

УДК 519.633

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА ТРЁХТОЧЕЧНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. П. П. Матус, Хоанг Тхи Киеу Ань

Для уравнений Клейна–Гордона с постоянными и переменными коэффициентами на трёхточечном шаблоне по пространству рассматриваются компактные разностные схемы $4+2$ порядка аппроксимации. Предложены новые компактные схемы для одного типа квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка. В случае постоянных коэффициентов доказана сильная устойчивость разностного решения по отношению к малому возмущению начальных условий, правой части и коэффициентов уравнения. Получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в сильных сеточных нормах.

DOI: 10.31857/S0374064121070098

1. Введение. Повышение точности вычислительного метода для решения задач математической физики на минимальных шаблонах всегда представляло собой актуальную задачу численного анализа (см., например, [1–4]). Среди методов построения разностных схем повышенного порядка аппроксимации особое место занимают так называемые компактные схемы, которые пишутся на шаблоне, несущественно отличающемся от традиционных для данного уравнения [5]. Основопологающей работой по этой тематике для классических уравнений математической физики с самосопряжённым эллиптическим оператором является работа А.А. Самарского [6], опубликованная им более 50 лет назад. Для других классов уравнений, включая уравнения типа конвекции–диффузии, нелинейные уравнения без смешанных производных и задачи аэрогидродинамики, компактные разностные схемы построены в [7–9].

В настоящей работе для различных типов уравнения Клейна–Гордона исследуются на обычном трёхточечном шаблоне компактные разностные схемы $4+2$ порядка точности. Это уравнение играет важную роль в математической физике; в частности, оно используется при изучении солитонов и в физике конденсированного вещества [10]. Компактные разностные схемы для такого уравнения строятся и изучаются, например, в [9, 11]. Некоторые результаты по данной тематике также анонсированы в [12, 13]. Для этого уравнения, несмотря на линейность дифференциальной и разностной задач с переменными коэффициентами, для получения соответствующих априорных оценок не удаётся применить известные результаты по теории Самарского устойчивости трёхслойных операторно-разностных схем [1, гл. VI, § 3]. В работе с использованием метода энергетических неравенств для компактных разностных схем, аппроксимирующих уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами, получены априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в сеточных нормах $L_2(\omega_h)$, $W_2^1(\omega_h)$, $C(\omega_h)$ или $L_\infty(\omega_h)$. На примере вычислительного эксперимента для квазилинейного уравнения, которое является следствием системы уравнений газовой динамики, показывается, как использовать правило Рунге для определения разных порядков скорости сходимости решения разностной схемы в случае двух независимых переменных.

1. Необходимые и достаточные условия устойчивости двух и трёхслойных операторно-разностных схем. При исследовании компактных разностных схем, аппроксимирующих линейные уравнения Клейна–Гордона, естественно воспользоваться общей теорией Самарского [1, гл. VI, § 3] операторно-разностных схем. Ниже предлагается использовать другие канонические формы операторно-разностных схем, для которых условия устойчивости формулируются значительно проще и не содержат условий на связь между операторами.

Пусть задано действительное конечномерное евклидово пространство H и сетка по времени $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = \overline{0, N_0}, \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{0\}$. Скалярное произведение в H обозначим через (\cdot, \cdot) , и пусть $A, B, D : H \rightarrow H$ – линейные операторы, не зависящие от τ и t_n .

Рассмотрим задачу Коши для двухслойной операторно-разностной схемы

$$By_t + Ay^{(0.5)} = \varphi(t), \quad t \in \omega_\tau, \tag{1}$$

$$y_0 = u_0, \tag{2}$$

где $y^n = y(t_n) \in H$ – искомая вектор-функция, а $\varphi^n = \varphi(t_n)$, u_0 заданы, $y^{(\sigma)} = \sigma y^{n+1} + (1 - \sigma)y^n$, $y^n \in H$. Тогда критерий Самарского (см. [1, с. 333]) при $\varphi(t) \equiv 0$ можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Условия*

$$B = B(t) \geq 0, \quad A = A^* > 0, \quad A - \text{постоянный оператор,}$$

необходимы и достаточны для устойчивости решения разностной задачи (1), (2) в H_A по начальным данным, т.е. для выполнения оценки

$$\|y^n\|_A \leq \|u_0\|_A, \quad n = \overline{1, N_0},$$

где, как обычно, $\|v\|_A = (Av, v)$ для любого $v \in H$.

Для трёхслойных операторно-разностных схем будем использовать следующую каноническую форму:

$$Dy_{\bar{t}t} + A_1y^{(0.5, 0.5)} = \varphi(t), \quad 0 < t \in \omega_\tau, \tag{3}$$

$$y_0 = u_0, \quad y_1 = u_1, \tag{4}$$

где $y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 y^{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y^n + \sigma_2 y^{n-1}$, $0 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq 1$.

В работе используются обозначения из [1, 2]. Далее будем предполагать, что D, A_1 – положительные, самосопряжённые и постоянные операторы:

$$D = D^* > 0, \quad A_1^* = A_1 > 0. \tag{5}$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 2. *Разностная схема (3), (4) устойчива в H_{A_1} по начальным данным и правой части, и имеет место априорная оценка*

$$Q^{n+1} \leq Q^1 + \sum_{k=1}^n \tau \|\varphi(t_k)\|_{D^{-1}}.$$

Здесь $Q^n = \{\|y_{\bar{t}}\|_D^2 + (\|y\|_{A_1}^2 + \|\check{y}\|_{A_1}^2)/2\}^{1/2}$.

Доказательство. Умножая уравнение (3) скалярно в H на $2\tau y_{\check{t}} = \tau(y_t + y_{\bar{t}})$, приходим к энергетическому соотношению

$$Q_{n+1}^2 - Q_n^2 = 2\tau(y_{\check{t}}, \varphi) \leq \tau(\|y_t\|_D + \|y_{\bar{t}}\|_D)\|\varphi\|_{D^{-1}} \leq \tau(Q_{n+1} + Q_n)\|\varphi(t_n)\|_{D^{-1}}.$$

Отсюда и следует требуемая оценка.

2. Уравнение Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами.

2.1. Постановка задачи и разностная схема. В области $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - mu + f(x, t), \quad m = \text{const} > 0, \tag{6}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \tag{7}$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \tag{8}$$

Отметим, что уравнение (6) является обобщением волнового уравнения и используется для описания быстро движущихся частиц, имеющих массу покоя. Здесь и далее относительно решения дифференциальной задачи будем предполагать, что оно существует, единственно и обладает всеми непрерывными в \overline{Q}_T производными, необходимыми по ходу изложения.

На равномерной сетке узлов $\overline{\omega} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_n) \in \overline{Q}_T\}$, $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N, h = l/N\} = \omega_h \cup \{0, l\}$, $\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, 0 \leq n \leq N_0, \tau = T/N_0\} = \omega_\tau \cup \{0\}$ дифференциальную задачу заменим разностной:

$$y_{\overline{t}\overline{t}} = \Lambda y^{(\sigma, \sigma)} - m \left(y + \frac{h^2}{12} \Lambda y \right) + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{9}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{10}$$

$$y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(l, t) = \mu_2(t), \quad t \in \omega_\tau, \tag{11}$$

в которой

$$\hat{y} = y^{n+1}, \quad \check{y} = y^{n-1}, \quad y_i^n = y(x_i, t_n),$$

$$\Lambda y = y_{\overline{x}\overline{x}}, \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12} \Lambda f, \quad \sigma = \overline{\sigma} - \frac{h^2}{12\tau^2},$$

$$u_1(x) = \overline{u}_0(x) + \frac{\tau}{2} [u_0''(x) - m u_0(x) + f(x, 0)], \quad x \in \omega_h.$$

Как и в монографии [1, с. 309], нетрудно показать, что для невязки

$$\psi = -u_{\overline{t}\overline{t}} + \Lambda u^{(\sigma, \sigma)} - m \left(u + \frac{h^2}{12} \Lambda u \right) + \varphi$$

и погрешности аппроксимации второго начального условия имеют место априорные оценки

$$\|\psi\| \leq M(h^4 + \tau^2), \quad M = \text{const} > 0, \tag{12}$$

$$\|\overset{\circ}{\psi}\| = \|u_1 - u_t^0\| \leq M_1 \tau^2, \quad M_1 = \text{const} > 0, \tag{13}$$

т.е. разностная схема (9)–(11) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу с четвёртым порядком по пространству и вторым по времени.

2.2. Устойчивость по начальным данным и правой части. Для исследования этих вопросов в линейном случае обычно применяют теорию трёхслойных операторно-разностных схем, разработанную А.А. Самарским [1, гл. VI, § 3]. Требование самосопряжённости основного пространственного оператора

$$(Ay)_i = -(Ay)_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (Ay)_0 = 0, \quad (Ay)_N = 0, \tag{14}$$

приводит к жёстким ограничениям на однородность граничных условий. Чтобы избежать этого, рассмотрим возмущённое решение \tilde{y} , полученное по разностной схеме (9)–(11) с возмущённой правой частью \tilde{f} и возмущёнными начальными условиями \tilde{u}_0, \tilde{u}_1 . Тогда задача для возмущения $\overline{y} = \tilde{y} - y$ может быть записана в операторном виде:

$$D\overline{y}_{\overline{t}\overline{t}} + A_1\overline{y} = \overline{\varphi}, \quad \overline{\sigma} = 1, \tag{15}$$

$$\overline{y}(0) = \overline{u}_0, \quad \overline{y}_t(0) = \overline{u}_1, \tag{16}$$

$$D = E + \sigma\tau^2 A, \quad A_1 = mE + \left(1 - \frac{mh^2}{12}\right) A.$$

Здесь $\overline{u}_0 = \tilde{u}_0 - u_0, \quad \overline{u}_1 = \tilde{u}_1 - u_1, \quad \overline{\varphi} = \tilde{\varphi} - \varphi.$

Оператор A , определённый соотношением (14), является постоянным, положительным и самосопряжённым, т.е. $0 < A^* = A : H \rightarrow H$, здесь H – пространство сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю при $x = 0$ и $x = l$. Поэтому операторы D и A_1 также являются положительными, постоянными и самосопряжёнными: $D = D^* > E$, $A_1 = A_1^* > A$.

Отметим следующие хорошо известные свойства оператора A [1, гл. II, § 3]:

$$\lambda_1 E \leq A \leq \lambda_2 E, \quad A^{-1} \leq \frac{1}{\delta} E, \quad \delta = \frac{8}{l^2}, \tag{17}$$

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \geq \delta, \quad \lambda_2 = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l} < \frac{4}{h^2}. \tag{18}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1 [1, с. 373]. Пусть в канонической форме (15), (16) операторы D и A_1 являются постоянными, положительными и самосопряжёнными в H и, кроме того, выполнено неравенство

$$D \geq \frac{1 + \varepsilon}{4} \tau^2 A_1, \quad \text{где } \varepsilon > 0 \text{ – некоторое число.} \tag{19}$$

Тогда для решения схемы (15), (16) имеет место априорная оценка

$$\|\bar{y}^{n+1}\|_D \leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}} \left(\|\bar{y}(0)\|_D + \|D\bar{y}_t(0)\|_{A_1^{-1}} + \sum_{s=1}^n \tau \|\bar{\varphi}_s\|_{A_1^{-1}} \right). \tag{20}$$

В частности, если $\varepsilon = 1$, $D \geq E$, $A_1^{-1} < A^{-1} \leq \delta^{-1} E$, оценка (20) примет вид

$$\|\bar{y}^{n+1}\| \leq \sqrt{2} \left(\|\bar{y}(0)\|_D + \frac{1}{\delta} \|D\bar{y}_t(0)\| + \frac{1}{\delta} \sum_{s=1}^n \tau \|\bar{\varphi}_s\| \right). \tag{21}$$

Применим оценку (21) к исследованию устойчивости компактной разностной схемы (9)–(11). Далее будем предполагать, что

$$\frac{h}{\sqrt{6}} \leq \tau \leq \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \sigma = 1 - \frac{h^2}{12\tau^2}. \tag{22}$$

Тогда условие (19) выполнено. Действительно,

$$D - \frac{\tau^2}{2} A_1 = \frac{1}{2} E + \left(\frac{1}{2} - \frac{m\tau^2}{2} \right) E + \tau^2 \left[\sigma - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{mh^2}{12} \right) \right] A \geq \frac{1}{2} E.$$

Итак, имеет место следующая

Теорема 3. Пусть выполнено условие (22). Тогда разностная схема с неоднородными граничными условиями (9)–(11) условно устойчива по начальным данным и правой части, а для её решения имеет место априорная оценка

$$\|\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}\| \leq \sqrt{2} \left(\|\tilde{u}_0 - u_0\|_D + \frac{1}{\delta} \|D(\tilde{u}_1 - u_1)\| + \frac{1}{\delta} \sum_{s=1}^n \tau \|\tilde{\varphi}_s - \varphi_s\| \right).$$

Замечание. В линейном случае после замены

$$u = v + \frac{x}{l} \mu_2(t) + \frac{l-x}{l} \mu_1(t)$$

исходная дифференциальная задача сводится к задаче для v с однородными граничными условиями. При этом устойчивость по граничным условиям и правой части решения разностных схем для этих задач имеет место одновременно для обеих задач. Однако для нелинейного уравнения Клейна–Гордона такая замена может не дать желаемого результата.

Итак, мы доказали устойчивость решения разностной схемы в слабой энергетической норме $L_2(\omega_h)$ при весьма слабых ограничениях на вес функции σ . Такие оценки полезны при исследовании сходимости разностных схем с обобщёнными решениями [14]. Чтобы получить априорные оценки в более сильных нормах $W_2^1(\omega_h)$ и $C(\omega_h)$, воспользуемся теоремой 2 и вложением (см. [1, с. 107])

$$\|\tilde{y} - y\|_C \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|\tilde{y}_x - y_x\|. \quad (23)$$

Запишем разностную схему для возмущения $\bar{y} = \tilde{y} - y$ в каноническом виде (3) при $h/\sqrt{6} \leq \tau \leq 1/\sqrt{m}$, $\sigma = 1 - h^2/(12\tau^2)$,

$$D\bar{y}_{tt} + A_1\bar{y}^{(0.5,0.5)} = \bar{\varphi}, \quad t \in \omega_\tau, \quad (24)$$

$$\bar{y}(0) = \bar{u}_0, \quad \bar{y}_t(0) = \bar{u}_1, \quad (25)$$

где

$$D = E + \tau^2(\sigma - 0.5)A_1 = D^* \geq \frac{1}{2}E, \quad D^{-1} \leq 2E, \quad A_1^* = A_1 = mE + \left(1 - \frac{mh^2}{12}\right)A > A \geq \delta E.$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 4. *Решение разностной схемы (24), (25) при $h/\sqrt{6} \leq \tau \leq 1/\sqrt{m}$, $\sigma = 1 - h^2/(12\tau^2)$ устойчиво по начальным данным и правой части, и для всех $n = \overline{2, N_0}$ имеют место априорные оценки*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\|\bar{y}_x^n\|^2 + \|\bar{y}_x^{n-1}\|^2)^{1/2} \leq Q^1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \tau \|\bar{\varphi}(t_k) - \varphi(t_k)\|,$$

$$\|\tilde{y}^n - y^n\|_C \leq \sqrt{\frac{l}{2}} \left\{ Q^1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \tau \|\bar{\varphi}(t_k) - \varphi(t_k)\| \right\}. \quad (26)$$

Доказательство. При $h/\sqrt{6} \leq \tau \leq 1/\sqrt{m}$, $\sigma = 1 - h^2/(12\tau^2)$ выполнено условие (5), поэтому в силу теоремы 2 имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\|\bar{y}^n\|_{A_1}^2 + \|\bar{y}^{n-1}\|_{A_1}^2)^{1/2} \leq Q^1 + \sum_{k=1}^{n-1} \tau \|\bar{\varphi}(t_k)\|_{D^{-1}}.$$

Так как $A_1 > A$ и $D^{-1} \leq 2E$, то справедлива оценка

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\|\bar{y}_x^n\|^2 + \|\bar{y}_x^{n-1}\|^2)^{1/2} \leq Q^1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \tau \|\bar{\varphi}(t_k)\|.$$

Следовательно, из леммы и вложения (23) вытекает, что

$$\|\tilde{y}^n - y^n\|_C \leq \sqrt{\frac{l}{2}} \left\{ Q^1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \tau \|\bar{\varphi}(t_k) - \varphi(t_k)\| \right\}.$$

Теорема доказана.

2.3. Сильная устойчивость. При исследовании корректности разностных схем основное внимание уделяется устойчивости решения по начальным данным и правой части [1, 2]. Однако при численном решении дифференциальной задачи может оказаться, что коэффициенты уравнения заданы не точно, а приближённо. Это показывает, насколько важно изучение схем с

возмущёнными коэффициентами. Под *сильной устойчивостью* понимается устойчивость решения разностной задачи по отношению к малому возмущению начальных условий, правой части и коэффициентов уравнения [15].

Наряду с разностной схемой (9)–(11) рассмотрим соответствующую ей возмущённую задачу

$$\tilde{y}_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda \tilde{y}^{(\sigma, \sigma)} - \tilde{m} \left(\tilde{y} + \frac{h^2}{12} \Lambda \tilde{y} \right) + \tilde{\varphi}, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{27}$$

$$\tilde{y}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \tilde{y}_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{28}$$

$$\tilde{y}(0, t) = \mu_1(t), \quad \tilde{y}(l, t) = \mu_2(t), \quad t \in \omega_\tau. \tag{29}$$

Вычитая из уравнений (27)–(29) соответствующие уравнения (9)–(11), получаем задачу для возмущения $\bar{y} = \tilde{y} - y$, которую запишем в операторном виде (15), (16):

$$D\bar{y}_{\bar{t}\bar{t}} + \tilde{A}_1 \bar{y} = \bar{\varphi} - (\tilde{A}_1 - A_1)y,$$

$$\bar{y}(0) = \bar{u}_0, \quad \bar{y}_t(0) = \bar{u}_1,$$

$$\tilde{A}_1 = \tilde{m}E + \left(1 - \frac{\tilde{m}h^2}{12} \right) A.$$

Здесь $D = D^* > E$, $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1^* > A \geq \delta E$ – положительные, постоянные и самосопряжённые операторы.

Заметим, что при $h/\sqrt{6} \leq \tau \leq \sqrt{1/\tilde{m}}$ выполнено условие (19), поэтому на основании априорной оценки (21) для \bar{y} получаем неравенство

$$\|\bar{y}^{n+1}\| \leq \sqrt{2} \left(\|\bar{y}(0)\|_D + \frac{1}{\delta} \|D\bar{y}_t(0)\| + \frac{1}{\delta} \sum_{s=1}^n \tau \{ \|\bar{\varphi}_s\| + \|(\tilde{A}_1 - A_1)y_s\| \} \right).$$

В силу соотношений (17), (18) имеем $\|A\| < 4/h^2$, и, следовательно, из (21) вытекает оценка

$$\|(\tilde{A}_1 - A_1)y_s\| = \left\| (\tilde{m} - m) \left(E - \frac{h^2}{12} A \right) y_s \right\| < \frac{4}{3} K_s |\tilde{m} - m|,$$

в которой

$$K_s = \sqrt{2} \left(\|u_0\|_D + \frac{1}{\delta} \|Du_1\| + \frac{1}{\delta} \sum_{r=1}^{s-1} \tau \|\varphi_r\| \right).$$

Итак, мы можем сформулировать теорему о сильной устойчивости.

Теорема 5. Пусть выполнено следующее условие на шаги сетки:

$$\frac{h}{\sqrt{6}} \leq \tau \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{m}}}, \quad \bar{m} = \max\{m, \tilde{m}\}.$$

Тогда решение разностной схемы (9)–(11) сильно устойчиво и для её возмущения имеет место априорная оценка

$$\|\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}\| \leq \sqrt{2} \left\{ \|\tilde{u}_0 - u_0\|_D + \frac{1}{\delta} \|D(\tilde{u}_1 - u_1)\| + \frac{1}{\delta} \sum_{s=1}^n \tau \left(\|\tilde{\varphi}_s - \varphi_s\| + \frac{4}{3} K_s |\tilde{m} - m| \right) \right\}, \quad n = \overline{1, N_0 - 1}.$$

2.4. Теорема о сходимости. Обозначим через $z = y - u$ погрешность метода. Заменяя в разностных уравнениях (9)–(11) y на $z + u$, получаем задачу для z :

$$z_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda z^{(\sigma, \sigma)} - m \left(z + \frac{h^2}{12} \Lambda z \right) + \psi, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{30}$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad z_t(x, 0) = \overset{\circ}{\psi}, \quad x \in \omega_h, \tag{31}$$

$$z(0, t) = 0, \quad z(l, t) = 0, \quad t \in \omega_\tau. \tag{32}$$

Так как задачи (9)–(11) и (30)–(32) идентичны, то мы можем воспользоваться теоремой 4 для оценки погрешности метода.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда решение разностной задачи (9)–(11) сходится к точному решению дифференциальной задачи (6)–(8) в сеточной норме $C(\omega_h)$ и для её решения имеет место оценка точности вида

$$\max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|y^n - u^n\|_C \leq M_2(h^4 + \tau^2), \quad M_2 = \text{const} > 0.$$

Доказательство. Действительно, из априорных оценок (12), (13) и (26) следует неравенство

$$\|y^n - u^n\|_C \leq \sqrt{\frac{l}{2}} \left\{ Q(z^1) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \tau \|\psi(t_k)\| \right\} \leq M_2(h^4 + \tau^2).$$

Следовательно, разностное решение сходится к точному решению с четвёртым порядком по пространству и вторым по времени.

3. Уравнение Клейна–Гордона с переменными коэффициентами.

3.1. Постановка задачи и разностная схема. В области $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - mu + f(x, t), \quad m = \text{const} > 0, \tag{33}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{v}_0(x), \tag{34}$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \tag{35}$$

где $0 < k_1 \leq k(x, t) \leq k_2$, $u(x, t) \in C^{4,6}(\bar{Q}_T)$, $p \in C^{0,5}(\bar{Q}_T)$, $f \in C^{0,4}(\bar{Q}_T)$.

На построенной сетке $\bar{\omega}$ исходную дифференциальную задачу аппроксимируем разностной схемой вида

$$y_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda y^{(\sigma, \sigma)} - \frac{h^2}{12} \Lambda(p y_{\bar{t}\bar{t}}) - m \left[y^{(\sigma, \sigma)} + \frac{h^2}{12} \Lambda(p y^{(\sigma, \sigma)}) \right] + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \tag{36}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \tag{37}$$

$$y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(l, t) = \mu_2(t), \quad t \in \omega_\tau. \tag{38}$$

Здесь

$$\Lambda y = (a(x, t_n) y_{\bar{x}})_x, \quad \sigma = 0.5, \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12} \Lambda(p f), \quad p(x, t) = \frac{1}{k(x, t)},$$

$$a(x, t) = 6 \left[p(x - h, t) + 4p \left(x - \frac{h}{2}, t \right) + p(x, t) \right]^{-1}, \quad 0 < c_1 \leq a(x, t) \leq c_2,$$

$$u_1(x) = \bar{v}_0(x) + \frac{\tau}{2} [(k(x, 0) u'(x, 0))' - m u(x, 0) + f(x, 0)], \quad x \in \omega_h.$$

Следуя работам [5, 6, 8], нетрудно показать, что разностная схема (36)–(38) аппроксимирует исходную задачу (33)–(35) с четвёртым порядком по пространству и вторым по времени, т.е. для её невязки

$$\psi = -u_{\bar{t}\bar{t}} + \Lambda u^{(\sigma, \sigma)} - \frac{h^2}{12} \Lambda(p u_{\bar{t}\bar{t}}) - m \left[u^{(\sigma, \sigma)} + \frac{h^2}{12} \Lambda(p u^{(\sigma, \sigma)}) \right] + \varphi$$

и второго начального условия имеют место априорные оценки

$$\|\psi\| \leq M(h^4 + \tau^2), \quad M = \text{const} > 0,$$

$$\|\dot{\psi}\| = \|u_1 - u_t^0\| \leq M_1\tau^2, \quad M_1 = \text{const} > 0.$$

3.2. Устойчивость. Чтобы избежать громоздких выкладок, ограничимся случаем зависимости коэффициента $k = k(x)$ только от пространственной переменной. Рассмотрим возмущённое решение \tilde{y} , полученное по разностной схеме (36)–(38) с возмущённой правой частью \tilde{f} и возмущёнными начальными условиями \tilde{u}_0, \tilde{u}_1 . Тогда задача для возмущения $\bar{y} = \tilde{y} - y$ примет вид

$$\bar{y}_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda \bar{y}^{(\sigma, \sigma)} - \frac{h^2}{12} \Lambda(p\bar{y}_{\bar{t}\bar{t}}) - m \left[\bar{y}^{(\sigma, \sigma)} + \frac{h^2}{12} \Lambda(p\bar{y}^{(\sigma, \sigma)}) \right] + \bar{\varphi}, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \quad (39)$$

$$\bar{y}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \bar{y}_t(x, 0) = \bar{u}_1(x), \quad x \in \omega_h, \quad (40)$$

$$\bar{y}(0, t) = 0, \quad \bar{y}(l, t) = 0, \quad t \in \omega_\tau. \quad (41)$$

Здесь $\bar{u}_0 = \tilde{u}_0 - u_0, \bar{u}_1 = \tilde{u}_1 - u_1, \bar{\varphi} = \tilde{\varphi} - \varphi$.

К сожалению, несмотря на линейность разностной задачи, к ней неприменима теория Самарского трёхслойных операторно-разностных схем [1]. При использовании метода энергетических неравенств в дальнейшем кроме некоторых известных фактов из теории разностных схем: первая разностная формула Грина, неравенство Коши–Буняковского с ε [1, гл. II, § 3], разностный аналог леммы Гронуолла [16, гл. III, § 1], нам понадобится также следующая

Лемма 2. *Выражение*

$$Q^n = \|\bar{y}_{\bar{t}}\|^2 + \frac{1}{2}(a, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2) + \frac{m}{2}(\|\bar{y}\|^2 + \|\check{y}\|^2) - \frac{h^2}{12}(ap_{(-1)}, \bar{y}_{\bar{x}\bar{t}}^2) - \frac{mh^2}{24}(ap_{(-1)}, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2),$$

где $p_{(-1)} = p_{i-1}$, при выполнении условий

$$h \leq h_0, \quad h_0 = \sqrt{\frac{3k_1}{m}}, \quad \tau \geq \frac{2h}{\sqrt{3k_1}} \quad (42)$$

неотрицательно: $Q^n \geq 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что выражение

$$I_1 = \frac{1}{4}(a, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2) - \frac{h^2}{12}(ap_{(-1)}, \bar{y}_{\bar{x}\bar{t}}^2) - \frac{mh^2}{24}(ap_{(-1)}, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2) \quad (43)$$

неотрицательно. С учётом очевидных неравенств

$$-\frac{h^2}{12}(ap_{(-1)}, \bar{y}_{\bar{x}\bar{t}}^2) \geq -\frac{h^2}{6k_1\tau^2}(a, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2) \quad \text{и} \quad -\frac{mh^2}{24}(ap_{(-1)}, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2) \geq -\frac{mh^2}{24k_1}(a, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2)$$

для выражения (43) имеет место оценка

$$I_1 \geq c_3(a, \bar{y}_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2), \quad c_3 = \frac{1}{4} - \frac{h^2}{6k_1\tau^2} - \frac{mh^2}{24k_1}.$$

При первом из условий (42) выполнено неравенство

$$\frac{1}{4} - \frac{mh^2}{24k_1} \geq \frac{1}{8}.$$

Следовательно,

$$c_3 \geq -\frac{h^2}{6k_1\tau^2} + \frac{1}{8} \geq 0$$

при выполнении второго из условий (42). Лемма доказана.

Чтобы получить априорную оценку для \bar{y} , умножим разностное уравнение (39) скалярно на $2\tau y_{\circ}$ и применим первую разностную формулу Грина. Получим следующее энергетическое соотношение:

$$Q^{n+1} - \frac{h^2}{12}(ap_{\bar{x}}(\bar{y}_t - \bar{y}_{\bar{t}}), \bar{y}_{\bar{x}t} + \bar{y}_{\bar{x}\bar{t}}] = Q^n + \frac{m\tau h^2}{12}(ap_{\bar{x}}(\hat{y} + \check{y}), \bar{y}_{\bar{t}\bar{x}}] + 2\tau(\bar{\varphi}, \bar{y}_{\bar{t}}). \quad (44)$$

Рассмотрим в (44) слагаемые, отличные от Q^n и Q^{n+1} . Применяя неравенство Коши–Буняковского с ε , легко получаем следующие оценки:

$$-\frac{h^2}{12}(ap_{\bar{x}}(\bar{y}_t - \bar{y}_{\bar{t}}), \bar{y}_{\bar{x}t} + \bar{y}_{\bar{x}\bar{t}}] \geq -ch(\|\bar{y}_t\|^2 + \|\bar{y}_{\bar{t}}\|^2), \quad (45)$$

$$\frac{m\tau h^2}{12}(ap_{\bar{x}}(\hat{y} + \check{y}), \bar{y}_{\bar{t}\bar{x}}] \leq ch\left[\frac{m}{2}(\|\hat{y}\|^2 + \|\bar{y}\|^2) + \frac{m}{2}(\|\bar{y}\|^2 + \|\check{y}\|^2)\right], \quad (46)$$

$$2\tau(\bar{\varphi}, \bar{y}_{\bar{t}}) \leq \varepsilon\tau\|\bar{\varphi}\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}(\|\bar{y}_t\|^2 + \|\bar{y}_{\bar{t}}\|^2), \quad (47)$$

где $c > 0$ – константа, зависящая от m , ε , $\max_{x \in \bar{\omega}_h} |p_{\bar{x}}(x)|$ и в каждом конкретном случае своя.

Учитывая неравенства (45)–(47) в (44), при выполнении условий (42) приходим к рекуррентному соотношению

$$Q^{n+1} \leq (1 + \tau c)Q^n + \tau c\|\bar{\varphi}\|^2 \leq e^{c\tau}Q^n + \tau c\|\bar{\varphi}\|^2. \quad (48)$$

Итак, имеет место следующая

Теорема 7. Пусть выполнено условие

$$\tau \geq \max\left\{1, \sqrt{\frac{2}{3k_1}}\right\}h.$$

Тогда имеет место оценка

$$Q^{n+1} \leq e^{c\tau n}\left(Q^1 + c\sum_{k=1}^n \tau\|\bar{\varphi}^k\|^2\right), \quad (49)$$

означающая ρ -устойчивость решения разностной схемы (36)–(38) по начальным данным и правой части в сеточных нормах $L_2(\omega_h)$, $W_2^1(\omega_h)$, $C(\bar{\omega}_h)$.

Доказательство теоремы следует из неравенства (48), леммы Гронуолла и вложения [1, с. 107]

$$\|\tilde{y} - y\|_C \leq \frac{\sqrt{l}}{2}\|\tilde{y}_{\bar{x}} - y_{\bar{x}}\|.$$

3.3. Сходимость разностной схемы в сеточной норме $C(\bar{\omega}_h)$. Заменяя в разностных уравнениях (36)–(38) y на $z + u$, где u – решение задачи (33)–(35), получаем для погрешности z задачу

$$z_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda z^{(\sigma, \sigma)} - \frac{h^2}{12}\Lambda(pz_{\bar{t}\bar{t}}) - m\left[z^{(\sigma, \sigma)} + \frac{h^2}{12}\Lambda(pz^{(\sigma, \sigma)})\right] + \psi, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_{\tau}, \quad (50)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad z_t(x, 0) = \overset{\circ}{\psi}, \quad x \in \omega_h, \quad \overset{\circ}{\psi} = O(\tau^2), \quad (51)$$

$$z(0, t) = 0, \quad z(l, t) = 0, \quad t \in \omega_\tau. \tag{52}$$

Задачи (50)–(52) и (39)–(41) идентичны. Поэтому можно применить теорему 7 для оценки погрешности метода. Тогда в соответствии с неравенством (49) получаем оценку

$$\|z\|_C^2 \leq M_1 \left\{ \|\dot{\psi}\|^2 + \frac{4c_2}{c^2} \|\dot{\psi}_{\bar{x}}\|^2 + \frac{4m}{c^2} \|\dot{\psi}\|^2 + cT \max_{t \in \omega_\tau} \|\psi(t)\|^2 \right\},$$

где $M_1 = \text{const} > 0$.

Итак, мы можем сформулировать теорему о сходимости.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда решение разностной схемы (36)–(38) сходится к точному решению дифференциальной задачи (33)–(35) в сеточной норме $C(\bar{\omega}_h)$ и для её решения имеет место оценка точности

$$\|y^n - u^n\|_C \leq M_2(h^4 + \tau^2), \quad n = \overline{0, N_0},$$

где $M_2 = \text{const} > 0$.

4. Квазилинейные уравнения Клейна–Гордона. Недостатком предложенных А.А. Самарским компактных разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами является невозможность их обобщения на случай квазилинейных уравнений, так как соответствующий шаблонный функционал должен вычисляться в несуществующей для квазилинейного случая полуцелой точке. Тем не менее компактные схемы порядка $4 + 2$, аналогичные схемам для случая постоянных коэффициентов, можно строить и для квазилинейных уравнений Клейна–Гордона

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2} - m f_1(u) + f(x, t), \quad m = \text{const} > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \end{aligned}$$

с условием $\phi'_u = k(u) \geq k_1 > 0$.

Разностная схема $4 + 2$ порядка аппроксимации на стандартном шаблоне имеет вид

$$\begin{aligned} y_{\bar{t}t} &= [\phi(y)]_{\bar{x}x}^{(\sigma, \sigma)} - m \bar{f}_1(y) + \bar{f} - \frac{h^2}{12} y_{\bar{t}t\bar{x}x}, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \\ y(0, t) &= \mu_1(t), \quad y(l, t) = \mu_2(t), \quad t \in \omega_\tau, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v + \frac{h^2}{12} v_{\bar{x}x} = \frac{5}{6}v + \frac{1}{12}(v_{+1} + v_{-1}), \quad 0 < \sigma \leq 1, \\ u_1(x) &= \bar{u}_0(x) + \frac{\tau}{2} [\phi''(u_0(x)) - m f_1(u_0(x)) + f(x, 0)], \quad x \in \omega_h. \end{aligned}$$

Для реализации этой схемы необходимо использовать итерационный метод Ньютона.

5. Вычислительный эксперимент. Ниже приводятся результаты численных расчётов при решении начально-краевой задачи для уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 u^{-\gamma}}{\partial x^2} \tag{53}$$

с выбранными параметрами $\gamma = 5$, $l = 2$, $T = 2$. Начальные и краевые условия определяются из точного решения

$$u(x, t) = \left(\frac{t+1}{x+1} \right)^{2/(1+\gamma)}.$$

Уравнение (53) является следствием системы уравнений газовой динамики в переменных Лагранжа с уравнением состояния для политропного газа, в котором $u = \eta$ – удельный объём. Разностная схема 4+2 порядка аппроксимации для уравнения (53) имеет вид

$$y_{\bar{t}t} = \sigma(\phi(\hat{y}))_{\bar{x}x} + (1 - 2\sigma)(\phi(y))_{\bar{x}x} + \sigma(\phi(\check{y}))_{\bar{x}x} - \frac{h^2}{12} y_{\bar{t}t\bar{x}x}, \tag{54}$$

где $\sigma = 1$, $\phi(u) = -u^{-\gamma}/\gamma$.

Для нахождения решения разностной схемы (54) применяется итерационный метод Ньютона:

$$\hat{y}^{(k+1)} - 2y + \check{y} = \tau^2 [\phi(\hat{y}^{(k)}) + \phi'_y(\hat{y}^{(k)}) (\hat{y}^{(k+1)} - \hat{y}^{(k)})]_{\bar{x}x} - \tau^2 [\phi(y)]_{\bar{x}x} + \tau^2 [\phi(\check{y})]_{\bar{x}x} - \frac{h^2}{12} (\hat{y}^{(k+1)} - 2y + \check{y})_{\bar{x}x},$$

$$\hat{y}^{(0)} = 2y - \check{y}, \quad k = 0, 1, 2, \dots - \text{номер итерации.}$$

На каждом слое этот процесс будет останавливаться, когда при некотором M будет выполнено условие

$$\| \hat{y}^{(M+1)} - \hat{y}^{(M)} \|_C \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-7}.$$

Порядок сходимости по временной и пространственной переменным в норме $L_\infty = C$ определяется по следующим формулам:

$$p_\infty^h = \log_2 \frac{\|z(2h, \tau)\|_{L_\infty}}{\|z(h, \tau)\|_{L_\infty}}, \quad p_\infty^\tau = \log_2 \frac{\|z(h, 2\tau)\|_{L_\infty}}{\|z(h, \tau)\|_{L_\infty}}. \tag{55}$$

Так как разностное решение сходится к точному решению с четвёртым порядком по пространству и вторым по времени, то для проверки скорости сходимости по временной переменной мы выбираем такие шаги h и τ , чтобы выполнялось неравенство $h^4 \leq \tau^2$. Тогда получается схема $O(\tau^2)$ и мы работаем со вторым правилом Рунге (55).

Аналогично, при рассмотрении порядка по h в расчётах следим, чтобы выполнялись неравенство $h^4 \geq \tau^2$. Тогда можно применить первое правило Рунге (55).

В таблицах приведена скорость сходимости приближённого решения к точному.

Таблица 1. Скорость сходимости по пространственному направлению

h	τ	$\ z\ _{L_\infty}$	$p_{L_\infty}^h$	$\ z\ _{L_2}$	$p_{L_2}^h$	k
$h_0=0.5$	$\tau_0 = 0.25$	1.29E-02	–	1.05E-02	–	3
$h_0/2^1$	$\tau_0/4^1$	7.47E-04	4.10917	6.20E-04	4.08544	2
$h_0/2^2$	$\tau_0/4^2$	4.49E-05	4.05519	3.82E-05	4.02065	2
$h_0/2^3$	$\tau_0/4^3$	2.79E-06	4.00895	2.38E-06	4.00215	2
$h_0/2^4$	$\tau_0/4^4$	1.75E-07	3.99592	1.49E-07	3.9998	1
$h_0/2^5$	$\tau_0/4^5$	1.16E-08	3.91571	9.94E-09	3.90473	1

Таблица 2. Скорость сходимости по временному направлению

h	τ	$\ z\ _{L_\infty}$	$p_{L_\infty}^\tau$	$\ z\ _{L_2}$	$p_{L_2}^\tau$	k
$h_0 = 0.001$	$\tau_0=0.25$	1.32E-02	–	1.11E-02	–	3
h_0	$\tau_0/2^1$	3.34E-03	1.97629	2.59E-03	2.09106	3
h_0	$\tau_0/2^2$	7.66E-04	2.12479	6.25E-04	2.05417	2
h_0	$\tau_0/2^3$	1.79E-04	2.10033	1.54E-04	2.02276	2
h_0	$\tau_0/2^4$	4.49E-05	1.99439	3.82E-05	2.00736	2
h_0	$\tau_0/2^5$	1.12E-05	1.99691	9.55E-06	2.00212	2

Отсюда видим, что построенная разностная схема имеет четвёртый порядок точности по пространственной переменной и второй по временной.

Кроме того, на рис. 1, 2 по цветам и фигурам хорошо видна сходимость приближённого решения к точному решению при измельчении шагов сетки h и τ . Для удобства визуального наблюдения приведённые результаты получены в области $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq t \leq 10$.

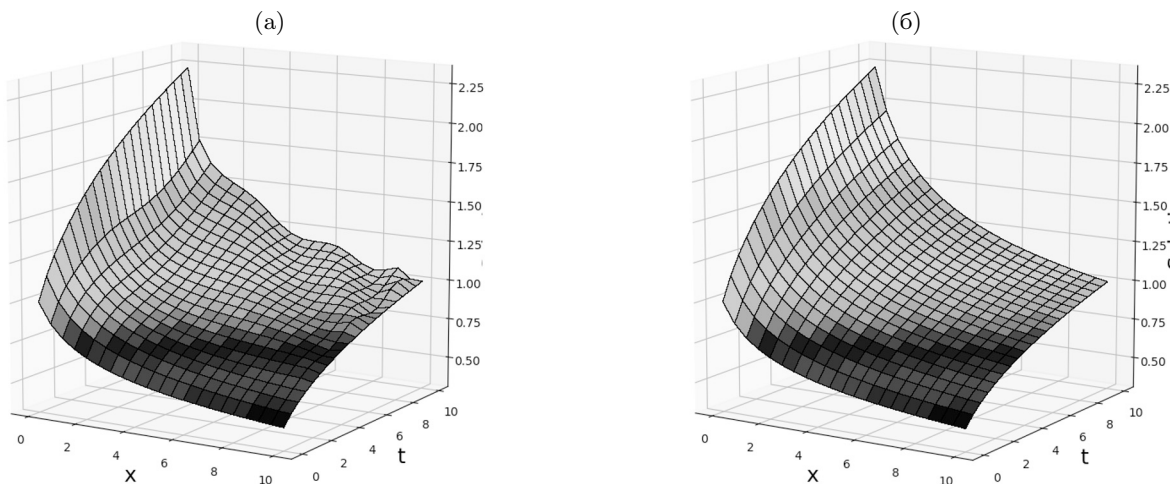


Рис. 1. Численное (а) и точное (б) решения при $h = 0.5$, $\tau = 0.5$.

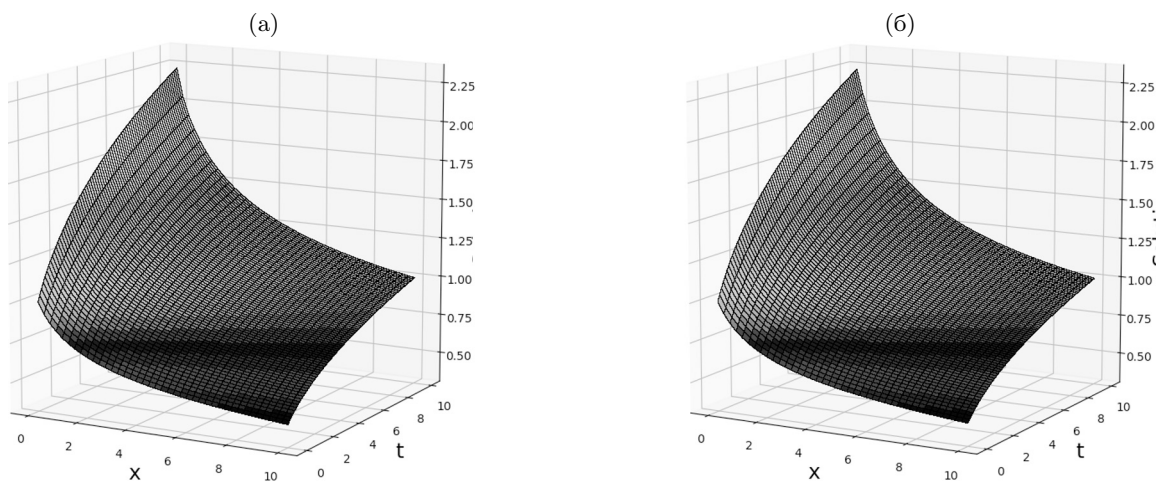


Рис. 2. Численное (а) и точное (б) решения при $h = 0.25$, $\tau = 0.125$.

Проведённый вычислительный эксперимент подтверждает наши теоретические выводы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1989.
2. Самарский А.А., Вабичевич П.Н., Матус П.П. Разностные схемы с операторными множителями. Минск, 1998.
3. Lemeshevsky S., Matus P., Poliakov D. Exact Finite-Difference Schemes. De Gruyter, 2016.
4. Вабичевич П.Н. Двухслойные схемы повышенного порядка аппроксимации для нестационарных задач математической физики // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 1. С. 118–130.
5. Паасонен В.И. Компактные схемы для систем уравнений второго порядка с конвективными членами // Числ. методы механики сплошной среды. 1998. Т. 3. № 1. С. 55–66.
6. Самарский А.А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 5. С. 812–840.

7. Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М., 1990.
8. Паасонен В.И. Обобщение методов повышенной точности для нелинейных уравнений 2-го порядка в ортогональных системах координат // Числ. методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8. № 2. С. 94–99.
9. Паасонен В.И. Диссипативные асимметричные компактные схемы для уравнения колебаний // Вычислит. технологии. Спец. выпуск. 2001. Т. 6. № 2. С. 475–479.
10. Caudreу P.J., Eilbeck J.C., Gibbon J.D. The sine-Gordon equation as a model classical field theory // *Nuovo Cimento B. Ser.* 11. 1975. V. 25. № 2. P. 497–512.
11. Luo Y., Li X., Guo C. Fourth-order compact and energy conservative scheme for solving nonlinear Klein–Gordon equation // *Numer. Methods Partial Differ. Equat.* 2017. V. 33. № 4. P. 1283–1304.
12. Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Ань. Компактные разностные схемы для уравнения Клейна–Гордона // Докл. НАН Беларуси. 2020. Т. 64. № 5. С. 526–533.
13. Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Ань. Компактные разностные схемы для уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами // Докл. НАН Беларуси. 2021. Т. 65. № 1. С. 25–32.
14. Москальков М.Н. О точности разностных схем, аппроксимирующих волновое уравнение с кусочно-гладкими решениями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 2. С. 390–401.
15. Матус П.П., Панайотова Й.Н. Коэффициентная устойчивость трехслойных операторно-разностных схем // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2001. Т. 41. № 5. С. 722–731.
16. Самарский А.А., Гудин А.В. Устойчивость разностных схем. М., 1973.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Католический университет им. Иоанна-Павла II,
г. Люблин, Польша,
Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 31.12.2020 г.
После доработки 31.12.2020 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.