для уравнения переноса приведено, например, в [15].

2. Многомерное уравнение переноса с возмущениями и явная трёхслойная разностная схема для него. Рассмотрим многомерное однородное уравнение переноса с возмущениями – слагаемыми, представляющими собой производные второго порядка от искомой функции по t и по x_i с параметрами-множителями:

$$\alpha_0\tau\partial_t^2 u + \partial_t u + b_i\partial_i u - \tau a_{ij}\partial_i\partial_j u = 0, \tag{6}$$

где b_i, a_{ij} – постоянные коэффициенты, $\alpha_0 > 0$, $\tau > 0$ – параметры. Напомним, что по повторяющимся индексам i, j предполагается суммирование от 1 до n. Введение параметра

α_0 обусловлено видом схемы (4) (от него легко освободиться заменами $\alpha_0\tau \mapsto \tau$, $a_{ij} \mapsto a_{ij}/\alpha_0$, но для наглядности этого делать не будем). Искомая функция $u(x,t)$ определена и уравнение (6) рассматривается на $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$. Функции $u|_{t=0}$ и $\partial_t u|_{t=0}$ считаем заданными. Не ограничивая общности будем считать, что матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ симметричная. Пусть $b = (b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}$.

Предварительно, во-первых, обратим внимание на то, что дифференцирование уравнения переноса $\partial_t u + b_i\partial_i u = f$ приводит к равенствам

$$\partial_t^2 u + b_j\partial_t\partial_j u = \partial_t f, \quad b_j\partial_j\partial_t u + b_j b_i\partial_j\partial_i u = b_j\partial_j f$$

и поэтому

$$\partial_t^2 u - b_i b_j\partial_j\partial_i u = \partial_t f - b_j\partial_j f.$$

Тем самым решение уравнения переноса удовлетворяет и уравнению второго порядка

$$\tau\partial_t^2 u + \partial_t u + b_i\partial_i u - \tau b_i b_j\partial_i\partial_j u = f + \tau(\partial_t f - b_j\partial_j f)$$

типа (6) с $\alpha_0 = 1$ при любом $\tau \neq 0$ (при $\tau = 0$ это само уравнение переноса). Возникшая матрица $b\bigotimes b$ с элементами $b_i b_j$ такова, что $b\bigotimes b \geqslant 0$, а $\operatorname{Ker} b\bigotimes b$ совпадает с ортогональным дополнением к вектору b. Поэтому полученное уравнение является вырождающимся при $n \geqslant 2$ или при $n = 1$ и $b_1 = 0$.

Во-вторых, умножение уравнения (6) на τ и замена переменных $(x,t) \mapsto (x/\tau, t/\tau)$ приводит к частному случаю уравнения (6) с $\tau = 1$. Поэтому ряд свойств решений этого уравнения, в том числе анализируемое ниже свойство, не зависят от значения τ.

Рассмотрим комплексные частные решения уравнения (6), имеющие вид

$$u(x,t) = e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}w(\xi,t), \quad x, \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0,$$

где i – мнимая единица, а символ “ $\cdot$ ” обозначает скалярное произведение векторов. Их подстановка в уравнение (6) приводит к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) относительно w:

$$\alpha_0\tau\partial_t^2 w + \partial_t w + \theta w = 0, \quad \theta := \mathrm{i}b_i\xi_i + \tau a_{ij}\xi_j\xi_i = \mathrm{i}b\cdot\xi + \tau A\xi\cdot\xi \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Изучим свойство равномерной ограниченности по t его решения. Пусть $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ – ядро и образ матрицы A (т.е. соответствующего линейного оператора, действующего в $\mathbb{R}^n$). Напомним, что так как $A = A^{\mathrm{T}}$, то $\mathbb{R}^n$ представляется в виде ортогональной прямой суммы подпространств $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$.

Теорема 2. *Для справедливости оценки*

$$\sup_{t\geqslant 0}|w(\xi,t)| < \infty \quad \text{для каждого} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{8}$$

при любых $w(\xi,0)$ и $\partial_t w(\xi,0)$ необходимо, чтобы выполнялось свойство $A \geqslant 0$.

Критериями (т.е. необходимыми и достаточными условиями) справедливости указанной оценки, кроме $A \geqslant 0$, служат:

1) если $A > 0$, то $\alpha_0|A^{-1/2}b|^2 = \alpha_0 A^{-1}b\cdot b \leqslant 1$;

2) если же $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$, то $b \in \operatorname{Im} A$ и при $\operatorname{Im} A \neq \{0\}$ имеем $\alpha_0\widetilde{A}^{-1}b\cdot b \leqslant 1$, где $\widetilde{A}$ – сужение A на $\operatorname{Im} A$, а иначе $b = 0$ при $\operatorname{Im} A = \{0\}$ (т.е. $A = 0$).

В частности, при $A = \operatorname{diag}\{a_1,\ldots,a_n\}$ критерием служит совокупность условий:

$$a_k \geqslant 0, \quad \text{причём если } a_k = 0, \text{ то } b_k = 0 \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant n; \quad \alpha_0\sum_{k:a_k>0}\frac{b_k^2}{a_k} \leqslant 1. \tag{9}$$

Доказательство. Характеристическое уравнение для ОДУ (7) имеет вид

$$r_2(z) \equiv \alpha_0\tau z^2 + z + \theta = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Свойство (8) эквивалентно тому, что оба корня многочлена $r_2(z)$ лежат в замкнутой левой полуплоскости $\bar{P}_l := \{z \in \mathbb{C}\colon\ z_R \leqslant 0\}$ и на мнимой оси нет кратных корней (т.е. $z = 0$ не является кратным корнем, что и имеет место). Здесь и ниже используется стандартная запись комплексных чисел в виде $z = z_R + \mathrm{i}z_I$.

Для анализа последнего свойства воспользуемся обобщённым критерием Рауса–Гурвица для многочленов с комплексными коэффициентами [12, гл. XVI, § 19]. Для этого запишем вспомогательный многочлен $-\mathrm{i}r_2(\mathrm{i}z) = z + \theta_I + \mathrm{i}(\alpha_0\tau z^2 - \theta_R)$ и определитель четвёртого порядка – результант (с точностью до знака) возникших двух многочленов с вещественными коэффициентами

$$V_4 = \begin{vmatrix} \alpha_0\tau & 0 & -\theta_R & 0 \\ 0 & 1 & \theta_I & 0 \\ 0 & \alpha_0\tau & 0 & -\theta_R \\ 0 & 0 & 1 & \theta_I \end{vmatrix}.$$

Его главный угловой минор второго порядка $V_2 = \alpha_0\tau$ положителен, а сам определитель равен

$$V_4 = \alpha_0\tau(\theta_R - \alpha_0\tau\theta_I^2) = \alpha_0\tau^2[A\xi\cdot\xi - \alpha_0(b\cdot\xi)^2].$$

Пусть сначала $V_4 \neq 0$. Тогда критерием того, что корни $r_2(z)$ лежат в открытой левой полуплоскости $P_l := \{z \in \mathbb{C}\colon\ z_R < 0\}$, является условие $V_4 > 0$. При $V_4 = 0$, как легко проверить, имеется чисто мнимый корень $-\mathrm{i}\theta_I$, а поэтому второй корень равен $\mathrm{i}\theta_I - 1/(\alpha_0\tau) \in$ $\in P_l$. Поэтому критерием того, что оба корня лежат в $\bar{P}_l$, является условие $V_4 \geqslant 0$, т.е.

$$\alpha_0(b\cdot\xi)^2 \leqslant A\xi\cdot\xi \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Его можно записать в виде $\alpha_0 b \bigotimes b \leqslant A$, и это условие своего рода преобладания A над b. В него не вошёл параметр τ, что естественно в соответствии со сказанным выше. Условия подобного рода играли существенную роль в работах [4, 10].

Из критерия (10) следует, что $A \geqslant 0$. Если $A > 0$, то его можно записать в виде

$$\alpha_0(A^{-1/2}b\cdot A^{1/2}\xi)^2 \leqslant |A^{1/2}\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Введя вектор $\eta := A^{1/2}\xi$, получим эквивалентный явный критерий из п. 1) теоремы.

Если же $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$, то $b \perp \operatorname{Ker} A$ в силу критерия (10), и поэтому $b \in \operatorname{Im} A$, а сам он принимает вид

$$\alpha_0(b\cdot\xi)^2 \leqslant A\xi\cdot\xi = \widetilde{A}\xi\cdot\xi \quad \text{для всех} \quad \xi \in \operatorname{Im} A,$$

что сводит п. 2) теоремы к п. 1), в котором в роли $\mathbb{R}^n$ выступает $\operatorname{Im} A$ при $\operatorname{Im} A \neq \{0\}$. Случай $\operatorname{Im} A = \{0\}$ очевиден. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь явную симметричную и трёхточечную по всем переменным $x_1, \ldots, x_n$, t (трёхслойную по t) разностную схему для уравнения (6):

$$\alpha_0\tau\Lambda_t v + \mathring{\delta}_t v + b_i\mathring{\delta}_i v - \tau a_i\Lambda_i v = 0 \quad \text{на} \quad \omega_h \times \omega^{h_t}, \tag{11}$$

в которой искомая функция v определена на $\omega_h \times \bar{\omega}^{h_t}$. Значения на исходном и первом слоях по времени $v(x_k, 0)$ и $v(x_k, h_t)$, где $x_k = (k_1h_1, \ldots, k_nh_n)$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, считаем заданными. Здесь для большей наглядности взят случай $A = \operatorname{diag}\{a_1, \ldots, a_n\}$, причём $a_i > 0$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Так как $\operatorname{div}_h(Bs) = b_i\mathring{\delta}_i$ и $\operatorname{div}_h(A\nabla_h) = a_i\Lambda_i$ при постоянных коэффициентах b_i и a_i, то эта схема получается из схемы (4).

Рассмотрим комплексные частные решения разностной схемы (11), имеющие вид

$$v(x_k, t_m) = e^{\mathrm{i}k\cdot\xi}w(\xi, t_m), \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad m \geqslant 0, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^{\mathrm{T}} \in [-\pi, \pi]^n.$$

Назовём *спектральным условием равномерной по времени устойчивости* свойство:

$$\sup_{m\geqslant 0} |w(\xi, t_m)| < \infty \quad \text{для каждого} \quad \xi \in [-\pi, \pi]^n \tag{12}$$

при любых $w(\xi, 0)$ и $w(\xi, h_t)$ (ср. с (8) и [16, гл. 8, § 25]).

Функция $e^{\mathrm{i}k\cdot\xi}$ является собственной функцией операторов $\mathring{\delta}_l$ и Λ_l, отвечающей собственным значениям $\mathrm{i}h_l^{-1}\sin\xi_l$ и $-4h_l^{-2}\sin^2(\xi_l/2)$ соответственно. Поэтому функция w удовлетворяет трёхслойному разностному уравнению (фактически разностной схеме для ОДУ (7))

$$\alpha_0\tau\Lambda_t w+\mathring{\delta}_t w+\left(\mathrm{i}\frac{b_i}{h_i}\sin\xi_i+\tau\frac{4a_i}{h_i^2}\sin^2\frac{\xi_i}{2}\right)w=0 \quad \text{на} \quad \omega^{h_t}. \tag{13}$$

В силу определений операторов Λ_t и $\mathring{\delta}_t$ после умножения на $h_t^2/(\alpha_0\tau)$ последнее уравнение можно записать в рекуррентной форме

$$(1+d)\widehat{w}-2(1-\theta)w+(1-d)\check{w}=0, \tag{14}$$

где

$$d:=\frac{h_t}{2\alpha_0\tau}>0, \quad \theta\equiv\theta(\xi)=2\frac{h_t^2 a_i}{\alpha_0 h_i^2}\sin^2\frac{\xi_i}{2}+\mathrm{i}\frac{h_t^2 b_i}{2\alpha_0\tau h_i}\sin\xi_i\in\mathbb{C}.$$

Характеристическое уравнение для разностного уравнения (14) имеет вид

$$p_2(q)\equiv(1+d)q^2-2(1-\theta)q+1-d=0. \tag{15}$$

Выполнение спектрального условия устойчивости (12) равносильно тому, что оба корня этого уравнения лежат в замкнутом единичном круге $|q|\leqslant 1$ на $\mathbb{C}$ и на его границе нет кратных корней.

Для сравнения изучим сначала трёхслойную симметричную схему

$$\mathring{\delta}_t v+b_i\mathring{\delta}_i v=0 \quad \text{на} \quad \omega_h\times\omega^{h_t}, \tag{16}$$

получающуюся из схемы (11) при $\tau=0$.

Теорема 3. *Для разностной схемы (16) критерий справедливости спектрального условия равномерной по времени устойчивости имеет вид условия типа Куранта*

$$h_t\sum_{k=1}^{n}\frac{|b_k|}{h_k}<1. \tag{17}$$

Доказательство. При $\tau=0$ из схемы (13) следует иное, чем (14), рекуррентное уравнение

$$\widehat{w}+2\mathrm{i}h_t\gamma w-\check{w}=0, \quad \gamma\equiv\gamma(\xi)=\frac{b_i}{h_i}\sin\xi_i.$$

Соответствующее характеристическое уравнение – это $q^2+2\mathrm{i}h_t\gamma q-1=0$. Оно имеет корни

$$q_{1,2}=\begin{cases}-\mathrm{i}h_t\gamma\pm\sqrt{1-h_t^2\gamma^2}, & \text{если} \quad h_t|\gamma|\leqslant 1,\\ -\mathrm{i}(h_t\gamma\pm\sqrt{h_t^2\gamma^2-1}), & \text{если} \quad h_t|\gamma|>1.\end{cases}$$

В случае $h_t|\gamma|>1$ максимальный из $|q_{1,2}|$ равен $h_t|\gamma|+\sqrt{h_t^2\gamma^2-1}>1$. В случае $h_t|\gamma|\leqslant 1$ имеем $|q_{1,2}|=1$, но при $h_t|\gamma|=1$ корень становится кратным. Это приводит к условию $h_t|\gamma|<1$ при всех $\xi\in[-\pi,\pi]^n$ и в конечном итоге (при $\xi=((\pi/2)\operatorname{sgn}b_1,\ldots,(\pi/2)\operatorname{sgn}b_n)$) – к условию (17). Теорема доказана.

Перейдём теперь к анализу разностной схемы (11).

Теорема 4. *Пусть $a_i>0$ при $1\leqslant i\leqslant n$. Для разностной схемы (11) справедливость спектрального условия её равномерной по времени устойчивости не зависит от значения параметра $\tau>0$.*

Для его справедливости необходимо выполнение двух условий типа Куранта на h_t:

$$\frac{h_t}{\sqrt{\alpha_0}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{h_k^2}\right)^{1/2}\leqslant 1, \quad h_t\sum_{k=1}^{n}\frac{|b_k|}{h_k}\leqslant 1, \tag{18}$$

второе из которых почти совпадает с условием (17). Необходимым является также условие

$$\alpha_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k} \leqslant 1 \tag{19}$$

(ср. с условиями (9)).

Для справедливости указанного спектрального условия достаточно выполнение условия

$$\sum_{k=1}^{n} \max\left\{\frac{h_t^2}{\alpha_0}\frac{a_k}{h_k^2}, \alpha_0\frac{b_k^2}{a_k}\right\} \leqslant 1. \tag{20}$$

При $n = 1$ *оно принимает вид*

$$\frac{h_t}{\sqrt{\alpha_0}}\frac{\sqrt{a_1}}{h_1} \leqslant 1, \quad \alpha_0 b_1^2 \leqslant a_1 \tag{21}$$

и служит критерием.

Замечание 1. Прокомментируем условия из этой теоремы. Второе из условий (18) следует из первого условия и условия (19) в силу неравенства Коши–Шварца:

$$\left(h_t \sum_{k=1}^{n} \frac{|b_k|}{h_k}\right)^2 \leqslant \left(\alpha_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k}\right) \frac{h_t^2}{\alpha_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{h_k^2}.$$

Как будет доказано, необходимым является и несколько более точное условие

$$h_t \sum_{k=1}^{n} \frac{|b_k|}{h_k} \leqslant \left[\left(2 - \frac{h_t^2}{\alpha_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{h_k^2}\right) \frac{h_t^2}{\alpha_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{h_k^2}\right]^{1/2}, \tag{22}$$

правая часть которого в силу первого из условий (18) не превосходит 1.

Более грубым достаточным условием, чем (20), очевидно, служит неравенство

$$\frac{h_t^2}{\alpha_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{h_k^2} + \alpha_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{a_k} \leqslant 1$$

(ср. с первым условием (18) и условием (19)).

Замечание 2. Можно использовать 1-нормы векторов коэффициентов $a := (a_1, \ldots, a_n)$ и b и ввести при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ специальные средние шаги по пространству $h_a > 0$ и $h_b > 0$ формулами

$$|a|_1 := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad |b|_1 := \sum_{k=1}^{n} |b_k|, \quad h_a := |a|_1^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{h_k^2}\right)^{-1/2}, \quad h_b := |b|_1 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|b_k|}{h_k}\right)^{-1}.$$

При этом $h_a, h_b \in [h_{\min}, h_{\max}]$, где $h_{\min} = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} h_k$, $h_{\max} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} h_k$. Тогда условия типа Куранта (18) примут следующий вид:

$$\sqrt{\frac{|a|_1}{\alpha_0}}\frac{h_t}{h_a} \leqslant 1, \quad |b|_1 \frac{h_t}{h_b} \leqslant 1.$$

Доказательство. Если корни уравнения (15) кратные, то их модуль равен $\sqrt{|1-d|/(1+d)}$ и меньше 1. Если $\theta = 0$, то корнями многочлена $p_2(q)$ являются 1 и $(1-d)/(1+d)$ (последний по модулю, очевидно, меньше 1). Следовательно, ниже можно считать, что $\theta \neq 0$ и поэтому $p_2(1) = 2\theta \neq 0$, и что эти корни простые.

Выполним дробно-рациональное преобразование $q(z) = (z+1)/(z-1)$, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между проколотым замкнутым единичным кругом $\{q \in \mathbb{C}\colon\ |q| \leqslant 1,\ q \neq 1\}$ и замкнутой левой полуплоскостью $\bar{P}_l$. Соответствие между проколотой единичной окружностью $\{q \in \mathbb{C}\colon\ |q| = 1,\ q \neq 1\}$ и мнимой осью $z_R = 0$ также взаимно однозначное; отметим, что обратная функция $z^{(-1)}(q) = (q+1)/(q-1)$ совпадает с исходной. При этом

$$p_2(q(z))(z-1)^2 = 2r_2(z) := 2(\theta z^2 + 2dz + 2 - \theta).$$

Здесь $r_2(1) = 2(1+d) > 0$. Обозначим через $z_1,\ z_2$ корни многочлена $r_2(z)$ и получим условия их принадлежности полуплоскости $\bar{P}_l$.

Пусть сначала $\theta_I = 0$. При $\theta_R \neq 0$, как хорошо известно, $z_1, z_2 \in \bar{P}_l$ при следующих условиях на коэффициенты многочлена: $d/\theta_R \geqslant 0$ и $(2-\theta_R)/\theta_R \geqslant 0$. Так как $d > 0$, то это приводит к условию $0 < \theta_R \leqslant 2$ (причём $z_1, z_2 \in P_l$ при $\theta_R < 2$, либо $z_1 = -d < 0$ и $z_2 = 0$ при $\theta_R = 2$).

Пусть теперь $\theta_I \neq 0$ и поэтому $\xi \neq 0$. Снова запишем вспомогательный многочлен

$$-r_2(\mathrm{i}z) = \theta_R z^2 + \theta_R - 2 + \mathrm{i}(\theta_I z^2 - 2dz + \theta_I) \tag{23}$$

и определитель 4-го порядка – результант (с точностью до знака) двух многочленов с вещественными коэффициентами в правой части

$$V_4 = \begin{vmatrix} \theta_I & -2d & \theta_I & 0 \\ \theta_R & 0 & \theta_R - 2 & 0 \\ 0 & \theta_I & -2d & \theta_I \\ 0 & \theta_R & 0 & \theta_R - 2 \end{vmatrix}.$$

Его главный угловой минор второго порядка $V_2 = 2d\theta_R$ положителен при $\xi \neq 0$. Умножим 2-ю и 4-ю строки V_4 на θ_I/θ_R, вычтем их из 1-й и 3-й строк соответственно и разложим полученный определитель по первому столбцу:

$$V_4 = -\theta_R \begin{vmatrix} -2d & -2\theta_I/\theta_R & 0 \\ \theta_I & -2d & -2\theta_I/\theta_R \\ \theta_R & 0 & \theta_R - 2 \end{vmatrix} = -4\theta_R\left[d^2(\theta_R - 2) + \frac{\theta_I^2}{\theta_R}\right] = -4[d^2\theta_R(\theta_R - 2) + \theta_I^2].$$

(Несложно видеть, что итоговая формула верна и при $\theta_R = 0$). Напомним, что при $V_4 \neq 0$ критерием того, что корни $r_2(z)$ лежат в P_l, является условие $V_4 > 0$. При $V_4 = 0$ имеется чисто мнимый корень $z_1 = \mathrm{i}y_1$. Он является общим корнем двух вещественных многочленов в правой части (23), откуда легко получается, что $y_1 = \theta_I/(d\theta_R)$. Тогда $z_2 = -\mathrm{i}y_1^{-1}((2/\theta) - 1)$ и поэтому $z_{2,R} = -d/(\theta_R|\theta|^2) < 0$, т.е. $z_2 \in P_l$. Следовательно, критерием того, что оба корня лежат в $\bar{P}_l$ и на мнимой оси нет кратных корней, является условие $V_4 \geqslant 0$, т.е.

$$\theta_R^2 + (\theta_I/d)^2 \leqslant 2\theta_R \quad \text{для всех} \quad \xi \in [-\pi, \pi]^n. \tag{24}$$

В соответствии с предыдущим анализом это условие справедливо и при $\theta_I = 0$. Полученный критерий геометрически означает принадлежность θ эллипсу на $\mathbb{C}$:

$$(\theta_R - 1)^2 + (\theta_I/d)^2 \leqslant 1 \quad \text{для всех} \quad \xi \in [-\pi, \pi]^n. \tag{25}$$

Поскольку $\theta_I/d = b_i(h_t/h_i)\sin\xi_i$, то параметр τ не участвует в выведенном критерии.

Очевидно, что необходимым условием справедливости критерия (25) служат неравенства

$$0 \leqslant \theta_R \leqslant 2, \quad |\theta_I|/d \leqslant 1 \quad \text{для всех} \quad \xi \in [-\pi, \pi]^n$$

(условия принадлежности θ прямоугольнику, объемлющему указанный эллипс). Максимум величины $\theta_R \geqslant 0$, очевидно, достигается при $\xi = (\pi, \ldots, \pi)$, а максимум величины $|\theta_I|/d$ – при $\xi = ((\pi/2)\operatorname{sgn} b_1, \ldots, (\pi/2)\operatorname{sgn} b_n)$. Это и приводит к условиям (18).

Положив $\xi = ((\pi/2)\operatorname{sgn} b_1, \ldots, (\pi/2)\operatorname{sgn} b_n)$ в (24), приходим к неравенству

$$\frac{|\tilde{\theta}_I|}{d} = h_t \sum_{k=1}^n \frac{|b_k|}{h_k} \leqslant \sqrt{(2-\tilde{\theta}_R)\tilde{\theta}_R} \quad \text{с} \quad \tilde{\theta}_R = \frac{h_t^2}{\alpha_0}\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{h_k^2},$$

т.е. к необходимому условию (22).

Возьмём также $\xi_k = \varepsilon b_k h_k/(a_k h_t)$, $k = \overline{1,n}$, в критерии (24) и, разложив обе его части по степеням $\varepsilon \to 0$, получим

$$O(\varepsilon^4) + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{a_k}\right)^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\alpha_0}\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{a_k} + O(\varepsilon^4).$$

Разделив обе части на ε^2 и перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, выведем необходимое условие (19).

С другой стороны, имеем $|\sin\xi_k| = 2\sqrt{\sigma_k(1-\sigma_k)}$, где $\sigma_k := \sin^2(\xi_k/2)$ пробегает отрезок $[0,1]$, и по неравенству Коши–Шварца верна оценка

$$\left(\frac{\theta_I}{d}\right)^2 \leqslant 2\theta_R\alpha_0\frac{b_i^2}{a_i}(1-\sigma_i).$$

Поэтому после сокращения на $2\theta_R \neq 0$ (что эквивалентно $\sigma := (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq 0$) заключаем, что критерий (24) следует из неравенства

$$\frac{a_i}{\alpha_0}\left(\frac{h_t}{h_i}\right)^2\sigma_i + \alpha_0\frac{b_i^2}{a_i}(1-\sigma_i) \leqslant 1 \quad \text{для всех} \quad \sigma \in [0,1]^n, \quad \sigma \neq 0. \tag{26}$$

Его левая часть является аффинной функцией σ простого вида, и поэтому, как нетрудно видеть, это неравенство эквивалентно неравенству (20), тем самым являющемуся достаточным условием справедливости критерия.

При $n = 1$ критерий (24) после деления на $2\theta_R$ принимает вид (26), и поэтому условия (21) становятся критерием.

Замечание 3. Отметим дополнительно, что в случае коэффициентов a_i произвольных знаков ситуация в теореме 4 становится аналогичной указанной в критерии (9). Во-первых, в доказательстве теоремы 4 при $\theta_I = 0$ показано, что условие $\theta_R \geqslant 0$ необходимо. При $\theta_I \neq 0$ и $\theta_R < 0$ имеем $V_2 < 0$ и $V_4 < 0$, значит, один из корней $r_2(z)$ лежит в правой полуплоскости $z_R > 0$. Поэтому и при $\theta_I \neq 0$ необходимо, чтобы $\theta_R \geqslant 0$ при всех $\xi \in [-\pi,\pi]^n$. Последнее влечёт за собой необходимость условия $a_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Во-вторых, если $a_k = 0$ при некотором k, то возьмём $\xi_i = 0$ при $i \neq k$, а $\sin\xi_k \neq 0$. Тогда $\theta_R = 0$ и $\theta_I/d = b_k(h_t/h_k)\sin\xi_k$. При $b_k \neq 0$ корни $r_2(z) = \mathrm{i}(\theta_I z^2 - 2\mathrm{i}dz - \theta_I - 2\mathrm{i})$ таковы, что $z_1 + z_2 = 2\mathrm{i}d/\theta_I$, откуда $z_{1R} + z_{2R} = 0$, и при $z_1, z_2 \in \bar{P}_l$ имеем $z_{1R} = z_{2R} = 0$. Но тогда должно быть вещественным произведение $z_1 z_2 = -1 - (2\mathrm{i}/\theta_I)$, что не так. Значит, при $a_k = 0$ условие $b_k = 0$ необходимо.

Поэтому теорема 4 сохраняет силу и при $a_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, с той лишь разницей, что суммы в условиях (19) и (20) надо брать по всем $1 \leqslant k \leqslant n$ таким, что $a_k > 0$, и иметь в виду свойство: если $a_k = 0$, то $b_k = 0$.

В частном случае $b = 0$ имеем $\theta_I = 0$, и в теореме 4 первое из условий (18) становится критерием. Оно аналогично условию устойчивости трёхслойной разностной схемы с параметром τ из [9] в случае веса $\sigma = 0$. В этой схеме в данном случае надо взять $B_h = \alpha_0 I$, $B_{1h} = I$ (здесь I – единичный оператор), $A_h = -\tau a_i \Lambda_i$, а условие её устойчивости имеет вид $h_t(\alpha_h/2) \leqslant \varepsilon_1$ с произвольным $0 < \varepsilon_1 < 1$, где

$$\alpha_h := \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}}\left(\sum_{k=1}^n \frac{4a_k}{h_k^2}\sin^2\frac{\zeta_k}{2}\right)^{1/2} < \frac{2}{\sqrt{\alpha_0}}\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{h_k^2}\right)^{1/2}, \quad \zeta_k := \frac{\pi(N_k-1)}{N_k},$$

причём N_k – число отрезков разбиения по x_k (в отличие от данной работы в [9] рассматривается начально-краевая задача), а $\sin^2(\zeta_k/2) \to 1$ и последнее неравенство переходит в равенство при $N_k \to +\infty$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Случай $\varepsilon_1 = 1$ также возможен (с некоторым ослаблением используемых норм), см. в этой связи [17, замечание 1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00104).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четверушкин Б.Н.* Гиперболическая квазигазодинамическая система // Мат. моделирование. 2018. Т. 30. № 2. С. 81–98.
2. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М., 2004.
3. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М., 2007.
4. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
5. *Chetverushkin B.N., Zlotnik A.A.* On some properties of multidimensional hyperbolic quasi-gasdynamic systems of equations // Russ. J. Math. Phys. 2017. V. 24. № 3. P. 299–309.
6. *Сурначев М.Д., Тишкин В.Ф., Четверушкин Б.Н.* О законах сохранения для гиперболизированных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 7. С. 859–865.
7. *Chetverushkin B.N., Zlotnik A.A.* On a hyperbolic perturbation of a parabolic initial-boundary value problem // Appl. Math. Lett. 2018. V. 83. P. 116–122.
8. *Ильин А.А., Рыков Ю.Г.* О близости траекторий для модельных квазигазодинамических уравнений. Линейный случай // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 90. С. 1–14.
9. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* Устойчивость численных методов решения гиперболических уравнений второго порядка с малым параметром // Докл. РАН. Математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 490. № 1. С. 35–41.
10. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* Устойчивость неявных разностных схем для линеаризованной гиперболической квазигазодинамической системы уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 936–947.
11. *Давыдов А.А., Четверушкин Б.Н., Шильников Е.В.* Моделирование течений несжимаемой жидкости и слабосжимаемого газа на многоядерных гибридных вычислительных системах // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 2275–2284.
12. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.
13. *Злотник А.А.* Оценки скорости сходимости проекционно-сеточных методов для гиперболических уравнений второго порядка // Вычислит. процессы и системы / Под ред. Г.И. Марчука. Вып. 8. М., 1991. С. 116–167.
14. *Zlotnik A., Čiegis R.* On properties of compact 4th order finite-difference schemes for the variable coefficient wave equation // Preprint. 2021. arXiv.org:2101.10575v2. P. 1–25.
15. *Галанин М.П.* Численное решение уравнения переноса // Будущее прикладной математики. Лекции для молодых исследователей / Под ред. Г.Г. Малинецкого. М., 2004. С. 78–116.
16. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М., 1977.
17. *Zlotnik A., Kireeva O.* On compact 4th order finite-difference schemes for the wave equation // Preprint. arXiv.org:2011.14104v2. P. 1–22.

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва,
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 08.02.2021 г.
После доработки 08.02.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.