

УДК 519.622+517.958:533.7

## ОБ УСТОЙЧИВЫХ МЕТОДАХ РУНГЕ–КУТТЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЁРКИНА

© 2021 г. В. В. Лукин, В. Н. Корчагова, С. М. Сауткина

Рассматриваются методы Рунге–Кутты, область устойчивости которых включает круг максимального диаметра для заданных количества стадий и порядка. Указанные методы применяются для решения начальных задач, полученных при аппроксимации гиперболических систем с использованием разрывного метода Галёркина. Предложены два трёхстадийных метода из рассматриваемого класса, для которых с помощью тестовых задач для уравнения переноса и для системы уравнений газовой динамики исследована способность сохранять устойчивость и монотонность численного решения при максимально возможных шагах сетки по времени.

DOI: 10.31857/S0374064121070086

**Введение.** Математическое моделирование скоростных течений газа, содержащих разрывы решения и/или области резкого и неустойчивого его изменения, является одной из важных областей приложения моделей газовой динамики. Успех численного моделирования в равной степени зависит от выбора способа аппроксимации соответствующей системы гиперболических уравнений как по времени, так и по пространству [1]. Сложность течений, описываемых разрывными решениями, предъявляет к выбору разностных схем высокие требования по точности, устойчивости и монотонности [2].

В последние годы особой популярностью при численном моделировании течений жидкости и газа пользуются схемы на основе разрывного метода Галёркина [3–9]. Достоинства метода определяются его высокими разрешающими возможностями, основанными на полиномиальной аппроксимации решения произвольного порядка внутри каждой ячейки сетки и допущении разрывов решения на границах ячеек. При использовании такого подхода очень важен выбор схемы аппроксимации уравнений по времени. Необходимо выбирать методы, обеспечивающие скорость вычислений, их устойчивость и обладающие свойством невозрастания паразитных осцилляций решения. К таким схемам относятся, например, явные методы Рунге–Кутты, удовлетворяющие свойству TVD – total variation diminishing [10]. При этом важным является использование методов с оптимальной для данного класса задач областью устойчивости [11–13]. В то же время требования к точности метода сталкиваются с проблемой потери порядка аппроксимации на разрывах [14].

Цель статьи – выбор и исследование методов Рунге–Кутты с увеличенной областью устойчивости, адаптированных для решения задач газовой динамики с использованием разрывного метода Галёркина.

**1. Разрывный метод Галёркина.** Рассмотрим скалярный закон сохранения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} F(U) = 0, \quad (1)$$

где  $U(x, t)$  – неизвестная функция,  $F(U) = (F_1(U), \dots, F_M(U))^T$  – вектор потоков,  $N$  – размерность пространства. Будем считать, что в пространственной области  $\Omega$  на временном отрезке  $[0, T]$  задана начальная задача

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Введём в области  $\Omega$  сетку  $\Omega_h = \{I_j\}_{j=1}^n$ . На каждой ячейке  $I_j$  зададим пространство  $P^m(I_j)$  полиномов степени не выше  $m$  и выберем в нём ортонормированный в  $L^2(I_j)$  базис  $\{\varphi_j^{(s)}(x)\}_{s=0}^m$ . Вне ячейки  $I_j$  положим  $\varphi_j^{(s)}(x) = 0$ ,  $\varphi = \overline{1, n}$ ,  $s = \overline{0, m}$ . Будем искать при-

ближённное решение  $U_h$  задачи (1), (2) в виде линейной комбинации выбранных базисных функций

$$U_h(x, t) = \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^m U_j^{(s)}(t) \varphi_j^{(s)}(x). \quad (3)$$

Умножив уравнение (1) скалярно на базисную функцию  $\varphi_j^{(s)}(x)$ , получим

$$\int_{I_j} \frac{\partial U}{\partial t} \varphi_j^{(s)}(x) dV + \int_{I_j} \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \varphi_j^{(s)}(x) dV = 0,$$

Далее преобразуем второе слагаемое:

$$\int_{I_j} \frac{\partial U}{\partial t} \varphi_j^{(s)}(x) dV + \int_{I_j} \sum_{i=1}^N \frac{\partial (F_i \varphi_j^{(s)}(x))}{\partial x_i} dV - \int_{I_j} \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial \varphi_j^{(s)}(x)}{\partial x_i} dV = 0,$$

откуда, наконец, получим с использованием формулы Остроградского–Гаусса

$$\int_{I_j} \frac{\partial U}{\partial t} \varphi_j^{(s)}(x) dV + \oint_{\partial I_j} \sum_{i=1}^N F_i n_i \varphi_j^{(s)}(x) dS - \int_{I_j} \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial \varphi_j^{(s)}(x)}{\partial x_i} dV = 0, \quad (4)$$

где  $n = (n_1, \dots, n_N)^T$  – вектор внешней нормали к поверхности  $\partial I_j$ , ограничивающей ячейку  $I_j$ .

Подставляя в равенство (4) вместо функции  $U$  представление (3) для функции  $U_h$  и учитывая ортонормированность базиса  $\{\varphi_j^{(s)}(x)\}_{s=0}^m$ , приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов  $U_j^{(s)}$  разложения приближённого решения:

$$\frac{dU_j^{(s)}}{dt} = - \oint_{\partial I_j} \sum_{i=1}^N F_i n_i \varphi_j^{(s)}(x) dS + \int_{I_j} \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial \varphi_j^{(s)}(x)}{\partial x_i} dV, \quad j = \overline{1, n}, \quad s = \overline{0, m},$$

или

$$\frac{dU_j^{(s)}}{dt} = L_h(\dots, U_\beta^{(\alpha)}, \dots), \quad j = \overline{1, n}, \quad s = \overline{0, m}. \quad (5)$$

Проецируя равенство (2) (с заменой функции  $U$  функцией  $U_h$ ) на базисные функции  $\varphi_j^{(s)}$ , получим начальные условия задачи Коши

$$U_j^{(s)}(0) = \int_{I_j} U_0(x) \varphi_j^{(s)}(x) dV, \quad j = \overline{1, n}, \quad s = \overline{0, m}. \quad (6)$$

Описанный подход определяет разрывный метод Галёркина [3]. Он позволяет строить высокоточные разностные схемы с использованием компактного шаблона аппроксимации даже для методов высокого порядка, а также добиваться хорошей разрешающей способности алгоритма на сильных разрывах.

**2. Выбор метода интегрирования по времени.** Как правило, в силу нелинейности оператора  $L_h$  для решения задачи Коши (5), (6) используются явные методы Рунге–Кутты. В то же время при использовании этих методов нужно для обеспечения устойчивости накладывать существенные ограничения на шаг по времени. Целесообразно выбирать такие методы,

которые при необходимом порядке точности имели бы как можно бóльшую область устойчивости. При этом выбор области устойчивости, вытянутой вдоль действительной оси, не всегда является оптимальным [13].

Рассмотрим одномерное линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

и будем решать его на отрезке  $[0, L] = \Omega$ . Введём на нём равномерную сетку  $\Omega_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, n}, h = L/n\}$ . В каждом узле зададим функцию  $u_i(t)$ , представляющую собой приближённое значение решения. Аппроксимируя пространственную производную разностью назад, получим систему ОДУ для функций  $u_i$ , соответствующих внутренним узлам:

$$\frac{du_i}{dt} = -c \frac{u_i - u_{i-1}}{h}. \tag{8}$$

Рассмотрим задачу на собственные значения  $-c(u_i - u_{i-1}) = \lambda h u_i$  с периодическими граничными условиями  $u_0 = u_n$ . Её решение имеет вид

$$\mu_k = \exp(-\tilde{i}2\pi k/n) - 1,$$

где  $\mu_k = \lambda_k h/c$ ,  $\tilde{i} = \sqrt{-1}$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ . На рис. 1 точками на комплексной плоскости изображены значения  $\mu_k$ . Видим, что область устойчивости метода, применяемого для интегрирования системы (8), не стоит выбирать вытянутой вдоль действительной оси, как это характерно, например, для методов Рунге–Кутты–Чебышёва [15, гл. IV, § 2]. Эта область должна включать в себя круг максимально возможного диаметра, касающийся мнимой оси в точке  $(0, 0)$ . Очевидно, что в случае более сложного, нелинейного вида вектора потоков  $F(U)$  расположение собственных чисел линейной части оператора  $L_h$  будет иным. Тем не менее приведённый пример демонстрирует общий принцип выбора методов по области устойчивости для гиперболических уравнений.

В работе [13] рассмотрен подход к построению методов Рунге–Кутты с областью устойчивости, включающей в себя круг максимального диаметра (условие МД), касающийся начала координат. Для методов первого и второго порядка точности авторы получили вид функции устойчивости, обеспечивающей выполнение условия МД, для произвольного количества стадий  $s$ . В частности, для метода второго порядка такая функция имеет вид

$$R(\mu) = \frac{s-1}{s} \left( \frac{\mu}{s-1} + 1 \right)^s + \frac{1}{s}. \tag{9}$$

Соответствующие области устойчивости для количества стадий  $s = 2, 3, 4, 5, 6$  приведены на рис. 2. При этом задание вида функции устойчивости не задаёт единственным образом сам метод.

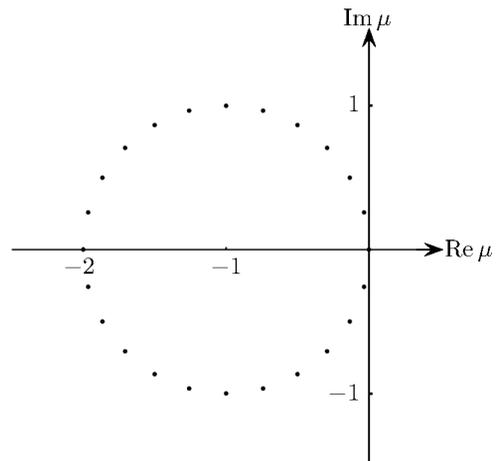


Рис. 1. Приведённые собственные числа  $\mu_k$  оператора разностной производной назад.

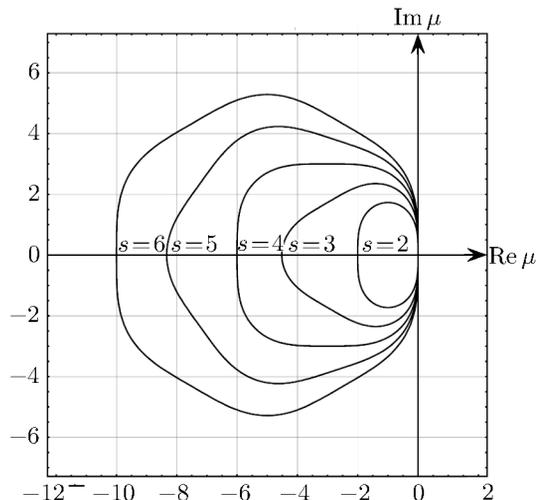


Рис. 2. Области устойчивости, соответствующие функции устойчивости (9), для количества стадий  $s = 2, 3, 4, 5, 6$ .

**2.1. Интерполяционное представление методов Рунге–Кутты.** Для автономной системы ОДУ  $u' = f(u)$  явный метод Рунге–Кутты вычисления значения приближённого решения  $y_{l+1} \approx u(t_l + \tau)$  по значению  $y_l \approx u(t_l)$  имеет вид [16, гл. II, § 2]

$$g_i = y_l + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} k_j, \quad k_i = f(g_i), \quad i = \overline{1, s}, \tag{10}$$

$$y_{l+1} = y_l + \tau \sum_{j=1}^s b_j k_j. \tag{11}$$

Далее будем опираться на следующее представление метода.

**Утверждение 1.** Метод Рунге–Кутты (10), (11) в случае, если  $a_{i,i-1} \neq 0$  для всех  $i = \overline{2, s}$ , может быть представлен в виде

$$g_1 = y_l, \quad g_i = g_{i-1} + \tau a_{i,i-1} k_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \eta_j^i g_j, \quad i = \overline{2, s}, \tag{12}$$

$$g_{s+1} = g_s + \tau \xi k_s, \quad y_{l+1} = \sum_{j=1}^{s+1} \sigma_j g_j, \tag{13}$$

где  $\sigma_j, j = \overline{1, s}$ , и  $\eta_j^i, i = \overline{2, s}, j = \overline{1, i-1}$ , – некоторый набор постоянных коэффициентов, вычисляемых через коэффициенты  $a_{i,j}, i = \overline{2, s}, j = \overline{1, i-1}$ , и  $b_j, j = \overline{1, s}$ , при этом коэффициент  $\xi \neq 0$  может быть выбран произвольно, и  $\sigma_{s+1} = b_s/\xi$ .

**Доказательство.** Для первой и второй стадий представление, очевидно, верно:  $g_1 = y_l, k_1 = f(g_1), g_2 = y_l + \tau a_{2,1} k_1$ . Предположим, что оно верно и для всех  $g_j, j = \overline{2, i-1}, i \leq s$ . Тогда

$$k_j = \frac{1}{\tau a_{j+1,j}} \left( g_j + \tau a_{j+1,j} k_j + \sum_{\alpha=1}^j \eta_{\alpha}^{j+1} g_{\alpha} - g_j - \sum_{\alpha=1}^j \eta_{\alpha}^{j+1} g_{\alpha} \right) = \frac{1}{\tau a_{j+1,j}} \left( g_{j+1} - g_j - \sum_{\alpha=1}^j \eta_{\alpha}^{j+1} g_{\alpha} \right)$$

и

$$\begin{aligned} g_i &= y_l + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} k_j = y_l + \tau \sum_{j=1}^{i-2} a_{i-1,j} k_j + \tau a_{i,i-1} k_{i-1} + \tau \sum_{j=1}^{i-2} (a_{i,j} - a_{i-1,j}) k_j = \\ &= g_{i-1} + \tau a_{i,i-1} k_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-2} \frac{a_{i,j} - a_{i-1,j}}{a_{j+1,j}} \left( g_{j+1} - g_j - \sum_{\alpha=1}^j \eta_{\alpha}^{j+1} g_{\alpha} \right) = g_{i-1} + \tau a_{i,i-1} k_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \eta_j^i g_j. \end{aligned}$$

Из последнего равенства несложно вытекают формулы для вычисления  $\eta_j^i$ , но в силу громоздкости этих формул приводить их здесь не будем. Полученное представление позволяет в ходе расчётов хранить лишь значения  $g_i$  и не хранить  $k_i$ .

Аналогично получаем представление

$$y_{l+1} = y_l + \tau \sum_{j=1}^s b_j k_j = g_1 + \sum_{j=1}^{s-1} \frac{b_j}{a_{j+1,j}} \left( g_{j+1} - g_j - \sum_{\alpha=1}^j \eta_{\alpha}^{j+1} g_{\alpha} \right) + \tau b_s k_s.$$

Выберем  $\xi \neq 0$  и обозначим  $g_{s+1} = g_s + \tau \xi k_s$ . Тогда  $k_s = (g_{s+1} - g_s)/\tau \xi$  и

$$y_{l+1} = y_l + \tau \sum_{j=1}^s b_j k_j = \sum_{j=1}^{s+1} \sigma_j g_j,$$

причём  $\sigma_{s+1} = b_s/\xi$ . Значения коэффициентов  $\sigma_j, j = \overline{1, s}$  могут быть получены явно. Утверждение доказано.

**2.2. Свойство TVD.** Согласно теореме Годунова [17] монотонные разностные схемы высокого порядка для решения гиперболических систем уравнений вида  $u_t = L(u)$ , где  $L$  – дифференциальный оператор, содержащий производные только по пространственным переменным, не могут быть линейными. В случае нелинейных систем гиперболических уравнений для введения понятия монотонной схемы часто используют TVD-свойство [1, с. 101]. В работе [10] понятие TVD-свойство рассматривается и для конструирования методов Рунге–Кутты, применяемых для интегрирования по времени систем гиперболических уравнений. Свойство TVD в этом случае определяется следующим образом.

Пусть разностный оператор  $L_h$  аппроксимирует оператор  $L$  на пространственной сетке  $\Omega_h$ . Пусть  $Y_l = \{y_l^i\}$  – приближённое решение на временном слое  $l$  и решение  $Y_{l+1}$  на следующем временном слое вычисляется с использованием метода (10), (11). Этот метод обладает свойством TVD, если при всех  $l$  имеет место неравенство  $TV(Y_{l+1}) \leq TV(Y_l + \tau L_h(Y_l))$ , где  $TV(Y) = \sum_j |y^{j+1} - y^j|$  – полная вариация сеточной функции  $Y = \{y^i\}$  и суммирование выполняется по всей сетке  $\Omega_h$ .

В работе [10] показано, что справедливо

**Утверждение 2.** Метод Рунге–Кутты обладает свойством TVD, если для коэффициентов его представления (12), (13) выполняются неравенства

$$a_{i,i-1} > 0, \quad i = \overline{2, s}, \quad \delta_{j,i-1} + \eta_j^i \geq 0, \quad i = \overline{2, s}, \quad j = \overline{1, i-1},$$

где  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера, и существует хотя бы одно такое значение  $\xi$ , при котором все  $\sigma_j$  неотрицательны,  $j = \overline{1, s+1}$ .

**2.3. Примеры методов.** Среди методов, наиболее часто использующихся при реализации разрывного метода Галёркина, можно выделить следующие два [10]. Оба не обладают свойством МД, но обладают свойством TVD.

**Метод 1.** Двухстадийный метод второго порядка:

$$k_1 = f(y_n), \quad k_2 = f(y_n + \tau k_1), \quad y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{2} k_1 + \frac{\tau}{2} k_2.$$

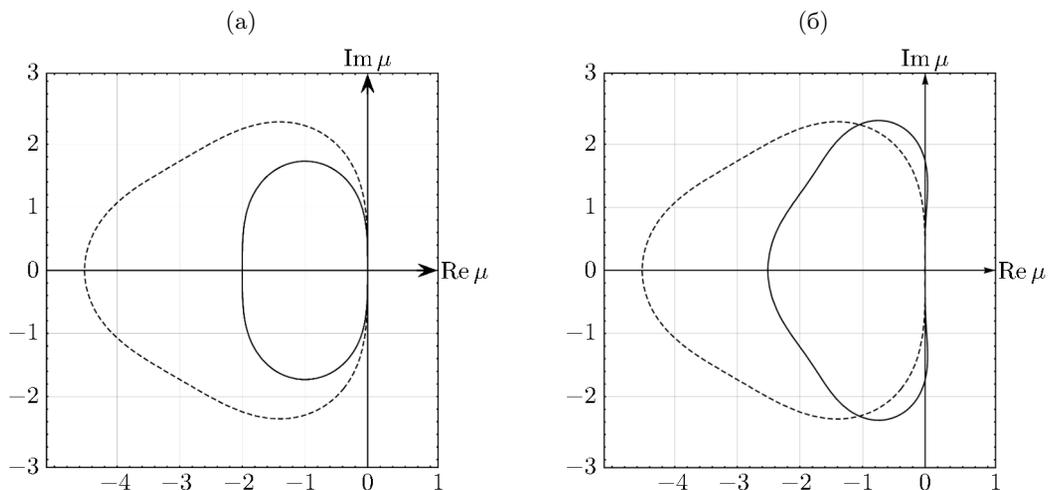
В интерполяционном представлении при выборе  $\xi = 1$  этот метод принимает вид

$$g_1 = y_l, \quad g_2 = g_1 + \tau f(g_1), \tag{14}$$

$$g_3 = g_2 + \tau f(g_2), \quad y_{l+1} = \frac{1}{2} g_1 + \frac{1}{2} g_3. \tag{15}$$

Его функцией устойчивости является  $R(\mu) = 1 + \mu + \mu^2/2$ , а область устойчивости изображена на рис. 3, а.

В дальнейшем метод (14), (15) будем называть RK2TVD.



**Рис. 3.** Области устойчивости методов RK2TVD ((а), сплошная линия), RK3TVD ((б), сплошная линия) и RK2MD-TVD (штриховая линия).

**Метод 2.** Трёхстадийный метод третьего порядка (используется способ записи [10]):

$$y^* = y_l + \tau f(y_l),$$

$$y^{**} = \frac{3}{4}y_l + \frac{1}{4}y^* + \frac{1}{4}\tau f(y^*),$$

$$y_{l+1} = \frac{1}{3}y_l + \frac{2}{3}y^{**} + \frac{2}{3}\tau f(y^{**}).$$

В интерполяционном представлении при выборе  $\xi = 1$  этот метод принимает вид

$$g_1 = y_l, \quad g_2 = g_1 + \tau f(g_1), \quad (16)$$

$$g_3 = g_2 + \frac{\tau}{4}f(g_2) + \frac{3}{4}g_1 - \frac{3}{4}g_2, \quad (17)$$

$$g_4 = g_3 + \tau f(g_3), \quad y_{l+1} = \frac{1}{3}g_1 + \frac{2}{3}g_4. \quad (18)$$

Его функцией устойчивости является  $R(\mu) = 1 + \mu + \mu^2/2 + \mu^3/6$ , а область устойчивости изображена на рис. 3, б.

В дальнейшем метод (16)–(18) будем называть RK3TVD.

Теперь построим примеры трёхстадийных методов Рунге–Кутты второго порядка, удовлетворяющих условию МД. Для таких методов их функцией устойчивости является

$$R(\mu) = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{12}.$$

Тогда условия второго порядка [16, гл. II, § 1] дают следующие уравнения относительно коэффициентов метода (10), (11):

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1, \quad a_{2,1}b_2 + a_{3,1}b_3 + a_{3,2}b_3 = \frac{1}{2}, \quad a_{2,1}a_{3,2}b_3 = \frac{1}{12}. \quad (19)$$

Из доказательства утверждения 1 видно, что удобно выбрать  $a_{i,j} = a_{i-1,j}$ ,  $i = \overline{3, s}$ ,  $j = \overline{1, i-1}$ , поскольку тогда второе равенство (12) сводится к уравнению  $g_i = g_{i-1} + \tau a_{i,i-1}k_{i-1}$ ,  $i = \overline{3, s}$ . В данном случае выберем  $a_{3,1} = a_{2,1} = q$  и обозначим  $a_{3,2} = r$ . Дополнительно положим  $q = r$ . Тогда система (19) примет вид

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1, \quad q(b_2 + 2b_3) = \frac{1}{2}, \quad q^2b_3 = \frac{1}{12}.$$

Варьируя параметр  $q$ , можно получать разные варианты методов.

**Метод 3.** Справедливо следующее

**Утверждение 3.** Метод Рунге–Кутты вида

$$g_1 = y_l, \quad k_1 = f(g_1),$$

$$g_2 = y_l + \frac{\tau}{2}k_1, \quad k_2 = f(g_2),$$

$$g_3 = y_l + \frac{\tau}{2}k_1 + \frac{\tau}{2}k_2, \quad k_3 = f(g_3),$$

$$y_{l+1} = y_l + \frac{\tau}{3}(k_1 + k_2 + k_3)$$

имеет второй порядок и удовлетворяет условиям МД и TVD.

**Доказательство.** Действительно, условия порядка (19), включающие требования условия МД, выполнены. В интерполяционной форме записи будем иметь

$$\begin{aligned} g_1 &= y_l, & g_2 &= g_1 + \frac{\tau}{2}f(g_1), & g_3 &= g_2 + \frac{\tau}{2}f(g_2), \\ g_4 &= g_3 + \tau\xi f(g_3), & y_{l+1} &= \frac{1}{3}g_1 + \frac{2-1/\xi}{3}g_3 + \frac{1}{3\xi}g_4 \end{aligned} \quad (20)$$

и, выбрав  $\xi = 1/2$ , получим

$$g_4 = g_3 + \frac{\tau}{2}f(g_3), \quad y_{l+1} = \frac{1}{3}g_1 + \frac{2}{3}g_4. \quad (21)$$

В дальнейшем метод (20), (21) будем называть RK2MD-TVD.

**Метод 4.** Справедливо следующее

**Утверждение 4.** Метод Рунге–Кутты вида

$$\begin{aligned} g_1 &= y_l, & k_1 &= f(g_1), \\ g_2 &= y_l + \frac{\tau}{3}k_1, & k_2 &= f(g_2), \\ g_3 &= y_l + \frac{\tau}{3}k_1 + \frac{\tau}{3}k_2, & k_3 &= f(g_3), \\ y_{l+1} &= y_l + \frac{\tau}{4}k_1 + \frac{3\tau}{4}k_3 \end{aligned}$$

имеет второй порядок и удовлетворяет условию МД, но не TVD.

**Доказательство.** Действительно, условия порядка (19), включающие требования условия МД, выполнены. В интерполяционной форме записи получим

$$\begin{aligned} g_1 &= y_l, & g_2 &= g_1 + \frac{\tau}{3}f(g_1), & g_3 &= g_2 + \frac{\tau}{3}f(g_2), \\ g_4 &= g_3 + \tau\xi f(g_3), & y_{l+1} &= \frac{1}{4}g_1 + \frac{3}{4}g_2 + \frac{3}{4\xi}(g_4 - g_3). \end{aligned} \quad (22)$$

Очевидно, что никаким выбором значения  $\xi$  невозможно удовлетворить условию TVD. Выбирая, например, для симметрии записи  $\xi = 1/3$ , получаем

$$g_4 = g_3 + \frac{\tau}{3}f(g_3), \quad y_{l+1} = \frac{1}{4}g_1 + \frac{3}{4}g_2 - \frac{9}{4}g_3 + \frac{9}{4}g_4. \quad (23)$$

В дальнейшем метод (22), (23) будем называть RK2MD.

**3. Численные примеры.** Рассмотрим результаты применения описанных методов для практических вычислений. Интерес представляет максимально достижимый для каждого метода шаг по времени при фиксированной пространственной сетке. Поскольку использовались аппроксимации пространственных операторов не выше второго порядка, то преимущество метода RK3TVD в порядке точности не принималось в расчёт.

Для сравнения методов между собой в описанных ниже тестовых примерах для разных методов вычислялись максимально достижимые временные шаги  $\tau_m$  и в одномерном случае соответствующие им отношения  $C_m = \tau_m/h$ , где  $h$  – шаг пространственной сетки. За референсные значения принимались максимально достижимые шаги для метода RK2TVD, поскольку он имеет наименьшую область устойчивости.

В таблицах ниже использованы следующие обозначения:

$$T_{3-1} = \tau_m(\text{RK2MD-TVD})/\tau_m(\text{RK2TVD}), \quad T_{3-2} = \tau_m(\text{RK2MD-TVD})/\tau_m(\text{RK3TVD}),$$

$$T_{4-1} = \tau_m(\text{RK2MD})/\tau_m(\text{RK2TVD}), \quad T_{4-2} = \tau_m(\text{RK2MD})/\tau_m(\text{RK3TVD}),$$

$$T_{2-1} = \tau_m(\text{RK3TVD})/\tau_m(\text{RK2TVD}).$$

Поскольку метод RK2TVD в отличие от остальных является двухстадийным, наравне с коэффициентами  $T_{2-1}$ ,  $T_{3-1}$  и  $T_{4-1}$  имеет смысл рассматривать величины  $E_{J-1} = 2T_{J-1}/3$ ,  $J = 2, 3, 4$ , характеризующие сравнительную вычислительную сложность методов, связанную с количеством вычислений значений оператора  $L_h$  за один временной шаг.

**3.1. Линейное одномерное уравнение переноса.** Рассмотрена начальная задача для уравнения (7) при  $c = 1$  на пространственном отрезке  $[0, 2]$  и временном интервале  $(0, 1)$ . Использована пространственная сетка, состоящая из 200 ячеек, оператор  $L \equiv -cu_x$  аппроксимировался с использованием левой конечно-разностной производной первого порядка и с использованием потока второго порядка с лимитером `minmod` [1, с. 92]. Начальные условия выбирались следующими:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{если } 1/3 < x < 2/3, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Результаты исследования максимальных шагов приведены в табл. 1. Отношения максимальных шагов для разных методов в случае использования левой разностной производной соответствуют тому, как относятся друг к другу радиусы вписанных кругов соответствующих областей устойчивости (ср. рис. 1 и 3).

**Таблица 1.** Соотношения максимальных шагов при решении линейного одномерного уравнения переноса

Аппроксимация оператора $L_h$	Параметры методов											
	RK2TVD	RK3TVD			RK2MD-TVD				RK2MD			
	$C_m$	$C_m$	$T_{2-1}$	$E_{2-1}$	$C_m$	$T_{3-1}$	$E_{3-1}$	$T_{3-2}$	$C_m$	$T_{4-1}$	$E_{4-1}$	$T_{4-2}$
Левая разность	1.0	1.245	1.26	0.84	2.0	2.0	1.33	1.6	2.0	2.0	1.33	1.6
<code>minmod</code>	0.95	1.15	1.21	0.81	1.7	1.79	1.19	1.48	1.45	1.525	1.02	1.26

В случае же нелинейной аппроксимации повышенной точности с использованием лимитера `minmod` наблюдаются как отличия от указанных соотношений для областей устойчивости, так и различия между результатами методов RK2MD-TVD и RK2MD. Оба они удовлетворяют свойству МД и имеют одну и ту же область устойчивости. Тем не менее отсутствие TVD-свойства у второго метода негативно сказывается на максимальной длине временного шага, что косвенно свидетельствует об изменении характера расположения собственных чисел линейной части пространственного оператора.

Как видно из таблицы, метод RK3TVD выигрывает у метода RK2TVD по устойчивости, но существенно проигрывает ему по вычислительной сложности. Этот разрыв оправдан в тех случаях, когда более высокий порядок метода играет существенную роль.

**3.2. Одномерная газовая динамика.** Для тестирования рассмотренных методов Рунге–Кутты использовался программный комплекс RKDG-1D [5], позволяющий решать одномерные задачи динамики совершенного невязкого газа. Такие задачи описываются системой уравнений [2, с. 31–33]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + p \hat{I}) = 0,$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}(e + p)) = 0, \tag{25}$$

где  $\rho$  – плотность,  $\vec{v} = (u, v, w)^T$  – скорость,  $p$  – давление,  $e$  – полная энергия единицы объёма,  $\hat{I}$  – единичный тензор. Дополняет систему уравнение состояния

$$p = \rho\varepsilon(\gamma - 1),$$

где  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

В одномерном случае система (24), (25) сводится к системе

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \tag{26}$$

где вектор  $U$  консервативных переменных и вектор  $F(U)$  потоков следующие:

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T, \quad F(U) = (\rho u, p + \rho u^2, \rho uv, \rho uw, e)^T.$$

Программный комплекс, описанный в работе [5], основан на разрывном методе Галёркина. Он имеет модульную структуру и обладает широкими возможностями добавления новых методов и алгоритмов, включая методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения тестовой задачи использована линейная аппроксимация приближённого решения на ячейках разностной сетки, численный поток HLLC, индикатор Harten, лимитеры WENO\_S [18] и HWENO\_SC [19].

В качестве тестовой задачи использован вариант задачи Римана о распаде разрыва – задача Сода [1, с. 227]. Она успешно применяется для тестирования численных схем, поскольку содержит в своем решении три типа разрывов – ударную волну, волну разрежения и контактный разрыв. Задача решалась на отрезке  $[0, 1]$  с начальным положением разрыва в точке  $x^* = 0.5$  до момента времени  $T = 0.2$  с начальными условиями

$$(\rho, u, v, w, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0, 1), & \text{если } x \leq 0.5; \\ (0.125, 0, 0, 0, 0.1), & \text{если } x > 0.5. \end{cases}$$

Результаты исследования максимальных шагов приведены в табл. 2. Как видим, тенденции, характерные для нелинейной аппроксимации пространственного оператора, подтверждаются. Метод RK2MD-TVD в реальном расчёте оказывается более устойчивым, чем RK2MD за счёт меньших искажений спектра пространственного оператора при выполнении свойства TVD. При этом на спектр оказывает влияние и используемый лимитер. При схожих параметрах  $T$  и  $E$  для всех методов Рунге–Кутты лимитер HWENO\_SC позволяет считать с шагом, более чем в полтора раза большим, чем лимитер WENO\_S. Однако существенно выше и вычислительная сложность этого лимитера, поскольку он предполагает переход от консервативных к характеристическим переменным задачи.

**Таблица 2.** Соотношения максимальных шагов при решении одномерной задачи газовой динамики разрывным методом Галёркина

Лимитер	Параметры методов											
	RK2TVD	RK3TVD			RK2MD-TVD				RK2MD			
	$C_m$	$C_m$	$T_{2-1}$	$E_{2-1}$	$C_m$	$T_{3-1}$	$E_{3-1}$	$T_{3-2}$	$C_m$	$T_{4-1}$	$E_{4-1}$	$T_{4-2}$
WENO_S	0.195	0.225	1.15	0.77	0.34	1.74	1.16	1.51	0.32	1.64	1.09	1.42
HWENO_SC	0.31	0.36	1.16	0.77	0.55	1.77	1.18	1.53	0.5	1.61	1.075	1.39

**3.3. Двумерная газовая динамика.** Для системы уравнений (24), (25) рассмотрена также пространственно двумерная постановка задачи. С использованием разрывного метода Галёркина разработан параллельный программный комплекс для решения задач газовой динамики на смешанных неструктурированных сетках [20]. Как и в одномерном случае, программный комплекс благодаря своей модульной структуре позволяет использовать различные

комбинации численных потоков, индикаторов и лимитеров. При решении тестовых задач использовались два лимитера – BJVertex [21] и WENO\_SC [18, 19], а также два численных потока – Local Lax–Friedrichs и HLL [1, с. 75].

В качестве тестовой выбрана задача о набегаии вертикальной ударной волны с числом Маха  $M_s = 10$  на клин, расположенный по отношению к горизонтали под углом  $\varphi = 30^\circ$ . В результате соударения волны и клина формируется сложная ударно-волновая структура, называемая двойным маховским отражением. Параметры набегающего потока  $\rho = 8$ ,  $u = 8.25$ ,  $p = 116.518$ , начальные условия  $\rho = 1.4$ ,  $u = v = w = 0$ ,  $p = 1$ , показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ .

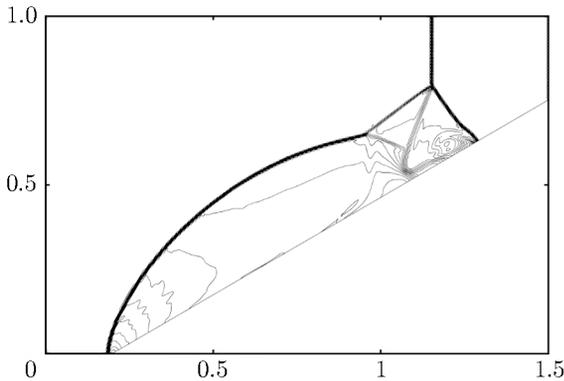


Рис. 4. Линии уровня плотности в задаче о двойном маховском отражении.

В расчётах использованы неструктурированные треугольные сетки из 36 тыс. и 74 тыс. ячеек. Средние длины сторон в указанных сетках равны примерно 0.01 и 0.005 соответственно. Расчёты проводились до момента времени  $t^* = 0.1$  с постоянным в течение расчёта шагом по времени.

Характерный вид решения изображён на рис. 4. При постепенном увеличении шага по времени численное решение искажается в силу проявлений немонотонности схемы.

Прежде всего искажения возникают в треугольнике между контактном разрывом и ударной волной. Затем паразитные осцилляции появляются в области постоянства решения. Наконец, в численном решении возникают нефизичные волны, расчёт становится неустойчивым и аварийно останавливается до достижения  $t^*$ . При анализе результатов расчётов делалось различие между шагом, при котором проявляются существенные искажения решения, и шагом, при котором расчёт преждевременно прерывается.

Прежде всего искажения возникают в треугольнике между контактном разрывом и ударной волной. Затем паразитные осцилляции появляются в области постоянства решения. Наконец, в численном решении возникают нефизичные волны, расчёт становится неустойчивым и аварийно останавливается до достижения  $t^*$ . При анализе результатов расчётов делалось различие между шагом, при котором проявляются существенные искажения решения, и шагом, при котором расчёт преждевременно прерывается.

Результаты исследования максимальных шагов для грубой и подробной сеток приведены в табл. 3 и 4 соответственно. Исследованы три сочетания численных потоков и лимитеров: поток Lax–Friedrichs и лимитер BJVertex; поток Lax–Friedrichs и лимитер WENO\_SC; поток HLL и лимитер BJVertex.

Таблица 3. Соотношения максимальных шагов при решении задачи двойного маховского отражения разрывным методом Галёркина, сетка из 36 тыс. ячеек

Метод	Параметры методов											
	RK2TVD		RK3TVD		RK2MD-TVD				RK2MD			
	$\tau_m \cdot 10^4$	$\tau_m \cdot 10^4$	$T_{2-1}$	$E_{2-1}$	$\tau_m \cdot 10^4$	$T_{3-1}$	$E_{3-1}$	$T_{3-2}$	$\tau_m \cdot 10^4$	$T_{4-1}$	$E_{4-1}$	$T_{4-2}$
<i>Появление видимых искажений решения</i>												
BJVertex+LF	0.77	1.00	1.30	0.87	1.60	2.08	1.39	1.60	1.60	2.08	1.39	1.60
WENO_SC+LF	0.79	1.00	1.27	0.84	1.80	2.28	1.52	1.80	1.60	2.03	1.35	1.60
BJVertex+HLL	1.00	1.30	1.30	0.87	1.70	1.70	1.13	1.31	1.70	1.70	1.13	1.31
<i>Аварийный останов расчёта</i>												
BJVertex+LF	1.60	1.90	1.19	0.79	3.30	2.06	1.38	1.74	2.30	1.44	0.96	1.21
WENO_SC+LF	1.60	1.90	1.19	0.79	2.70	1.69	1.13	1.42	2.30	1.44	0.96	1.21
BJVertex+HLL	1.80	1.80	1.00	0.67	3.50	1.94	1.30	1.94	2.50	1.39	0.93	1.39

Во всех случаях метод RK2MD-TVD даёт возможность считать с бóльшим шагом по времени, чем остальные методы. Его преимущество над методом RK2TVD по количеству вычислений оператора  $L_h$  в подавляющем большинстве расчётов составляет не менее 13%, а часто – около 30%. Вычислительное преимущество этого метода над RK3TVD составляет не менее 25%. При этом не обладающий TVD-свойством метод RK2MD хотя и близок к методу RK2MD-TVD по характерным шагам возникновения немонотонности решения, но существенно уступает ему в общей устойчивости, иногда по вычислительным затратам проигрывая и

RK2TVD. Это означает, что данный метод оказывается менее устойчив к возникающим артефактам численного решения, вызванным немонотонностью.

**Таблица 4.** Соотношения максимальных шагов при решении задачи двойного маховского отражения разрывным методом Галёркина, сетка из 74 тыс. ячеек

Метод	Параметры методов											
	RK2TVD	RK3TVD			RK2MD-TVD				RK2MD			
	$\tau_m \cdot 10^4$	$\tau_m \cdot 10^4$	$T_{2-1}$	$E_{2-1}$	$\tau_m \cdot 10^4$	$T_{3-1}$	$E_{3-1}$	$T_{3-2}$	$\tau_m \cdot 10^4$	$T_{4-1}$	$E_{4-1}$	$T_{4-2}$
<i>Появление видимых искажений решения</i>												
BJVertex+LF	0.51	0.60	1.18	0.78	1.00	1.96	1.31	1.67	1.00	1.96	1.31	1.67
WENO_SC+LF	0.44	0.58	1.32	0.88	1.00	2.27	1.52	1.72	1.00	2.27	1.52	1.72
BJVertex+HLL	0.65	0.80	1.23	0.82	1.00	1.54	1.03	1.25	1.10	1.69	1.13	1.38
<i>Аварийный останов расчёта</i>												
BJVertex+LF	0.66	0.79	1.20	0.80	1.30	1.97	1.31	1.65	1.20	1.82	1.21	1.52
WENO_SC+LF	0.66	0.79	1.20	0.80	1.30	1.97	1.31	1.65	1.20	1.82	1.21	1.52
BJVertex+HLL	0.81	0.84	1.04	0.69	1.50	1.85	1.23	1.79	1.20	1.48	0.99	1.43

Оба метода, обладающие свойством МД, позволяют считать с существенно бóльшим временным шагом, чем метод RK3TVD. Одновременно максимальный шаг, обеспечиваемый методом RK2TVD, как правило, лишь немногим меньше, чем у RK3TVD. В то же время все три указанных метода имеют лишь второй порядок точности, а RK3TVD – третий. Это важно как при численном исследовании гладких решений, так и для получения высокого разрешения разрывных решений при использовании, впрочем, соответствующей по порядку аппроксимации оператора  $L_h$ .

Возможность увеличения шага по времени после фиксации искажений решения существенно зависит от используемых элементов разностной схемы, прежде всего, численных потоков. Так, например, при использовании потока HLL минимальный шаг, при котором расчёт неустойчив, мало отличается от длины шага, когда возникают видимые искажения. При этом, в среднем, схема с потоком HLL оказалась более устойчивой, чем с потоком Lax–Friedrichs, как относительно немонотонности решения, так и относительно аварийных остановов.

Отметим, что выбор лимитера без изменения численного потока больше влияет на проявления немонотонности решения, чем на устойчивость метода. В частности, расчёты с лимитером BJVertex позволяют получать корректную картину решения при большем шаге, чем с лимитером WENO\_SC.

**Заключение.** Изучены методы Рунге–Кутты, область устойчивости которых включает круг максимального для заданных количества стадий и порядка диаметра. Такие методы востребованы при аппроксимации гиперболических систем уравнений с использованием разрывного метода Галёркина. Получены условия, при которых такие методы удовлетворяют условию TVD. Рассмотрены два метода рассматриваемого класса, их свойства исследованы на численных примерах. С помощью тестовых задач для линейного одномерного уравнения переноса и для системы уравнений газовой динамики в одномерной и двумерной пространственных постановках исследована способность полученных методов сохранять устойчивость и монотонность численного решения при максимально возможных шагах по времени.

Исследование В.В. Лукина выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-79-20445).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М., 2001.
- Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., 1992.
- Cockburn B., Shu C.-W. TVB Runge–Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework // Math. of Comp. 1989. V. 52. № 186. P. 411–435.

4. Cockburn B., Shu C.-W. Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // J. Sci. Comput. 2001. V. 16. P. 2440–2463.
5. Галеева В.Д., Лукин В.В., Марчевский И.К., Фуфаев И.Н. Сравнительное исследование лимитеров семейства WENO и Hermite WENO для расчета одномерных течений газа методом RKDG // Препринты ИПИМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 131.
6. Dolejsi V., May G., Rangarajan A. A continuous hp-mesh model for adaptive discontinuous Galerkin schemes // Appl. Numer. Math. 2018. V. 124. P. 1–21.
7. Klein B., Müller B., Kummer F., Oberlack M. A high-order discontinuous Galerkin solver for low-Mach number flows // Int. J. Num. Meth. Fluids. 2015. V. 81. P. 489–520.
8. Galanin M.P., Lukin V.V., Chechetkin V.M. 3D hydrodynamical simulation of accretion disk in binary star system using RKDG CFD solver // J. Phys. Conf. Ser. 2018. V. 1103. P. 012019.
9. Галанин М.П., Савенков Е.Б., Токарева С.А. Решение задач газовой динамики с ударными волнами RKDG-методом // Мат. моделирование. 2008. Т. 20. № 11. С. 55–66.
10. Shu C.-W., Osher. S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // J. Comp. Phys. 1988. V. 77. P. 439–471.
11. Gottlieb S., Ketcheson D., Shu C.-W. High order strong stability preserving time discretizations // J. Sci. Comput. 2009. V. 38. P. 251–289.
12. Toulorge T., Desmet W. Optimal Runge–Kutta schemes for discontinuous Galerkin space discretizations applied to wave propagation problems // J. Comp. Phys. 2011. V. 231. P. 2067–2091.
13. Jeltsch R., Torrilhon M. Flexible stability domains for explicit Runge–Kutta methods // Some Topics in Industrial and Applied Mathematics / Eds. R. Jeltsch, D. Li, I.H. Sloan. Beijing, 2007.
14. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. Исследование точности разрывного метода Галеркина при расчете решений с ударными волнами // Препринты ИПИМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 195.
15. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М., 1999.
16. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.
17. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. Вып. 3. С. 271–306.
18. Zhong X., Shu C.-W. A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods // J. Comp. Phys. 2013. V. 232. P. 397–415.
19. Zhu J., Zhong X., Shu C.-W., Qiu J.-X. Runge–Kutta discontinuous Galerkin method with a simple and compact Hermite WENO limiter // Comm. in Comp. Phys. 2016. V. 19. P. 944–969.
20. Корчагова В.Н., Сауткина С.М., Лукин В.В., Фуфаев И.Н. Экспериментальная оценка эффективности распараллеливания RKDG-метода для решения двумерных газодинамических задач // XIV междунар. конф. “Параллельные вычислительные технологии” (ПаВТ–2020). Пермь, 31 марта – 2 апреля 2020 г. Короткие статьи и описания плакатов. Челябинск, 2020. С. 142–151.
21. Giuliani A., Krivodonova L. Analysis of slope limiters on unstructured triangular meshes // J. of Comp. Phys. 2018. V. 374. P. 1–26.

Институт прикладной математики  
им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва,  
Институт системного программирования  
им. В.П. Иванникова РАН, г. Москва,  
Московский государственный технический  
университет им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 11.02.2021 г.  
После доработки 11.02.2021 г.  
Принята к публикации 27.04.2021 г.