ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 7, с. 932–950

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.644.5+517.956.224

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ

© 2021 г. П. А. Крутицкий, И. О. Резниченко

Выводится квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью, заданной на гладкой поверхности (замкнутой или разомкнутой). Полученная квадратурная формула даёт более высокую точность вычислений, чем стандартная квадратурная формула, что подтверждается численными тестами. Преимущество новой квадратурной формулы особенно заметно вблизи поверхности, где значения, подсчитанные по стандартной квадратурной формуле, стремятся к бесконечности, тогда как новая формула обеспечивает приемлемую точность вычислений.

DOI: 10.31857/S0374064121070074

Введение. Гармонический потенциал двойного слоя используется при решении краевых задач для уравнения Лапласа методом интегральных уравнений. Такие задачи возникают в различных областях математической физики, например, в теории обтекания препятствий потоком идеальной жидкости, в электростатике, в стационарной теплопроводности, в теории фильтрации и т.д. Численное решение краевых задач с помощью потенциала двойного слоя обсуждалось в монографиях [1–3] и состоит из двух этапов. На первом этапе, численно решая граничное интегральное уравнение, находят плотность потенциала. На втором этапе, подставляя численное значение плотности в квадратурную формулу, находят решение краевой задачи в любой точке области. Однако квадратурные формулы для потенциалов, используемые в инженерных расчётах [4, гл. 2], не дают равномерной аппроксимации потенциала в области и не сохраняют свойство непрерывности потенциалов вплоть до границы области. Более того, вблизи некоторых точек на границе области потенциалы, подсчитанные по этим квадратурным формулам, стремятся к бесконечности, хотя сами потенциалы ограничены вблизи границы. При использовании стандартных квадратурных формул для повышения точности приходится либо уменьшать шаг, либо проводить дополнительные построения вблизи границы, что увеличивает стоимость вычислений. Актуальной является задача по получению улучшенных квадратурных формул, обеспечивающих повышенную точность вблизи границы.

В двумерном случае улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя с плотностью, заданной на разомкнутых кривых и имеющей степенные особенности на их концах, построена в [5, 6]. Эта формула может применяться при нахождении численных решений краевых задач для уравнения Лапласа вне разрезов и разомкнутых кривых на плоскости с использованием метода потенциалов и граничных интегральных уравнений. Такие задачи изучались указанным методом в работах [7–9]. В [10] предложена улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя в трёхмерном случае, обеспечивающая равномерную аппроксимацию и равномерную сходимость в области. Кроме того, эта формула сохраняет свойство непрерывности потенциала простого слоя при переходе через границу области.

В настоящей работе построена улучшенная квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя. Формула обеспечивает более высокую точность вычислений, чем стандартная квадратурная формула. Преимущество улучшенной формулы по сравнению со стандартной особенно заметно на небольших расстояниях от границы.

1. Постановка задачи. Введём в пространстве трёхмерную декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Пусть Γ – либо простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса C^2, содержащая свои предельные точки [11, гл. 14, § 1]. Если поверхность Γ замкнутая, то она должна ограничивать объёмно-односвязную внутреннюю область [12, с. 201]. Предположим, что поверхность Γ параметризована так, что на неё отображается прямоугольник:

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u,v), \quad y_2 = y_2(u,v), \quad y_3 = y_3(u,v); \quad u \in [0,A], \quad v \in [0,B];$$
$$y_j(u,v) \in C^2([0,A]\times[0,B]), \quad j = 1,2,3. \tag{1}$$

Сферу, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом.

Введём N точек u_n с шагом h на отрезке $[0,A]$ и M точек v_m с шагом H на отрезке $[0,B]$ равенствами

$$u_n = (n+1/2)h, \quad n = \overline{0, N-1} \quad \text{и} \quad v_m = (m+1/2)H, \quad m = \overline{0, M-1}; \quad A = Nh, \quad B = MH.$$

Прямоугольник $[0,A]\times[0,B]$, который отображается на поверхность Γ, разобьём на NM маленьких прямоугольничков размера $h \times H$, тогда точки (u_n, v_m) являются серединами этих прямоугольничков.

Известно [11, гл. 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не обязательно единичного) $\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$ в точке поверхности $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$ выражаются через определители второго порядка по формулам

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Положим $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$. Известно [11, гл. 14, §§ 1, 2], что

$$\int\limits_{\Gamma} F(y)\, ds_y = \int\limits_0^A du \int\limits_0^B dv\, F(y(u,v))|\eta(y(u,v))|.$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$|\eta(y(u,v))| > 0 \quad \text{для всех} \quad (u,v) \in (0,A)\times(0,B). \tag{3}$$

Из условия (3) следует, что $|\eta(y(u,v))| \in C^1((0,A)\times(0,B))$.

Через $\boldsymbol{n}_y$ обозначим единичную нормаль в точке $y \in \Gamma$, т.е. $\boldsymbol{n}_y = \eta(y)/|\eta(y)|$. Производная вдоль нормали $\boldsymbol{n}_y$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} = |\eta(y)|^{-1}(\eta(y), \nabla_y).$$

Обозначим $|x - y(u,v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u,v))^2 + (x_2 - y_2(u,v))^2 + (x_3 - y_3(u,v))^2}$ и заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}|x-y| = \frac{1}{|\eta(y)|}\sum_{j=1}^{3} \eta_j(y)\frac{y_j - x_j}{|x-y|} = \frac{(\eta(y), y-x)}{|\eta(y)|\,|x-y|},$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y|} = -\frac{(\eta(y), y-x)}{|\eta(y)||x-y|^3} = \frac{-1}{|\eta(y)||x-y|^3}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y)(y_j - x_j).$$

Гармонический потенциал двойного слоя используется при решении краевых задач для уравнения Лапласа методом интегральных уравнений. Пусть $x \notin \Gamma$. Рассмотрим гармонический потенциал двойного слоя с заданной на поверхности Γ плотностью $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$:

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(y)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y|}\, ds_y = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^A du \int\limits_0^B dv\, \mu(y(u,v))|\eta(y(u,v))|\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y(u,v)|} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\int\limits_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int\limits_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv\, \frac{\mu(y(u,v))}{|x-y(u,v)|^3}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j). \tag{4}$$

Пусть $\mu_{nm} = \mu(y(u_n, v_m))$, тогда

$$\mu(y(u,v)) = \mu_{nm} + o(1) \tag{5}$$

для $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$. Следовательно,

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) \approx -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}\int\limits_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int\limits_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv\, \frac{1}{|x-y(u,v)|^3}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j). \tag{6}$$

Таким образом, чтобы получить квадратурную формулу для гармонического потенциала двойного слоя при $x \notin \Gamma$, необходимо вычислить интеграл

$$\int\limits_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int\limits_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv\, \frac{1}{|x-y(u,v)|^3}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j), \tag{7}$$

который будем называть *каноническим интегралом.*

2. Вычисление канонического интеграла. Пусть точка x не принадлежит тому кусочку поверхности Γ, на котором изменяется точка $y = y(u,v)$, когда $(u - u_n) \in [-h/2, h/2]$ и $(v - v_m) \in [-H/2, H/2]$. Разложим функцию $y_j(u,v)$ по формуле Тейлора с центром разложения в точке (u_n, v_m), тогда для $j = 1, 2, 3$ получим

$$y_j(u,v) = y_j(u_n, v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где $D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m)$. Здесь и далее все производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m). Положим

$$r^2 = |x - y(u_n, v_m)|^2 = \sum_{j=1}^{3} r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n, v_m) - x_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

тогда

$$y_j(u,v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$|x - y(u,v)|^2 = \sum_{j=1}^{3}(x_j - y_j(u,v))^2 \approx \sum_{j=1}^{3}(r_j^2 + 2r_jD_j + D_j^2) =$$

$$= r^2 + 2P(u - u_n) + 2Q(v - v_m) + \alpha^2(u - u_n)^2 + \beta^2(v - v_m)^2 + 2\delta(u - u_n)(v - v_m) =$$

$$= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2,$$

где $U = u - u_n$, $V = v - v_m$,

$$P = \sum_{j=1}^{3} r_j(y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^{3} r_j(y_j)'_v, \quad \alpha^2 = \sum_{j=1}^{3}((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^{3}((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^{3}(y_j)'_u(y_j)'_v.$$

Производные по u и v берутся в точке $u = u_n$, $v = v_m$. Несложно показывается [11, гл. 14, § 1], что справедливо равенство

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2.$$

Так как, согласно условию (3), $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$ для всех возможных n и m, то

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 > 0. \tag{8}$$

Отсюда следует, что $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$.

Применяя формулу Тейлора с центром разложения в точке (u_n, v_m) с остаточным членом в форме Пеано [11, гл. 10, § 5.3], находим

$$\eta_j(y(u,v)) = \eta_j(y(u_n, v_m)) + (\eta_j)'_u(u - u_n) + (\eta_j)'_v(v - v_m) + o(\sqrt{(u-u_n)^2 + (v-v_m)^2}).$$

Производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m).

Для вычисления выражения

$$\sum_{j=1}^{3} \eta_j(y(u,v))(y_j(u,v) - x_j)$$

с учётом формул

$$\sum_{j=1}^{3} \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)'_u = \sum_{j=1}^{3} \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)'_v = 0,$$

означающих ортогональность вектора нормали и касательных векторов к поверхности (см. [11, гл. 14, § 1.2]), воспользуемся разложением по формуле Тейлора с центром разложения в точке (u_n, v_m) с остаточным членом в форме Пеано

$$y_j(u,v) - x_j = r_j + (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m) +$$

$$+\frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u-u_n)^2 + \frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v-v_m)^2 + (y_j)''_{uv}(u-u_n)(v-v_m) + o((u-u_n)^2 + (v-v_m)^2),$$

тогда

$$\sum_{j=1}^{3} \eta_j(y(u,v))(y_j(u,v) - x_j) \approx R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV,$$

где $U = u - u_n$, $V = v - v_m$,

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{uu} + (\eta_j)'_u(y_j)'_u\right), \quad \xi_2 = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{vv} + (\eta_j)'_v(y_j)'_v\right),$$

$$\xi_3 = \sum_{j=1}^{3}\left(\eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{uv} + (\eta_j)'_u(y_j)'_v + (\eta_j)'_v(y_j)'_u\right),$$

$$\xi_4 = \sum_{j=1}^{3}(\eta_j)'_u r_j, \quad \xi_5 = \sum_{j=1}^{3}(\eta_j)'_v r_j, \quad R = \sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u_n, v_m)) r_j.$$

Все производные по u, v берутся в точке (u_n, v_m).

Из приведённых соотношений вытекает, что канонический интеграл (7) приближённо равен следующему интегралу, который обозначим через $K_{nm}(x)$:

$$\int\limits_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int\limits_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv\, \frac{1}{|x-y(u,v)|^3} \sum_{j=1}^{3} \eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j) \approx$$

$$\approx \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \int\limits_{-H/2}^{H/2} dV\, \frac{R+\xi_4 U+\xi_5 V+\xi_1 U^2+\xi_2 V^2+\xi_3 UV}{\beta^3((V+\delta U/\beta^2+Q/\beta^2)^2-(\delta U+Q)^2/\beta^4+(\alpha^2U^2+2PU+r^2)/\beta^2)^{3/2}} =$$

$$= K_{nm}(x).$$

Следовательно, чтобы вывести квадратурную формулу для потенциала двойного слоя, необходимо вычислить интеграл $K_{nm}(x)$ в явном виде.

2.1. Вычисление интегралов по dV. Введём обозначения

$$z = V+\delta U/\beta^2+Q/\beta^2 = V+c, \quad c=\delta U/\beta^2+Q/\beta^2, \tag{9}$$

$$a = -c^2+(\alpha^2U^2+2PU+r^2)/\beta^2 = -(\delta U+Q)^2/\beta^4+(\alpha^2U^2+2PU+r^2)/\beta^2 =$$

$$= \frac{1}{\beta^4}((\alpha^2\beta^2-\delta^2)U^2+2(P\beta^2-\delta Q)U+r^2\beta^2-Q^2).$$

Как показано выше, из неравенства (8) вытекает, что $\alpha^2>0$ и $\beta^2>0$. Кроме того, из неравенства (8) следует, что $a\not\equiv 0$, поскольку a является квадратным трёхчленом по U, в котором коэффициент при U^2 положителен: $(\alpha^2\beta^2-\delta^2)/\beta^4>0$.

Покажем, что $a\geqslant 0$. Положим $\tilde D_j=(y_j)'_u U-(y_j)'_v c$, где c определено в (9), и проведём следующие преобразования с учётом введённых обозначений:

$$\sum_{j=1}^{3}(r_j+\tilde D_j)^2 = \sum_{j=1}^{3}(r_j^2+2r_j\tilde D_j+\tilde D_j^2) = r^2+2\sum_{j=1}^{3} r_j\tilde D_j+\sum_{j=1}^{3}\tilde D_j^2 =$$

$$= r^2+2PU-2Qc+\alpha^2U^2+\beta^2c^2-2\delta Uc =$$

$$= \beta^2\left(c^2-2\frac{\delta U+Q}{\beta^2}c+\left(\frac{\delta U+Q}{\beta^2}\right)^2\right)-\frac{(\delta U+Q)^2}{\beta^2}+\alpha^2U^2+2PU+r^2 =$$

$$= \beta^2\left(-c+\frac{\delta U+Q}{\beta^2}\right)^2-\frac{(\delta U+Q)^2}{\beta^2}+\alpha^2U^2+2PU+r^2 =$$

$$= -\frac{(\delta U+Q)^2}{\beta^2}+\alpha^2U^2+2PU+r^2 = a\beta^2\geqslant 0. \tag{10}$$

Так как $\beta^2>0$, то, поделив полученное неравенство на β^2, заключаем, что $a\geqslant 0$. Следовательно, квадратный трёхчлен a неотрицательный.

Обозначим

$$b = \xi_2c^2-\xi_5c-\xi_3Uc+R+\xi_4U+\xi_1U^2 =$$

$$= U^2\left(\xi_2\frac{\delta^2}{\beta^4}+\xi_1-\xi_3\frac{\delta}{\beta^2}\right)+U\left(2\xi_2\frac{\delta Q}{\beta^4}+\xi_4-\xi_3\frac{Q}{\beta^2}-\xi_5\frac{\delta}{\beta^2}\right)+R-\frac{\xi_5Q}{\beta^2}+\xi_2\frac{Q^2}{\beta^4},$$

$$z_\pm = \pm H/2+c = \pm H/2+(\delta U+Q)/\beta^2.$$

Применяя введённые обозначения, вычислим в $K_{nm}(x)$ интеграл по $dV,$ переходя к переменной z:

$$\int\limits_{-H/2}^{H/2} dV \, \frac{R+\xi_4 U+\xi_5 V+\xi_1 U^2+\xi_2 V^2+\xi_3 UV}{((V+\delta U/\beta^2+Q/\beta^2)^2-(\delta U+Q)^2/\beta^4+(\alpha^2U^2+2PU+r^2)/\beta^2)^{3/2}} =$$

$$= \int\limits_{-H/2}^{H/2} dV \, \frac{\xi_2(V+c-c)^2+(\xi_3 U+\xi_5)(V+c-c)+R+\xi_4 U+\xi_1 U^2}{((V+c)^2+a)^{3/2}} =$$

$$= \int\limits_{z_-}^{z_+} dz \frac{\xi_2 z^2+(\xi_3 U+\xi_5-2\xi_2 c)z+b}{(z^2+a)^{3/2}} = \left(\left(\frac{b}{a}-\xi_2\right)z-\xi_3 U-\xi_5+2\xi_2 c\right)\frac{1}{\sqrt{z^2+a}}\Bigg|_{z_-}^{z_+} +$$

$$+\xi_2 \ln|z+\sqrt{z^2+a}|\Bigg|_{z_-}^{z_+},$$

где использованы интегралы 1.2.43.17–1.2.43.19 из справочника [13]. Заметим, что

$$\xi_2 \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \, \ln|z+\sqrt{z^2+a}||_{z_-}^{z_+} = \xi_2\beta\theta_{nm}(x),$$

где функция $\theta_{nm}(x)$ найдена в явном виде в работе [10]. Тогда интеграл $K_{nm}(x)$ можно представить в виде

$$K_{nm}(x) = \frac{1}{\beta^3}(\xi_2\beta\theta_{nm}(x)+J(H)-J(-H)).$$

Так как функция $\theta_{nm}(x)$ найдена в [10], то задача сводится к вычислению интеграла

$$J(\pm H) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \, \frac{(b/a-\xi_2)z_\pm-\xi_3 U-\xi_5+2\xi_2 c}{\sqrt{z_\pm^2+a}} =$$

$$= \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \, \frac{(b/a-\xi_2)(\pm H/2+c)-\xi_3 U-\xi_5+2\xi_2 c}{\sqrt{(\pm H/2+c)^2+a}}.$$

Достаточно вычислить интеграл $J(H)$. Интеграл $J(-H)$ вычисляется по тем же формулам, что и интеграл $J(H),$ с заменой в них H на $-H$.

Вычислим интеграл $J(H)$. Распишем величины, входящие в подынтегральную функцию, в виде многочленов по U:

$$a = C_2U^2+C_1U+C_0, \quad C_2 = (\alpha^2-\delta^2/\beta^2)/\beta^2, \quad C_1 = (2P-2\delta Q/\beta^2)/\beta^2, \quad C_0 = (r^2-Q^2/\beta^2)/\beta^2;$$

$$z_+^2+a = B_2U^2+B_1U+B_0, \quad B_2 = \alpha^2/\beta^2, \quad B_1 = (H\delta+2P)/\beta^2, \quad B_0 = H^2/4+(HQ+r^2)/\beta^2;$$

$$b = A_2U^2+A_1U+A_0, \quad A_2 = \xi_1-\xi_3\delta/\beta^2+\xi_2\delta^2/\beta^4, \quad A_1 = \xi_4-\xi_5\delta/\beta^2-\xi_3 Q/\beta^2+2\xi_2\delta Q/\beta^4,$$
$$A_0 = R-\xi_5 Q/\beta^2+\xi_2 Q^2/\beta^4;$$

$$bz_+ = (A_2U^2+A_1U+A_0)(\delta U/\beta^2+H/2+Q/\beta^2) = E_3U^3+E_2U^2+E_1U+E_0, \quad E_3 = A_2\delta/\beta^2,$$

$$E_2 = A_2(H/2+Q/\beta^2)+A_1\delta/\beta^2, \quad E_1 = A_1(H/2+Q/\beta^2)+A_0\delta/\beta^2, \quad E_0 = A_0(H/2+Q/\beta^2);$$

$$\xi_2 z_+ + \xi_3 U+\xi_5-2\xi_2 c = F_1U+F_0, \quad F_1 = \xi_3-\xi_2\delta/\beta^2, \quad F_0 = \xi_5-\xi_2 Q/\beta^2+\xi_2 H/2.$$

Применяя введённые обозначения, запишем интеграл $J(H)$ в виде

$$J(H) = J_1 - J_2,$$

$$J_1 = \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \, \frac{E_3U^3 + E_2U^2 + E_1U + E_0}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}},$$

$$J_2 = \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \, \frac{F_1U + F_0}{\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}}. \tag{11}$$

2.2. Вычисление интегралов (11). Используя деление многочленов и учитывая, что $C_2 > 0$ в силу (8), приведём интеграл J_1 к виду

$$J_1 = J_{11} + J_{12},$$

где

$$J_{11} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \, \frac{L_1U + L_0}{\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}},$$

$$J_{12} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \, \frac{S_1U + S_0}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}}, \tag{12}$$

здесь

$$L_1 = \frac{E_3}{C_2}, \quad L_0 = \frac{E_2C_2 - E_3C_1}{C_2^2}, \quad S_1 = E_1 - C_0L_1 - C_1L_0, \quad S_0 = E_0 - C_0L_0.$$

Если $B_1^2 - 4B_2B_0 = 0$ и $-B_1/(2B_2) \in [-h/2, h/2]$, то в силу [10, п. 2] точка x лежит на маленьком кусочке проходящей через $y(u_n, v_m)$ касательной плоскости, по которому ведётся интегрирование в каноническом интеграле после линеаризации $y(u, v)$ вблизи $y(u_n, v_m)$. В данном случае в знаменателе канонического интеграла с такой линеаризацией возникает особенность в точке x. Однако если в числителе провести такую же линеаризацию, а нормаль приближённо заменить нормалью в точке $y(u_n, v_m)$, то числитель будет тождественно равен нулю, так как x лежит в касательной плоскости, проходящей через $y(u_n, v_m)$. С другой стороны, исходный канонический интеграл (без линеаризации) не имеет особенности, так как $x \notin \Gamma$, и может быть оценён как $O(hH)$. Поэтому если выполняется условие $B_1^2 - 4B_2B_0 = 0$ и $-B_1/(2B_2) \in [-h/2, h/2]$, то будем считать, что $K_{nm}(x) \approx 0$. Далее предполагаем, что указанное условие не выполняется.

Так как $B_2 > 0$, интегралы J_{11} и J_2 находятся с помощью табличных интегралов 2.261 и 2.264 из справочника [14]:

$$J_{11} = \frac{L_1}{B_2}\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0} +$$

$$+ \left(L_0 - \frac{L_1B_1}{2B_2}\right)\frac{1}{\sqrt{B_2}} \ln\left|2B_2U + B_1 + 2\sqrt{B_2}\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}\right|\Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2},$$

$$J_2 = \frac{F_1}{B_2}\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0} +$$

$$+ \left(F_0 - \frac{F_1B_1}{2B_2}\right)\frac{1}{\sqrt{B_2}} \ln\left|2B_2U + B_1 + 2\sqrt{B_2}\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}\right|\Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2}.$$

Остаётся вычислить интеграл J_{12}. Способ вычисления интеграла зависит от знака дискриминанта квадратного трёхчлена $C_2U^2 + C_1U + C_0$, стоящего в знаменателе подынтегральной функции.

Первый случай: $\boldsymbol{C_1^2 - 4C_2C_0 > 0}$**.** В п. 2.1 показано, что квадратный трёхчлен, обозначенный через a, неотрицательный; следовательно, его дискриминант неположительный: $C_1^2 - 4C_2C_0 \leqslant 0$, поэтому первый случай не реализуется.

Второй случай: $\boldsymbol{C_1^2 - 4C_2C_0 = 0}$**.** В этом случае $C_2U^2 + C_1U + C_0 = C_2(U - U_1)^2$, где $U_1 = -C_1/(2C_2)$ – корень этого трёхчлена. Если $U_1 \in [-h/2, h/2]$, то в силу (10) точка x лежит на маленьком кусочке проходящей через $y(u_n, v_m)$ касательной плоскости, по которому ведётся интегрирование в каноническом интеграле после линеаризации $y(u, v)$ вблизи $y(u_n, v_m)$. В данном случае в знаменателе канонического интеграла с такой линеаризацией возникает особенность в точке x. Однако если в числителе провести такую же линеаризацию, а нормаль приближённо заменить нормалью в точке $y(u_n, v_m)$, то числитель будет тождественно равен нулю, так как x лежит в касательной плоскости, проходящей через $y(u_n, v_m)$. С другой стороны, исходный канонический интеграл (без линеаризации) не имеет особенности, так как $x \notin \Gamma$, и может быть оценён как $O(hH)$. Поэтому если $U_1 \in [-h/2, h/2]$, то будем считать, что $K_{nm}(x) \approx 0$.

Пусть $U_1 \notin [-h/2, h/2]$. Воспользовавшись равенством

$$\frac{S_1U + S_0}{(U - U_1)^2} = \frac{S_1(U - U_1) + S_0 + U_1S_1}{(U - U_1)^2} = \frac{S_1}{U - U_1} + \frac{S_0 + U_1S_1}{(U - U_1)^2},$$

получим

$$J_{12} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{S_1\,dU}{C_2(U - U_1)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}} +$$

$$+ \frac{S_0 + U_1S_1}{C_2} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{dU}{(U - U_1)^2\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}}.$$

Сделав в интеграле J_{12} замену $t = 1/(U - U_1)$, будем иметь [12, ч. 1, гл. 7, § 10, п. 5]:

$$t_1 = \frac{2}{h - 2U_1}, \quad t_2 = -\frac{2}{h + 2U_1} \text{ – пределы интегрирования,}$$

$$J_{12} = -\frac{S_1}{C_2}\int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{\operatorname{sgn}(t)\,dt}{\sqrt{(U_1^2B_2 + U_1B_1 + B_0)t^2 + (2B_2U_1 + B_1)t + B_2}} -$$

$$- \frac{S_0 + U_1S_1}{C_2}\int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{\operatorname{sgn}(t)t\,dt}{\sqrt{(U_1^2B_2 + U_1B_1 + B_0)t^2 + (2B_2U_1 + B_1)t + B_2}} =$$

$$= -\frac{S_1}{C_2}\operatorname{sgn}(C_1)\int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{\omega_2t^2 + \omega_1t + B_2}} - \frac{S_0 + U_1S_1}{C_2}\operatorname{sgn}(C_1)\int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{t\,dt}{\sqrt{\omega_2t^2 + \omega_1t + B_2}},$$

где $\omega_1 = 2B_2U_1 + B_1$, $\omega_2 = U_1^2B_2 + U_1B_1 + B_0$. Как показано выше, $a \geqslant 0$, поэтому и $\omega_2 \geqslant 0$. Если $\omega_2 > 0$, то с помощью табличных интегралов 2.261 и 2.264 из справочника [14] находим

$$J_{12} = \frac{-S_1\operatorname{sgn}(C_1)}{C_2\sqrt{\omega_2}} \ln\left|2\omega_2t + \omega_1 + 2\sqrt{\omega_2}\sqrt{\omega_2t^2 + \omega_1t + B_2}\right|\Bigg|_{t_2}^{t_1} -$$

$$-\frac{S_0+U_1S_1}{C_2}\operatorname{sgn}(C_1)\biggl(\frac{1}{\omega_2}\sqrt{\omega_2t^2+\omega_1t+B_2}-$$

$$-\frac{\omega_1}{2\omega_2}\frac{1}{\sqrt{\omega_2}}\ln|2\omega_2t+\omega_1+2\sqrt{\omega_2}\sqrt{\omega_2t^2+\omega_1t+B_2}|\biggr)\bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

Если $\omega_2=0$, а $\omega_1\neq 0$, то, пользуясь интегралами 1.2.18.5, 1.2.18.6 из справочника [13], получаем

$$J_{12}=-\frac{S_1}{C_2}\frac{2}{\omega_1}\operatorname{sgn}(C_1)\sqrt{\omega_1t+B_2}\bigg|_{t_2}^{t_1}-\frac{S_0+U_1S_1}{C_2}\operatorname{sgn}(C_1)\frac{2(\omega_1t-2B_2)}{3\omega_1^2}\sqrt{\omega_1t+B_2}\bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

Если $\omega_2=0$ и $\omega_1=0$, то

$$J_{12}=-\frac{S_1}{C_2}\frac{\operatorname{sgn}(C_1)}{\sqrt{B_2}}t\bigg|_{t_2}^{t_1}-\frac{S_0+U_1S_1}{C_2}\frac{\operatorname{sgn}(C_1)}{2\sqrt{B_2}}t^2\bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

Тем самым во втором случае интеграл J_{12} вычислен явно.

Третий случай: $C_1^2-4C_2C_0<0$. В этом случае многочлен $C_2U^2+C_1U+C_0$ неприводим над $\mathbb{R}$. Рассмотрим различные варианты вычисления интеграла J_{12} (см. (12)), воспользовавшись методом, предложенным в [12, ч. 1, гл. 7, § 10, п. 5, (7.75)] или в [14, раздел 2.25].

Вариант 1. Если $B_1=B_2C_1/C_2$, то в интеграле J_{12} достаточно сделать замену переменных $U=t-C_1/(2C_2)$. Тогда

$$t_1=\frac{h}{2}+\frac{C_1}{2C_2},\quad t_2=-\frac{h}{2}+\frac{C_1}{2C_2},\quad t_2<t_1,$$

и

$$J_{12}=\int\limits_{t_2}^{t_1}\frac{[S_1t+(-S_1C_1/(2C_2)+S_0)]\,dt}{C_2[t^2+C_0/C_2-C_1^2/(4C_2^2)]\sqrt{B_2t^2+B_0-B_2C_1^2/(4C_2^2)}}=$$

$$=\frac{1}{C_2}\biggl(\frac{S_1}{2}\int\limits_{t=t_2}^{t=t_1}\frac{dt^2}{[t^2+\sigma_1]\sqrt{B_2t^2+\sigma_2}}+\biggl(-\frac{S_1C_1}{2C_2}+S_0\biggr)\int\limits_{t_2}^{t_1}\frac{dt}{[t^2+\sigma_1]\sqrt{B_2t^2+\sigma_2}}\biggr),$$

где

$$\sigma_1=\frac{C_0}{C_2}-\frac{C_1^2}{4C_2^2}>0,\quad \sigma_2=B_0-\frac{B_2C_1^2}{4C_2^2}\geqslant 0.$$

Вводя обозначения

$$J_{121}=\frac{S_1}{2C_2}\int\limits_{t=t_2}^{t=t_1}\frac{dt^2}{[t^2+\sigma_1]\sqrt{B_2t^2+\sigma_2}},$$

$$J_{122}=\frac{1}{C_2\sqrt{B_2}}\biggl(-\frac{S_1C_1}{2C_2}+S_0\biggr)\int\limits_{t_2}^{t_1}\frac{dt}{[t^2+\sigma_1]\sqrt{t^2+\sigma_2/B_2}},$$

получаем

$$J_{12}=J_{121}+J_{122}. \tag{13}$$

Воспользовавшись табличным интегралом 2.246 из справочника [14], находим интеграл J_{121} в явном виде:

1_1) если $\sigma_1B_2-\sigma_2>0$, то

$$J_{121}=\frac{S_1}{C_2\sqrt{\sigma_1B_2-\sigma_2}}\operatorname{arctg}\biggl(\frac{\sqrt{B_2t^2+\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1B_2-\sigma_2}}\biggr)\bigg|_{t_2}^{t_1};$$

2_1) если $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 < 0$, то

$$J_{121} = \frac{S_1}{2C_2\sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}} \ln\left|\frac{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2} - \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}}{\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2} + \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1 B_2}}\right|\Bigg|_{t_2}^{t_1};$$

3_1) если $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 = 0$, то

$$J_{121} = -\frac{S_1}{C_2\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}}\Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

Используя табличные интегралы 1.2.43.17, 1.2.45.10, 1.2.45.13 и 1.2.11.10 из справочника [13], находим интеграл J_{122} в явном виде:

1_2) если $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_2 - B_2\sigma_1 < 0$, то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}}\left(-\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0\right)\frac{1}{\sqrt{\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2/B_2)}} \ln \frac{|t\sqrt{\sigma_1 - \sigma_2/B_2} + \sqrt{\sigma_1(t^2 + \sigma_2/B_2)}|}{\sqrt{t^2 + \sigma_1}}\Bigg|_{t_2}^{t_1};$$

2_2) если $\sigma_2 - B_2\sigma_1 > 0$, то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}}\left(-\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0\right)\frac{1}{\sqrt{\sigma_1(\sigma_2/B_2 - \sigma_1)}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{\sigma_2/B_2 - \sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1(t^2 + \sigma_2/B_2)}}\Bigg|_{t_2}^{t_1};$$

3_2) если $\sigma_1 - \sigma_2/B_2 = 0$, то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}}\left(-\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0\right)\frac{t}{\sigma_1\sqrt{t^2 + \sigma_1}}\Bigg|_{t_2}^{t_1};$$

4_2) если $\sigma_2 = 0$ и $|B_1/(2B_2)| > h/2$, то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}}\left(-\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0\right)\operatorname{sgn}(B_1)\frac{1}{2\sigma_1} \ln \frac{t^2}{|t^2 + \sigma_1|}\Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

Итак, в этом варианте интеграл J_{12} вычисляется явно по формуле (13).

Вариант 2. Пусть $B_1 \neq B_2C_1/C_2$. В [10, п. 2] показано, что в (12) квадратный трёхчлен под корнем квадратным неотрицателен (этот результат вытекает также и из приведённых в п. 2.1 выкладок), поэтому его дискриминант неположителен, т.е. $B_1^2/(4B_2^2) - B_0/B_2 \leqslant 0$. Положим $\chi_1^2 = B_0/B_2 - B_1^2/(4B_2^2) \geqslant 0$, где без нарушения общности $\chi_1 \geqslant 0$. Поэтому могут представиться только две возможности: $\chi_1 > 0$ и $\chi_1 = 0$. Рассмотрим их по отдельности.

Вариант 2а: $\boldsymbol{\chi_1 > 0}$. Запишем квадратный трёхчлен в виде

$$B_2U^2 + B_1U + B_0 = B_2\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2 + \chi_1^2\right] = B_2\chi_1^2\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2\Big/\chi_1^2 + 1\right] = B_2\chi_1^2(\operatorname{sh}^2 t + 1),$$

где сделана гиперболическая замена переменных

$$\operatorname{sh} t = \left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)\Big/\chi_1, \quad U = \chi_1 \operatorname{sh} t - \frac{B_1}{2B_2}, \quad t = \operatorname{arcsh}\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)\Big/\chi_1\right].$$

Теперь рассмотрим в (12) второй квадратный трёхчлен в знаменателе (учитывая условие, которым выделяется третий случай) и линейную функцию в числителе – соответственно

$$C_2U^2 + C_1U + C_0 = C_2\left(\chi_1^2 \operatorname{sh}^2 t - \frac{\chi_1 B_1}{B_2}\operatorname{sh} t + \frac{B_1^2}{4B_2^2}\right) + C_1\chi_1 \operatorname{sh} t + C_0 - \frac{B_1C_1}{2B_2} =$$

$$= C_2\chi_1^2 \operatorname{sh}^2 t + \left(C_1\chi_1 - \frac{\chi_1 B_1 C_2}{B_2}\right)\operatorname{sh} t + \frac{B_1^2 C_2}{4B_2^2} - \frac{B_1 C_1}{2B_2} + C_0 = \nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0 > 0$$

и

$$S_1 U + S_0 = S_1 \chi_1 \operatorname{sh} t - \frac{B_1 S_1}{2B_2} + S_0 = \varepsilon_1 \operatorname{sh} t + \varepsilon_0,$$

где $\nu_2 = C_2\chi_1^2 > 0$, $\nu_1 = C_1\chi_1 - \chi_1 B_1 C_2/B_2$, $\nu_0 = B_1^2 C_2/(4B_2^2) - B_1 C_1/(2B_2) + C_0$, $\varepsilon_1 = S_1\chi_1$, $\varepsilon_0 = S_0 - B_1 S_1/(2B_2)$. Так как $\nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0 > 0$, то дискриминант этого квадратного относительно $\operatorname{sh} t$ трёхчлена отрицательный, т.е.

$$\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0 < 0. \tag{14}$$

Кроме того, $\nu_1 \neq 0$ в силу условий, принятых в варианте 2 и в варианте 2а.

Учитывая, что $dU = \chi_1 \operatorname{ch} t\, dt$ и $\operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t$, получаем

$$J_{12} = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int\limits_{t_-}^{t_+} \operatorname{ch} t\, dt \frac{\varepsilon_1 \operatorname{sh} t + \varepsilon_0}{(\nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0)\operatorname{ch} t}, \quad t_\pm = \operatorname{arcsh}\left[\left(\pm\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right].$$

Разобьём знаменатель на произведение двух линейных функций от $\operatorname{sh} t$ с комплексными коэффициентами

$$J_{12} = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int\limits_{t_-}^{t_+} dt \frac{\varepsilon_1 \operatorname{sh} t + \varepsilon_0}{\nu_2(\operatorname{sh} t - G_-)(\operatorname{sh} t - G_+)} = \frac{1}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int\limits_{t_-}^{t_+} dt \left(\frac{\lambda_-}{\operatorname{sh} t - G_-} + \frac{\lambda_+}{\operatorname{sh} t - G_+}\right),$$

где G_-, G_+ – комплексные корни уравнения $\nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0 = 0$ относительно $\operatorname{sh} t$:

$$G_- = \frac{-\nu_1 - \sqrt{\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0}}{2\nu_2} = g_1 - ig_2, \quad G_+ = \frac{-\nu_1 + \sqrt{\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0}}{2\nu_2} = g_1 + ig_2,$$

$$g_1 = -\frac{\nu_1}{2\nu_2} \neq 0, \quad g_2 = \frac{\sqrt{|\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0|}}{2\nu_2} > 0, \quad g_1, g_2 \in \mathbb{R}; \quad G_+ = \overline{G_-}. \tag{15}$$

Отметим, что $g_2 \neq 0$ в силу (14). Коэффициенты $\lambda_\pm$ зависят от $G_\pm$:

$$\lambda_- = \frac{\varepsilon_1 G_- + \varepsilon_0}{G_- - G_+} = \frac{\varepsilon_1 G_- + \varepsilon_0}{-2g_2 i}, \quad \lambda_+ = \frac{\varepsilon_1 G_+ + \varepsilon_0}{G_+ - G_-} = \frac{\varepsilon_1 G_+ + \varepsilon_0}{2g_2 i}. \tag{16}$$

Так как справедливы равенства

$$\frac{\lambda_\pm}{\operatorname{sh} t - G_\pm} = \frac{\lambda_\pm}{(e^t - e^{-t})/2 - G_\pm} \frac{e^t}{e^t} = \frac{2\lambda_\pm e^t}{e^{2t} - 2G_\pm e^t - 1},$$

то, перейдя к замене $\zeta = e^t$, $d\zeta = e^t\, dt$, $dt = d\zeta/\zeta$,

$$\zeta_1 = \exp\left(\operatorname{arcsh}\left[\left(-\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right]\right), \quad \zeta_2 = \exp\left(\operatorname{arcsh}\left[\left(\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right]\right), \tag{17}$$

будем иметь

$$J_{12} = \frac{1}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int\limits_{t_-}^{t_+} dt \left(\frac{2\lambda_- e^t}{e^{2t} - 2G_- e^t - 1} + \frac{2\lambda_+ e^t}{e^{2t} - 2G_+ e^t - 1}\right) = \frac{1}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\zeta} \left(\frac{2\lambda_-\zeta}{\zeta^2 - 2G_-\zeta - 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\lambda_+\zeta}{\zeta^2 - 2G_+\zeta - 1}\right) = \frac{2}{\nu_2\sqrt{B_2}} \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \left(\frac{\lambda_-}{\zeta^2 - 2G_-\zeta - 1} + \frac{\lambda_+}{\zeta^2 - 2G_+\zeta - 1}\right).$$

В данном случае нельзя применить стандартные формулы для нахождения первообразной от вещественных подынтегральных функций, поскольку в нашем случае коэффициенты комплексные. Введём обозначения: $Z_{1-} = G_- - \sqrt{G_-^2+1}$, $Z_{1+} = G_- + \sqrt{G_-^2+1}$,

$$Z_{2-} = G_+ - \sqrt{G_+^2+1}, \quad Z_{2+} = G_+ + \sqrt{G_+^2+1}, \tag{18}$$

$$\gamma_- = \frac{1}{2\sqrt{G_-^2+1}}, \quad \gamma_+ = \frac{1}{2\sqrt{G_+^2+1}}. \tag{19}$$

Знаменатель в дробях (19) не обращается в нуль, поскольку $g_1 \neq 0$, как отмечено выше. В результате

$$J_{12} = \frac{2}{\nu_2\sqrt{B_2}}\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta\left(\frac{\lambda_-}{(\zeta-Z_{1-})(\zeta-Z_{1+})} + \frac{\lambda_+}{(\zeta-Z_{2-})(\zeta-Z_{2+})}\right) =$$

$$= \frac{-2}{\nu_2\sqrt{B_2}}\left[\lambda_-\gamma_-\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta\left(\frac{1}{\zeta-Z_{1-}} - \frac{1}{\zeta-Z_{1+}}\right) + \lambda_+\gamma_+\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta\left(\frac{1}{\zeta-Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta-Z_{2+}}\right)\right].$$

Принимая во внимание выражения (15), (16), (18), (19), получаем $\lambda_- = \overline{\lambda_+}$, $Z_{1-} = \overline{Z_{2-}}$, $Z_{1+} = \overline{Z_{2+}}$, $\gamma_+ = \overline{\gamma_-}$. Тогда

$$J_{12} = \frac{-2}{\nu_2\sqrt{B_2}}\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta\left[\overline{\lambda_+\gamma_+\left(\frac{1}{\zeta-Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta-Z_{2+}}\right)} + \lambda_+\gamma_+\left(\frac{1}{\zeta-Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta-Z_{2+}}\right)\right].$$

Так как $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$, то под интегралом находится сумма двух комплексно сопряжённых функций, поэтому интеграл J_{12} вещественный:

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}}\operatorname{Re}\left[\lambda_+\gamma_+\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta\left(\frac{1}{\zeta-Z_{2-}} - \frac{1}{\zeta-Z_{2+}}\right)\right].$$

В итоге приходим к равенству

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}}\operatorname{Re}\left[\lambda_+\gamma_+(\ln(Z_{2-}-\zeta_2) - \ln(Z_{2-}-\zeta_1) - \ln(Z_{2+}-\zeta_2) + \ln(Z_{2+}-\zeta_1))\right]. \tag{20}$$

Логарифмы с комплексными аргументами $Z_{2\pm}-\zeta_l$, где $l=1,2$, преобразуются по формуле

$$\ln(Z_{2\pm}-\zeta_l) = \ln|Z_{2\pm}-\zeta_l| + i\arg(Z_{2\pm}-\zeta_l), \quad l=1,2. \tag{21}$$

Рассмотрим величины, входящие в обозначения (18), (19). Так как $g_2 = \operatorname{Im} G_+ > 0$, то можно считать, что $\arg G_+ \in (0,\pi)$, тогда $\arg(G_+^2+1) \in (0, 2\pi)$ и

$$\arg\sqrt{G_+^2+1} = \frac{1}{2}\arg(G_+^2+1) \in (0,\pi),$$

поэтому $\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1} > 0$. Более того, если $\arg G_+ \in (0,\pi/2)$, то $\arg\sqrt{G_+^2+1} \in (0,\pi/2)$, а если $\arg G_+ \in (\pi/2,\pi)$, то $\arg\sqrt{G_+^2+1} \in (\pi/2,\pi)$. Следовательно,

$$\operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re}\sqrt{G_+^2+1}\right) = \operatorname{sgn}\operatorname{Re} G_+ = \operatorname{sgn} g_1.$$

Положим

$$G_+^2+1=g_1^2-g_2^2+1+2g_1g_2i=|G_+^2+1|\exp(i\Psi),\quad \Psi=\arg(G_+^2+1),$$

$$\cos\Psi=\frac{g_1^2-g_2^2+1}{|G_+^2+1|},\qquad |G_+^2+1|=\sqrt{(g_1^2-g_2^2+1)^2+4g_1^2g_2^2}. \tag{22}$$

Используя тригонометрические формулы [15, с. 109], получаем

$$\sqrt{G_+^2+1}=\sqrt{|G_+^2+1|}\exp(i\Psi/2)=\sqrt{|G_+^2+1|}\left(\cos\frac{\Psi}{2}+i\sin\frac{\Psi}{2}\right),$$

$$\cos\frac{\Psi}{2}=\operatorname{sgn}(g_1)\sqrt{\frac{1+\cos\Psi}{2}}=\operatorname{sgn}(g_1)\sqrt{\frac{|G_+^2+1|+g_1^2-g_2^2+1}{2|G_+^2+1|}},$$

$$\sin\frac{\Psi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\Psi}{2}}=\sqrt{\frac{|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)}{2|G_+^2+1|}}. \tag{23}$$

Поскольку $\arg\sqrt{G_+^2+1}=\Psi/2\in(0,\pi)$, то $(-\Psi/2)\in(-\pi,0)$. Следовательно,

$$\gamma_+=\frac{1}{2\sqrt{G_+^2+1}}=\frac{\exp(-i\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2+1|}},$$

$$\operatorname{Re}\gamma_+=\frac{\cos(\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2+1|}}=\operatorname{sgn}(g_1)\frac{\sqrt{|G_+^2+1|+g_1^2-g_2^2+1}}{2\sqrt{2}|G_+^2+1|},$$

$$\operatorname{Im}\gamma_+=-\frac{\sin(\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2+1|}}=-\frac{\sqrt{|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)}}{2\sqrt{2}|G_+^2+1|}, \tag{24}$$

где величины g_1 и g_2 определены в (15), а $|G_+^2+1|$ – в (22).

Лемма. *Пусть* $G_+=g_1+ig_2$, *где* g_1, g_2 *– вещественные числа и* $g_2>0$, *тогда*

$$g_2=\operatorname{Im}G_+>|\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1}|.$$

Доказательство. Используя обозначения и соотношения из (22) и (23), находим

$$\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1}=\sqrt{|G_+^2+1|}\sin\frac{\Psi}{2}=$$

$$=\sqrt{|G_+^2+1|}\sqrt{\frac{|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)}{2|G_+^2+1|}}=\sqrt{\frac{|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)}{2}}. \tag{25}$$

Так как $g_2>0$, то несложно проверить, что

$$|G_+^2+1|=\sqrt{(g_1^2-g_2^2+1)^2+4g_1^2g_2^2}<g_1^2+g_2^2+1,$$

поэтому справедлива оценка

$$\frac{1}{2}(|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1))<g_2^2.$$

Из (25) вытекает равенство

$$\left(\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1}\right)^2=\frac{1}{2}(|G_+^2+1|-(g_1^2-g_2^2+1)).$$

Следовательно, $(\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1})^2<g_2^2$, откуда $|\operatorname{Im}\sqrt{G_+^2+1}|<g_2$. Лемма доказана.

Следствие. *Если выполнены условия леммы, то*

$$\operatorname{Im}(Z_{2\pm}-\zeta_l)=\operatorname{Im}\left(G_+\pm\sqrt{G_+^2+1}\right)>0,\quad l=1,2.$$

Так как $Z_{2\pm}=G_+\pm\sqrt{G_+^2+1}$ в силу (18), а ζ_1 и ζ_2 – вещественные числа, то

$$Z_{2\pm}-\zeta_l=\operatorname{Re}(Z_{2\pm}-\zeta_l)+i\operatorname{Im}(Z_{2\pm}-\zeta_l),$$

$$\operatorname{Re}(Z_{2\pm}-\zeta_l)=g_1\pm\sqrt{|G_+^2+1|}\cos\frac{\Psi}{2}-\zeta_l,\quad \operatorname{Im}(Z_{2\pm}-\zeta_l)=g_2\pm\sqrt{|G_+^2+1|}\sin\frac{\Psi}{2},$$

$$|Z_{2\pm}-\zeta_l|=\sqrt{\left(g_1\pm\sqrt{|G_+^2+1|}\cos\frac{\Psi}{2}-\zeta_l\right)^2+\left(g_2\pm\sqrt{|G_+^2+1|}\sin\frac{\Psi}{2}\right)^2},\quad l=1,2. \tag{26}$$

Согласно следствию к лемме справедливо неравенство $\operatorname{Im}(Z_{2\pm}-\zeta_l)>0$, поэтому можно считать, что $\arg(Z_{2\pm}-\zeta_l)\in(0,\pi)$, где $l=1,2$. Следовательно,

$$\arg(Z_{2\pm}-\zeta_l)=\arccos\frac{\operatorname{Re}(Z_{2\pm}-\zeta_l)}{|Z_{2\pm}-\zeta_l|}=\arccos\frac{g_1\pm\sqrt{|G_+^2+1|}\cos(\Psi/2)-\zeta_l}{|Z_{2\pm}-\zeta_l|},\quad l=1,2. \tag{27}$$

В соотношениях (26), (27) используются обозначения из (15), (17), (22), (23).

Из равенств (16) вытекает, что

$$\lambda_+=\frac{\varepsilon_1G_++\varepsilon_0}{G_+-G_-}=\frac{\varepsilon_1(g_1+ig_2)+\varepsilon_0}{2ig_2}=\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{\varepsilon_1g_1+\varepsilon_0}{2g_2}i,$$

поэтому

$$\operatorname{Re}\lambda_+=\frac{\varepsilon_1}{2},\quad \operatorname{Im}\lambda_+=-\frac{\varepsilon_1g_1+\varepsilon_0}{2g_2}.$$

Положим

$$\lambda_+\gamma_+=\Lambda_1+i\Lambda_2,\quad \Lambda_1=\frac{\varepsilon_1}{2}\operatorname{Re}\gamma_++\frac{\varepsilon_1g_1+\varepsilon_0}{2g_2}\operatorname{Im}\gamma_+,\quad \Lambda_2=\frac{\varepsilon_1}{2}\operatorname{Im}\gamma_+-\frac{\varepsilon_1g_1+\varepsilon_0}{2g_2}\operatorname{Re}\gamma_+,$$

где $\operatorname{Re}\gamma_+$ и $\operatorname{Im}\gamma_+$ однозначно определяются в (24) с использованием (15), (22). Применяя формулу (26), находим сумму логарифмов

$$s_1=\ln|Z_{2-}-\zeta_2|-\ln|Z_{2-}-\zeta_1|-\ln|Z_{2+}-\zeta_2|+\ln|Z_{2+}-\zeta_1|=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{q+l}\ln\left[\left(g_1+(-1)^q\sqrt{|G_+^2+1|}\cos\frac{\Psi}{2}-\zeta_l\right)^2+\left(g_2+(-1)^q\sqrt{|G_+^2+1|}\sin\frac{\Psi}{2}\right)^2\right].$$

Используя формулу (27), вычисляем сумму аргументов

$$s_2=\arg(Z_{2-}-\zeta_2)-\arg(Z_{2-}-\zeta_1)-\arg(Z_{2+}-\zeta_2)+\arg(Z_{2+}-\zeta_1)=$$

$$
=-\sum_{q=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{q+l}\arccos\frac{g_1+(-1)^q\sqrt{|G_+^2+1|}\cos(\Psi/2)-\zeta_l}{\sqrt{\left(g_1+(-1)^q\sqrt{|G_+^2+1|}\cos\dfrac{\Psi}{2}-\zeta_l\right)^2+\left(g_2+(-1)^q\sqrt{|G_+^2+1|}\sin\dfrac{\Psi}{2}\right)^2}}.
$$

В формулах для s_1, s_2 использованы обозначения из (15), (17), (22), (23).

Согласно (20) и (21) получаем

$$
J_{12}=\frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}}\mathrm{Re}\,[\lambda_+\gamma_+(s_1+is_2)]=\frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}}\mathrm{Re}\,[(\Lambda_1+i\Lambda_2)(s_1+is_2)].
$$

В итоге приходим к равенству

$$
J_{12}=\frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}}(\Lambda_1 s_1-\Lambda_2 s_2).
$$

Таким образом, в варианте 2а интеграл J_{12} вычислен явно.

Вариант 2б: $\boldsymbol{\chi_1=0}$. В этом случае

$$
B_2U^2+B_1U+B_0=B_2\left[\left(U+\frac{B_1}{2B_2}\right)^2+\chi_1^2\right]=B_2\left(U+\frac{B_1}{2B_2}\right)^2=B_2(U+\Omega)^2,
$$

где $\Omega=B_1/(2B_2)$. Как отмечено выше, считаем, что $\Omega\notin[-h/2,h/2]$. Тогда

$$
J_{12}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}dU\,\frac{S_1U+S_0}{(C_2U^2+C_1U+C_0)\sqrt{B_2U^2+B_1U+B_0}}=
$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{B_2}}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{(S_1U+S_0)\,\mathrm{sgn}\,(U+\Omega)\,dU}{(C_2U^2+C_1U+C_0)(U+\Omega)}=\frac{\mathrm{sgn}\,(\Omega)}{\sqrt{B_2}}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{(S_1U+S_0)\,dU}{(C_2U^2+C_1U+C_0)(U+\Omega)}=
$$

$$
=\frac{\mathrm{sgn}\,(\Omega)}{\sqrt{B_2}}\left[p_1\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{U\,dU}{C_2U^2+C_1U+C_0}+p_2\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{dU}{C_2U^2+C_1U+C_0}+p_3\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{dU}{U+\Omega}\right],\qquad(28)
$$

где

$$
p_1=-\frac{C_2(S_1\Omega-S_0)}{C_1\Omega-C_0-C_2\Omega^2},\quad p_2=\frac{S_0}{\Omega}-\frac{C_0(S_1\Omega-S_0)}{\Omega(C_1\Omega-C_0-C_2\Omega^2)},\quad p_3=\frac{S_1\Omega-S_0}{C_1\Omega-C_0-C_2\Omega^2}.
$$

Интегралы в (28) табличные. Воспользуемся формулами 1.2.8.19 и 1.2.8.13 из [13]. Учитывая, что $C_1^2-4C_2C_0<0$, находим

$$
J_{12}=\frac{\mathrm{sgn}\,(\Omega)}{\sqrt{B_2}}\Biggl(p_3\ln|U+\Omega|+\frac{p_1}{2C_2}\ln|C_2U^2+C_1U+C_0|-
$$

$$
-\frac{p_1C_1}{C_2\sqrt{4C_2C_0-C_1^2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2C_2U+C_1}{\sqrt{4C_2C_0-C_1^2}}\right)+\frac{2p_2}{\sqrt{4C_2C_0-C_1^2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2C_2U+C_1}{\sqrt{4C_2C_0-C_1^2}}\right)\Biggr)\Biggr|_{U=-h/2}^{U=h/2}.
$$

Таким образом, в варианте 2б интеграл J_{12} также вычислен явно.

3. Основной результат. Сформулируем основной результат этой работы.

Теорема. *Пусть* Γ – *простая гладкая замкнутая поверхность класса* C^2, *ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, или простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса* C^2, *содержащая свои предельные точки. Пусть* Γ

допускает параметризацию (1) со свойством (3) и $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$. *Тогда для гармонического потенциала двойного слоя (4) при* $x \notin \Gamma$ *имеет место квадратурная формула*

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) \approx -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}K_{nm}(x), \tag{29}$$

где интегралы $K_{nm}(x)$ *вычислены в явном виде в п. 2.*

4. Стандартная квадратурная формула. Квадратурная формула (29) является альтернативой стандартной квадратурной формуле для потенциала двойного слоя вне поверхности Γ, используемой в инженерных расчётах [4, гл. 2]:

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) \approx -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}\frac{hH}{|x-y(u_n,v_m)|^3}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u_n,v_m))(y_j(u_n,v_m)-x_j). \tag{30}$$

Стандартная квадратурная формула получается из формулы (6) заменой канонического интеграла из (7) на следующее его приближённое значение:

$$\frac{hH}{|x-y(u_n,v_m)|^3}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u_n,v_m))(y_j(u_n,v_m)-x_j).$$

Пусть для упрощения Γ – замкнутая поверхность. Значение, вычисленное по стандартной квадратурной формуле (30), стремится к бесконечности, если точка x стремится изнутри или извне Γ к одной из точек $y(u_n,v_m) \in \Gamma$, хотя сам потенциал двойного слоя в наших предположениях ограничен на Γ и непрерывно продолжим на Γ как изнутри, так и извне. Другими словами, если точка x стремится к точке на Γ изнутри или извне, то потенциал двойного слоя стремится к конечному пределу. Стандартная квадратурная формула не сохраняет важнейшие свойства потенциала двойного слоя, а именно, ограниченность на Γ и непрерывную продолжимость на Γ извне и изнутри. Стандартная квадратурная формула расходится вблизи границы.

5. Численные тесты. Тестирование улучшенной (29) и стандартной (30) квадратурных формул проведено в случае, когда поверхность Γ является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями:

$$y_1(u,v) = \cos u \sin v, \quad y_2(u,v) = \sin u \sin v, \quad y_3(u,v) = \cos v, \tag{31}$$

причём $(u,v) \in [0,2\pi]\times[0,\pi]$. Отметим, что в данном случае $|\eta(y(u,v))| = \sin v$ и $|\eta(y(u,0))| = |\eta(y(u,\pi))| = 0$ для всех $u \in [0,2\pi]$. Иначе говоря, $|\eta(y)| = 0$ на полюсах сферы при такой параметризации, но условия теоремы выполняются.

Согласно [16, § 27.6] плотность потенциала двойного слоя на поверхности Γ можно найти по формуле

$$\mu(x)|_\Gamma = \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{\Gamma^-} - \mathcal{W}_0[\mu](x)|_{\Gamma^+}.$$

Здесь поверхность Γ рассматривается как двусторонняя, через Γ^- обозначена сторона, которую мы видим, глядя навстречу вектору нормали $\boldsymbol{n}_y$, а через Γ^+ – противоположная сторона. В формуле берутся предельные значения потенциала двойного слоя на разных сторонах Γ. Отметим, что направление единичной нормали $\boldsymbol{n}_y$ совпадает с направлением нормали η, так как вектор $\boldsymbol{n}_y$ получается из η в результате нормировки. Пусть теперь Γ – единичная сфера, заданная параметризацией (31), тогда формулы (2) для нормали η определяют внутреннюю нормаль на сфере, а значит, Γ^- – внутренняя сторона единичной сферы, а Γ^+ – её внешняя сторона.

В рассматриваемых тестовых примерах для потенциала двойного слоя с заданной на единичной сфере плотностью известно явное выражение во всём пространстве, поэтому точные значения потенциала можно сравнить с приближёнными, вычисленными по квадратурным формулам. Во всех тестах приближённое значение потенциала двойного слоя вычислялось по стандартной квадратурной формуле (30) и по улучшенной квадратурной формуле (29) в некоторых точках на вспомогательных сферах, имеющих центры в начале координат и радиусы, равные $1 \pm \Delta R$. Тем самым вспомогательные сферы находятся либо внутри, либо снаружи сферы единичного радиуса, на которой задана плотность потенциала, на расстоянии ΔR от неё. Затем были рассчитаны значения абсолютных погрешностей в этих точках, и для каждой вспомогательной сферы определялись максимумы значений этих погрешностей.

Координаты точек, которые использовались для оценки максимальной абсолютной погрешности, выбирались следующими:

$$x_j^{ql} = Ry_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$u_q = \frac{2\pi}{2N} q, \quad q = \overline{0, 2N}; \quad v_l = \frac{\pi}{2M} l, \quad l = \overline{1, 2M-1}, \tag{32}$$

где величина $y_j(u, v)$ определяется формулами (31), R – радиус вспомогательной сферы. В частности, эти точки расположены над и под центрами участков разбиения единичной сферы, серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ. Отметим, что эти точки распределены по всей сфере.

Вычисления проводились для различных значений M и N. Величины шагов выбирались по формулам $h = 2\pi/N$, $H = \pi/M$. Если $N = M = 25$, то $h \approx 0.25$, $H \approx 0.13$; если $N = M = 50$, то $h \approx 0.126$, $H \approx 0.063$; если $N = M = 100$, то $h \approx 0.063$, $H \approx 0.031$.

В таблицах приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей. В левом столбце указано отличие радиуса вспомогательной сферы от единицы: для внутренних сфер радиус равен $1 - \Delta R$, для внешних $1 + \Delta R$. В верхней строке указаны значения M, N. Первое число в ячейках таблицы – максимальная погрешность для стандартной квадратурной формулы на данной вспомогательной сфере, а число после точки с запятой – максимальная погрешность на данной сфере для улучшенной формулы.

Тест 1. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = 1$; тогда гармонический потенциал двойного слоя имеет вид [16, § 27.2]

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

В табл. 1 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

Таблица 1. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 1

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
		Внутренние сферы	
0.1	0.096; 0.021	0.0079; 0.0045	0.0020; 0.0011
0.06	0.44; 0.041	0.054; 0.0083	0.0055; 0.0018
0.03	2.42; 0.094	0.45; 0.022	0.056; 0.0041
		Внешние сферы	
0.1	0.11; 0.021	0.0081; 0.0039	0.0020; 0.00092
0.06	0.47; 0.048	0.061; 0.0080	0.0055; 0.0016
0.03	2.46; 0.15	0.47; 0.023	0.060; 0.0041

Тест 2. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = \cos v$; тогда гармонический потенциал двойного слоя имеет вид

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \begin{cases} \dfrac{2|x|\cos\vartheta}{3} & \text{при} \quad |x| < 1, \\ -\dfrac{\cos\vartheta}{3|x|^2} & \text{при} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

где ϑ – зенитный угол в сферических координатах с центром в начале координат. В табл. 2 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

Таблица 2. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 2

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
Внутренние сферы			
0.1	0.032; 0.011	0.0078; 0.0030	0.0020; 0.00076
0.06	0.18; 0.017	0.020; 0.0044	0.0055; 0.0012
0.03	1.14; 0.043	0.19; 0.0086	0.020; 0.0021
Внешние сферы			
0.1	0.040; 0.0076	0.0077; 0.0016	0.0020; 0.00042
0.06	0.20; 0.017	0.020; 0.0030	0.0055; 0.00080
0.03	1.16; 0.050	0.20; 0.0086	0.020; 0.0017

Тест 3. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = \cos u \sin v;$ тогда гармонический потенциал двойного слоя имеет вид

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \begin{cases} \dfrac{2|x|\cos\varphi\sin\vartheta}{3} & \text{при} \quad |x| < 1, \\ -\dfrac{\cos\varphi\sin\vartheta}{3|x|^2} & \text{при} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

где ϑ и φ – зенитный и азимутальный углы в сферических координатах с центром в начале координат. В табл. 3 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

Таблица 3. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 3

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
Внутренние сферы			
0.1	0.096; 0.023	0.0055; 0.0049	0.000028; 0.0012
0.06	0.44; 0.043	0.054; 0.0088	0.0021; 0.0019
0.03	2.42; 0.096	0.45; 0.022	0.056; 0.0043
Внешние сферы			
0.1	0.12; 0.019	0.0082; 0.0036	0.000069; 0.00085
0.06	0.48; 0.045	0.061; 0.0077	0.0029; 0.0016
0.03	2.46; 0.15	0.47; 0.023	0.060; 0.0040

Тест 4. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = (3\cos^2 v - 1)/2;$ тогда гармонический потенциал двойного слоя имеет вид

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \begin{cases} \dfrac{3|x|^2(3\cos^2\vartheta - 1)}{10} & \text{при} \quad |x| < 1, \\ -\dfrac{(3\cos^2\vartheta - 1)}{5|x|^3} & \text{при} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

где ϑ – зенитный угол в сферических координатах с центром в начале координат. В табл. 4 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

Заключение. Из таблиц видно, что улучшенная квадратурная формула обеспечивает более высокую точность вычислений вблизи границы Γ, чем стандартная. Кроме того, значения, вычисленные по стандартной формуле, стремятся к бесконечности при приближении к границе. Тесты показывают, что улучшенная формула даёт хорошую точность вычислений для всех точек, расположенных на расстоянии H и более от границы Γ. В этом случае улучшенная квадратурная формула имеет второй порядок сходимости и обеспечивает погрешность вычислений порядка $O(hH)$. На расстояниях порядка hH до границы улучшенная формула даёт погрешность $O(H)$, а стандартная формула расходится.

Таблица 4. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 4

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
	Внутренние сферы		
0.1	0.047; 0.012	0.0079; 0.0026	0.0020; 0.00063
0.06	0.22; 0.022	0.027; 0.0045	0.0055; 0.0011
0.03	1.21; 0.048	0.22; 0.011	0.028; 0.0022
	Внешние сферы		
0.1	0.057; 0.010	0.0077; 0.0019	0.0020; 0.00044
0.06	0.24; 0.023	0.031; 0.0039	0.0055; 0.00080
0.03	1.23; 0.074	0.23; 0.012	0.03; 0.0020

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М., 1985.
2. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
3. *Сетуха А.В.* Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения. М., 2016.
4. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М., 1987.
5. *Krutitskii P.A., Kwak D.Y., Hyon Y.K.* Numerical treatment of a skew-derivative problem for the Laplace equation in the exterior of an open arc // J. of Eng. Math. 2007. V. 59. P. 25–60.
6. *Крутицкий П.А., Колыбасова В.В.* Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1262–1276.
7. *Крутицкий П.А.* Смешанная задача для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 9. С. 1181–1190.
8. *Krutitskii P.A.* The 2-dimensional Dirichlet problem in an external domain with cuts // Zeitschr. für Analysis und ihre Anwend. 1998. Bd. 17. № 2. S. 361–378.
9. *Krutitskii P.A.* The Dirichlet problem for the two-dimensional Laplace equation in a multiply connected domain with cuts // Proc. of the Edinburgh Math. Soc. 2000. V. 43. № 2. P. 325–341.
10. *Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В.* Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1269–1284.
11. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. М., 2000.
12. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. М., 1973.
13. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981.
14. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
15. *Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г.* Математические формулы. М., 1985.
16. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 03.03.2021 г.
После доработки 03.03.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.