

УДК 519.622.2

АЛГОРИТМ АДАПТИВНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА РАЗРЕЖЕННЫХ СЕТКАХ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЯМИ

© 2021 г. А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников

Рассматриваются теоретические аспекты обобщения алгоритма адаптивной интерполяции на случай большого количества интервальных неопределённостей с использованием разреженных сеток. Суть классического алгоритма адаптивной интерполяции заключается в построении адаптивного иерархического разбиения области неопределённости на подобласти, каждой из которых соответствует полиномиальная функция некоторой степени, интерполирующая зависимость решения задачи от точечных значений интервальных параметров с заданной точностью. Основным недостатком алгоритма является его экспоненциальная зависимость от количества интервальных параметров. Уже при наличии пяти-шести интервальных неопределённостей алгоритм становится практически не применим. В связи с этим предлагается вместо интерполяции на регулярной сетке использовать интерполяцию на адаптивных разреженных сетках, что позволяет в ряде случаев существенно расширить область применения алгоритма. Получена оценка глобальной погрешности алгоритма на разреженных сетках. Показана линейная зависимость глобальной погрешности алгоритма от уровня сетки. На представительном ряде задач продемонстрирована эффективность предложенного подхода.

DOI: 10.31857/S0374064121070104

Введение. Для многих прикладных и исследовательских задач характерно отсутствие точной информации о параметрах изучаемого явления или процесса [1]. По этой причине подобные задачи обычно формулируются в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с интервальными параметрами и интервальными начальными условиями. Решением таких систем является интервальная оценка значений фазовых переменных в зависимости от времени. Существует несколько подходов к решению данного класса задач: одни основаны на использовании классической интервальной арифметики [2–4], другие – на аппроксимации множества решений с помощью геометрических примитивов [5–7], а в основе третьих лежит определение явной зависимости решения задачи от значений интервальных параметров [8–11]. В общем случае наблюдается некоторый баланс между вычислительной сложностью методов и качеством получаемых интервальных оценок. Методы, основанные на классической интервальной арифметике, зачастую могут давать чрезмерно завышенные интервальные оценки решения, но при этом обладают небольшой вычислительной сложностью. С другой стороны, методы, восстанавливающие явную зависимость решения от интервальных параметров, имеют экспоненциальную сложность, но при этом получают близкие к истинным интервальные оценки. С практической точки зрения интерес представляют методы, которые не завышают оценки. В связи с этим актуальной является задача уменьшения вычислительной сложности соответствующих методов.

Ранее авторами был разработан и апробирован алгоритм адаптивной интерполяции для моделирования динамических систем с интервальными параметрами [11, с. 16–19]. Его суть заключается в адаптивном иерархическом разбиении области неопределённости на подобласти, для каждой из которых выполняется построение полиномиальной функции [12], интерполирующей зависимость решения задачи от точечных значений интервальных параметров. Все подобласти представляют собой прямоугольные параллелепипеды размерности, равной количеству интервальных параметров. В каждой подобласти строится регулярная сетка. Каждому

узлу в сетке соответствует решение исходной неинтервальной задачи при значениях параметров, определяемых положением узла в пространстве. Количество узлов в одной сетке оценивается как $(p + 1)^m$, где p – степень интерполяционного полинома по каждому измерению, а m – количество интервальных параметров. При увеличении m время работы алгоритма адаптивной интерполяции становится чрезвычайно большим, что ограничивает область его применения.

В работах [13, 14] дано теоретическое обоснование алгоритма и выполнено его тестирование как на модельных задачах, так и на прикладных задачах химической кинетики. В [15] рассмотрены различные аспекты разработки параллельной версии алгоритма под архитектуру графических процессоров с использованием технологии CUDA [16]. В [17] продемонстрирована возможность определения бифуркаций и хаоса в динамических системах с помощью анализа получающегося адаптивного разбиения области неопределённости в процессе работы алгоритма. В работе [18] выполнен анализ вычислительных затрат алгоритма и получены рекомендации по выбору оптимальной степени интерполяционного полинома p . В [19] показана возможность использования разреженных сеток в алгоритме адаптивной интерполяции для моделирования динамических систем, содержащих большое количество интервальных параметров, и продемонстрирована эффективность данного подхода. Настоящая работа посвящена теоретическим аспектам применения разреженных сеток для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными условиями и параметрами.

Разреженные сетки основаны на иерархическом базисе и предназначены для решения задач представления, интегрирования и интерполяции многомерных функций [20]. За счёт незначительного ухудшения асимптотических свойств погрешности они позволяют существенно снизить “проклятие размерности” (экспоненциальный рост числа узлов при увеличении размерности). Классические разреженные сетки являются результатом оптимизации вычислительных затрат для аппроксимации функций с ограниченными смешанными производными [21, с. 3]. В [22] даётся введение в разреженные сетки и технику работы с ними, а также приводится программный код на языке программирования Python с их реализацией. Работа [23] посвящена алгоритмам распараллеливания, а работа [24] – различным приложениям. В [25] рассматриваются вопросы повышения эффективности разреженных сеток.

Существует адаптивный вариант разреженных сеток, который позволяет динамически учитывать особенности рассматриваемой функции и подстраиваться под них: в тех областях, в которых имеются резкие переходы, происходит уплотнение сетки, а в областях с плавными переходами – её разрежение. Кроме того, сетки учитывают разное влияние подмножеств переменных на конечный результат. Например, если исходная зависимость является линейной комбинацией функций от определённых подгрупп переменных, то построение сетки будет происходить только на подмножествах, соответствующих этим подгруппам.

Решение системы ОДУ с интервальными начальными условиями и параметрами в каждый момент времени можно рассматривать как некоторую многомерную вектор-функцию, которая в общем случае является “чёрным ящиком”. В начальный момент времени эта функция тривиальная, её компоненты являются либо константами, либо линейными функциями. Основная цель – построить для каждого момента времени соответствующий интерполянт. От шага к шагу интерполяционная сетка может изменяться, так как происходит её адаптация. Для того чтобы вычислить значение исходной вектор-функции в произвольной точке на некотором шаге, нет необходимости интегрировать систему ОДУ из начального состояния; вместо этого с помощью интерполяции вычисляется решение на предыдущем шаге, и затем оно переносится на текущий шаг. При этом важно понимать как в результате поведёт себя глобальная погрешность. Этот вопрос рассматривается в данной работе.

1. Постановка задачи. В общем виде рассматривается система ОДУ, состоящая из n_e уравнений с n_p параметрами:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = g_i(u_1(t), u_2(t), \dots, u_{n_e}(t), v_1, v_2, \dots, v_{n_p}, t), \quad i = \overline{1, n_e}, \quad t \in [t_0, t_N],$$

$$u_i(t_0) \in [u_i^0, \overline{u_i^0}], \quad i = \overline{1, m_e},$$

$$\begin{aligned} u_i(t_0) &= u_i^0, \quad i = \overline{m_e + 1, n_e}, \\ v_i &\in [\underline{v}_i, \overline{v}_i], \quad i = \overline{1, m_p}, \end{aligned} \quad (1)$$

где m_e – количество интервальных начальных условий, m_p – количество интервальных параметров. Вектор-функция $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$ удовлетворяет всем условиям, обеспечивающим существование и единственность решения при всех $u_i(t_0) \in [\underline{u}_i^0, \overline{u}_i^0]$, $i = \overline{1, m_e}$, и $v_i \in [\underline{v}_i, \overline{v}_i]$, $i = \overline{1, m_p}$.

Сгруппируем вместе интервальные неопределённости и выполним преобразование системы (1) к автономной системе ОДУ без параметров путём добавления в систему фиктивных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i(t)}{dt} &= f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \quad i = \overline{1, n}, \\ y_i(t_0) &\in [\underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0], \quad i = \overline{1, m}, \\ y_i(t_0) &= y_i^0, \quad i = \overline{m + 1, n}, \quad t \in [t_0, t_N], \end{aligned} \quad (2)$$

где $n = n_e + n_p + 1$ – количество уравнений, $m = m_e + m_p$ – количество интервальных начальных условий,

$$\begin{aligned} y_i(t) &= u_i(t), \quad \underline{y}_i^0 = \underline{u}_i^0, \quad \overline{y}_i^0 = \overline{u}_i^0; \quad f_i = g_i, \quad i = \overline{1, m_e}, \\ y_{m_e+i}(t) &= v_i, \quad \underline{y}_{m_e+i}^0 = \underline{v}_i^0, \quad \overline{y}_{m_e+i}^0 = \overline{v}_i^0; \quad f_{m_e+i} \equiv 0, \quad i = \overline{1, m_p}, \\ y_{m+i}(t) &= u_{m_e+i}(t), \quad \underline{y}_{m+i}^0 = \underline{u}_{m_e+i}^0; \quad f_{m+i} = g_{m_e+i}, \quad i = \overline{1, n_e - m_e}, \\ y_{n_e+m_p+i}(t) &= v_{m_p+i}, \quad \underline{y}_{n_e+m_p+i}^0 = \underline{v}_{m_p+i}^0; \quad f_{n_e+m_p+i} \equiv 0, \quad i = \overline{1, n_p - m_p}, \\ y_n(t) &= t, \quad y_n^0 = t_0; \quad f_n \equiv 1. \end{aligned}$$

Предположим, что решение системы (2) существует при всех указанных начальных данных на всём рассматриваемом отрезке и является функцией от независимой переменной t и точечных значений интервальных начальных условий:

$$\mathbf{y}(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0, t), \quad y_i^0 \in [\underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0], \quad i = \overline{1, m}.$$

Рассматривается $N + 1$ точка из интервала интегрирования $[t_0, t_N]$:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_N.$$

Требуется для каждого значения t_k , $k = \overline{0, N}$, построить вектор-функцию $\mathbf{P}^k(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) = (P_1^k(y_1^0, \dots, y_m^0), \dots, P_n^k(y_1^0, \dots, y_m^0))$, где $y_i^0 \in [\underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0]$, $i = \overline{1, m}$, интерполирующую значение $\mathbf{y}^k(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) = \mathbf{y}(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0, t_k)$.

2. Алгоритм адаптивной интерполяции на разреженных сетках. Выполним последовательное построение решения системы (2). В начальный момент времени t_0 компоненты $P_j^0(y_1^0, \dots, y_m^0)$, $j = \overline{1, n}$, вектор-функции $\mathbf{P}^0(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ будут являться линейными функциями

$$P_i^0(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) = y_i^0, \quad i = \overline{1, m},$$

и константами

$$P_i^0(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) = y_i^0, \quad i = \overline{m + 1, n}.$$

Предположим, что на k -м шаге известен интерполяционный полином $\mathbf{P}^k(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$. В процессе построения \mathbf{P}^{k+1} необходимо многократно вычислять исходную вектор-функцию

\mathbf{y}^{k+1} в определённых точках $(\hat{y}_1^0, \hat{y}_2^0, \dots, \hat{y}_m^0)$. Для этого с помощью какого-либо численного метода интегрирования решается следующая система ОДУ:

$$\frac{d\hat{y}_i(t)}{dt} = f_i(\hat{y}_1(t), \hat{y}_2(t), \dots, \hat{y}_n(t)), \quad \hat{y}_i(t_k) = P_i^k(\hat{y}_1^0, \hat{y}_2^0, \dots, \hat{y}_m^0), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad (3)$$

и в качестве \mathbf{y}^{k+1} берётся $\hat{\mathbf{y}}^{k+1}$.

На каждом шаге возникают две локальные погрешности: первая – от численного метода интегрирования системы ОДУ, а вторая – от интерполяции при вычислении $\mathbf{P}^k(\hat{y}_1^0, \hat{y}_2^0, \dots, \hat{y}_m^0)$. Будем предполагать, что первая несущественно мала по сравнению со второй.

Согласно постановке задачи интерполяции [12] интерполяционный полином обязательно должен проходить через все узловые точки. Следовательно, погрешность интерполяции в точках, соответствующих узлам, тождественно равна нулю. Поэтому при построении интерполяционной сетки на $(k+1)$ -м шаге погрешность от интерполяции будет возникать только в узлах, которых не было в сетке на k -м шаге.

Для того чтобы оценить глобальную погрешность необходимо оценить количество шагов, в которых происходило уплотнение сетки, а это, в свою очередь, зависит от свойств используемой интерполяции.

Далее приводится описание классических разреженных сеток согласно работам [21, 22].

В основе базиса лежит *функция шляпы*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{если } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4)$$

Сначала рассматривается построение интерполяционного полинома для гладкой функции одной переменной $f(x)$, $x \in [0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$.

Сетка уровня l определяется следующим образом:

$$G_l = \{x_{l,i} : x_{l,i} = i \cdot h_l, \quad 1 \leq i \leq 2^l - 1, \quad h_l = 2^{-l}\},$$

и её i -му узлу ставится в соответствие базисная функция $\varphi_{l,i}$, определяемая через функцию шляпы (4) равенством

$$\varphi_{l,i}(x) = \varphi\left(\frac{x - i \cdot h_l}{h_l}\right) = \varphi(2^l \cdot x - i).$$

Интерполяционный полином записывается в виде

$$P(x) = \sum_{i=1}^{2^l-1} a_{l,i} \varphi_{l,i}(x), \quad (5)$$

где $a_{l,i} = f(x_{l,i})$. Здесь мы имеем классическую кусочно-линейную интерполяцию.

Выполняется переход к иерархическому базису. Для этого базисные функции с чётными индексами уровня k выражаются через базисные функции уровня $k-1$:

$$\varphi_{k,2i}(x) = \varphi_{k-1,i}(x) - (\varphi_{k,2i-1}(x) + \varphi_{k,2i+1}(x))/2, \quad 1 \leq i \leq 2^{k-1} - 1. \quad (6)$$

Полученное выражение (6) подставляется в функцию (5):

$$P(x) = \sum_{k=1}^l \sum_{\substack{i=1 \\ i - \text{нечётное}}}^{2^k-1} a_{k,i} \varphi_{k,i}(x), \quad (7)$$

где $a_{k,i} = f(x_{k,i}) - (f(x_{k,i-1}) + f(x_{k,i+1}))/2$.

Коэффициенты $a_{k,i}$ характеризуют вторую производную функции $f(x)$ и при возрастании k к бесконечности стремятся к нулю как $O(2^{-2k})$. В отличие от (5) слагаемые, входящие в (7), не равнозначны: чем больше k , тем меньше вклад соответствующих слагаемых в результат.

D -мерный базис конструируется при помощи произведения одномерных базисов:

$$\varphi_{\mathbf{l},\mathbf{i}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \varphi_{l_j,i_j}(x_j), \quad 1 \leq i_j \leq 2^{l_j} - 1, \quad i_j - \text{нечётное},$$

где $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_d)$, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_d)$ – мультиуровень и мультииндекс базисной функции, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ – вектор переменных.

В зависимости от ограничений на мультиуровень \mathbf{l} базисных функций, использующихся в интерполяционном полиноме, получается или полная сетка, или разреженная сетка. Для полной сетки уровня n_g имеем ограничение $\|\mathbf{l}\|_\infty \leq n_g$, где $\|\mathbf{l}\|_\infty = \max_{j=1,d} l_j$, а для разреженной сетки уровня n_g – ограничение

$$\|\mathbf{l}\|_1 \leq n_g + d - 1,$$

где $\|\mathbf{l}\|_1 = \sum_{j=1}^d l_j$. Сравним асимптотические характеристики сеток. Обозначим $p = 2^{n_g} - 1$. Для полной сетки количество узлов оценивается как $O(p^d)$, а погрешность – $O(h_{n_g}^2)$; для разреженной сетки количество узлов – $O(p(\log_2 p)^{d-1})$, погрешность – $O(h_{n_g}^2 (\log_2 p)^{d-1})$ [21].

Интерполяционный полином:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l},\mathbf{i}} a_{\mathbf{l},\mathbf{i}} \varphi_{\mathbf{l},\mathbf{i}}(\mathbf{x}), \quad \|\mathbf{l}\|_1 \leq n_g + d - 1,$$

$$1 \leq i_j \leq 2^{l_j} - 1, \quad i_j - \text{нечётное}, \quad j = \overline{1,d}, \quad (8)$$

$$a_{\mathbf{l},\mathbf{i}} = \sum_{\delta_1, \dots, \delta_d} (-1/2)^{\sum_{j=1}^d |\delta_j|} \times \\ \times f(x_{l_1, i_1 + \delta_1}, x_{l_2, i_2 + \delta_2}, \dots, x_{l_d, i_d + \delta_d}), \\ -1 \leq \delta_j \leq 1, \quad j = \overline{1,d}, \quad (9)$$

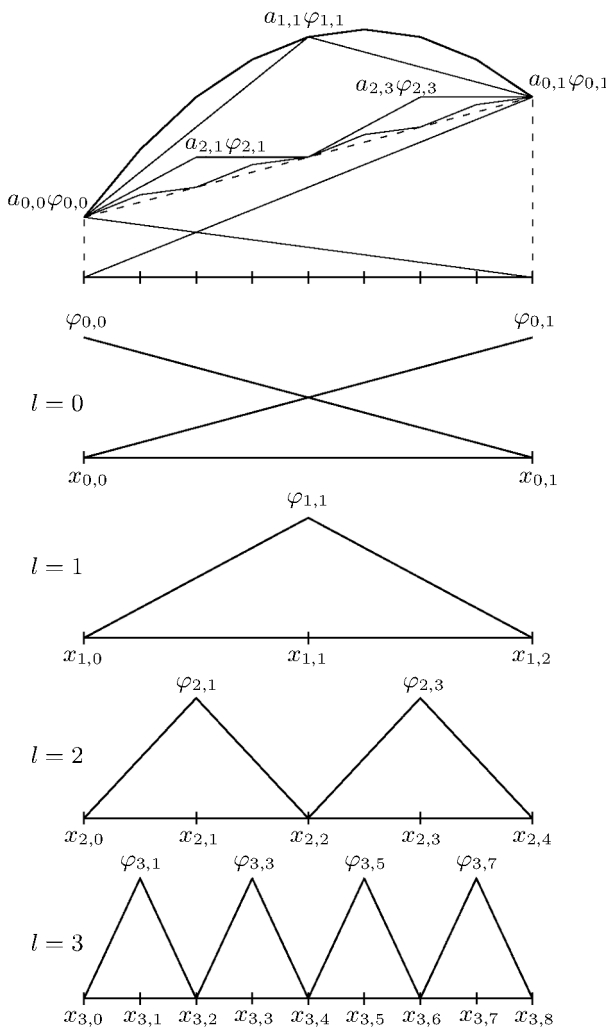


Рис. 1. Иерархический базис.

где $f(x_1, x_2, \dots, x_d)$ – интерполируемая гладкая функция, определённая на единичном d -мерном кубе и равная нулю на его границе.

Для учёта граничных значений в базис добавляются базисные функции нулевого уровня. Если $l_j = 0$, то в (8) $i_j = 0, 1$, а в (9) $\delta_j = 0$. Учёт граничных значений эквивалентен построению разреженных сеток на всех гранях области определения функции меньшей размерности. В частности, для трёхмерного куба имеем 6 граней размерности 2, 12 граней (рёбер) размерности 1 и 8 граней (вершин) размерности 0. В общем случае для d -мерного куба количество граней меньшей размерности равняется $3^d - 1$.

На рис. 1 снизу продемонстрирован одномерный иерархический базис, а сверху показан пример интерполяции функции

$$f(x) = 0.5 + 5x - 4x^2$$

на интервале $[0, 1]$.

На рис. 2, а показаны узлы, соответствующие двумерным базисным функциям разного уровня, а на рис. 2, б – все узлы разреженной сетки одновременно.

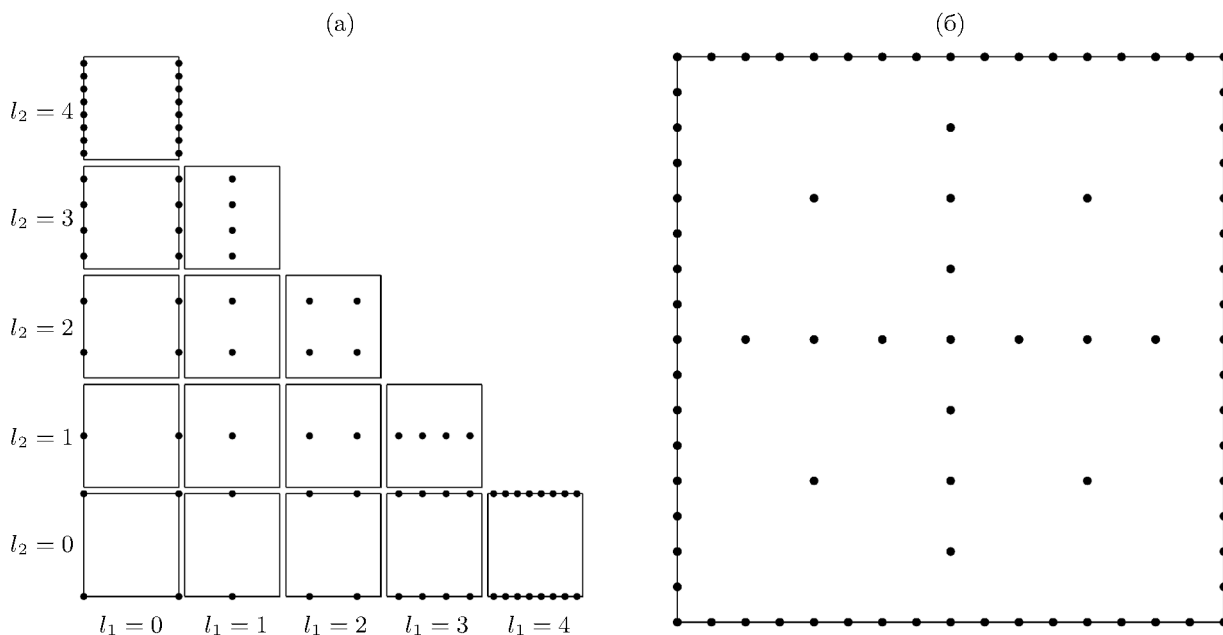


Рис. 2. Разреженная сетка третьего уровня: (а) узлы, соответствующие базисным функциям одного уровня по отдельности; (б) все узлы сетки одновременно.

Классические разреженные сетки являются результатом оптимизации вычислительных затрат для аппроксимации функций с ограниченными смешанными производными. Определим соответствующее пространство Соболева [21, 22]:

$$H_{\text{mix}}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \frac{\partial^{\|\alpha\|_1} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \in L_2(\Omega), \|\alpha\|_\infty \leq 2, f|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Согласно работе [21, с. 3], если $f \in H_{\text{mix}}(\Omega)$, то

$$\|f(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x})\|_2 = O(h_{n_g}^2 n_g^{d-1}).$$

Для построения решения исходной задачи область неопределённости с помощью линейных преобразований трансформируется в единичный m -мерный куб. Соотношения (8) и (9) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^k(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) &= \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{i}} \mathbf{a}_{\mathbf{l}, \mathbf{i}}^k \varphi_{\mathbf{l}, \mathbf{i}}(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0), \\ \|\mathbf{l}\|_1 &\leq n_g + m - 1, \quad 1 \leq i_j \leq 2^{l_j} - 1, \quad i_j - \text{нечётное}, \quad j = \overline{1, m}, \\ \mathbf{a}_{\mathbf{l}, \mathbf{i}}^k &= \sum_{\delta_1, \dots, \delta_m} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\sum_{j=1}^m |\delta_j|} \hat{\mathbf{y}}^k(y_{1, l_1, i_1 + \delta_1}^0, y_{2, l_2, i_2 + \delta_2}^0, \dots, y_{m, l_m, i_m + \delta_m}^0), \\ &\quad -1 \leq \delta_j \leq 1, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{10}$$

Предположим, что на k -м шаге решения системы (2) фиксируется локальная погрешность eps:

$$\max_{\substack{\hat{y}_i^0 \in [y_i^0, y_i^1] \\ i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n}}} |P_j^k(\hat{y}_1^0, \hat{y}_2^0, \dots, \hat{y}_m^0) - \hat{y}_j^k(\hat{y}_1^0, \hat{y}_2^0, \dots, \hat{y}_m^0)| \leq \text{eps}, \tag{11}$$

где $\hat{\mathbf{y}}^k = (\hat{y}_1^k, \dots, \hat{y}_n^k)^T$ – решение соответствующей системы (3) с интервалом интегрирования $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Другими словами, уровень разреженной сетки n_g^k выбирается минимально возможным, так, чтобы выполнялось условие (11).

Утверждение. Пусть компоненты $y_j^k(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{0, N}$, решения $\mathbf{y}^k(y_1^0, \dots, y_m^0)$ системы (2) принадлежат пространству $H_{\text{mix}}(\overline{[y_1^0, y_1^0]} \times \overline{[y_2^0, y_2^0]} \times \dots \times \overline{[y_m^0, y_m^0]})$. Тогда для глобальной погрешности справедливо асимптотическое равенство

$$\max_{\substack{y_i^0 \in \overline{[y_i^0, y_i^0]} \\ i=\overline{1, m} \\ j=\overline{1, n}}} |P_j^N(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) - y_j^N(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)| = O(n_g^N \text{ eps}), \tag{12}$$

где n_g^N – уровень разреженной сетки в конечный момент времени.

Доказательство. Локальная погрешность от интерполяции возникает только на тех шагах, на которых происходило уплотнение сетки. При этом, если уровень сетки на некотором шаге увеличился, а потом уменьшился, то локальная погрешность не будет вносить свой вклад в глобальную погрешность, так как созданные узлы в сетке будут временными. В связи с этим количество шагов, на которых возникала локальная погрешность, в худшем случае равно уровню сетки в конечный момент времени n_g^N .

Одним из способов оценки глобальной погрешности является суммирование всех оценок для локальных погрешностей, перенесённых на конец интервала интегрирования [26, с. 23]. Так как решение системы (2) удовлетворяет условию Липшица, то локальные погрешности переносятся в конец интервала интегрирования с константой Липшица [14]:

$$\|\mathbf{y}(\mathbf{y}^k + \boldsymbol{\delta}, t_N - t_k) - \mathbf{y}(\mathbf{y}^k, t_N - t_k)\| \leq L\|\boldsymbol{\delta}\| \leq L \text{ eps},$$

где L – константа Липшица, $\boldsymbol{\delta}$ – локальная погрешность.

Суммарная погрешность в каждом узле сетки в конечный момент времени оценивается сверху как $n_g^N L \text{ eps}$, и в результате получается оценка глобальной погрешности (12). Утверждение доказано.

Можно обобщить утверждение на случай ненулевых граничных значений, для этого необходимо рассмотреть отдельно границы области неопределённости.

На практике используется адаптивный вариант разреженных сеток. Если $|a_{1,i}| > \epsilon$, то в базис добавляются базисные функции на один уровень выше:

$$\begin{aligned} &\varphi_{(l_1+1, l_2, \dots, l_d), (2i_1-1, i_2, \dots, i_d)}, \quad \varphi_{(l_1+1, l_2, \dots, l_d), (2i_1+1, i_2, \dots, i_d)}, \\ &\varphi_{(l_1, l_2+1, \dots, l_d), (i_1, 2i_2-1, \dots, i_d)}, \quad \varphi_{(l_1, l_2+1, \dots, l_d), (i_1, 2i_2+1, \dots, i_d)}, \\ &\dots\dots\dots \\ &\varphi_{(l_1, l_2, \dots, l_d+1), (i_1, i_2, \dots, 2i_d-1)}, \quad \varphi_{(l_1, l_2, \dots, l_d+1), (i_1, i_2, \dots, 2i_d+1)}. \end{aligned}$$

Коэффициенты $a_{1,i}$ характеризуют смешанные производные и с увеличением уровня убывают, поэтому процесс адаптации сходится.

3. Результаты. Выполняется численное интегрирование нескольких автономных систем ОДУ с интервальными начальными условиями и параметрами.

Вначале рассматривается система ОДУ с двумя интервальными начальными условиями, которая соответствует модели Лотки–Вольтерры [27, с. 30]:

$$\begin{aligned} x' &= -0.9x + 0.5xy, \quad y' = 0.7y - 0.8xy, \quad t \in [0, 50], \\ x(0) &\in [0.5, 0.7], \quad y(0) \in [0.3, 5.0]. \end{aligned} \tag{13}$$

Параметр ϵ выбирается равным 10^{-3} .

На рис. 3, а показано множество решений системы (13) в различные моменты времени, а на рис. 3, б – узлы сетки. Точки на двух рисунках соответствуют друг другу. На рис. 3, в и 3, г представлены зависимости уровня сетки и погрешности от времени.

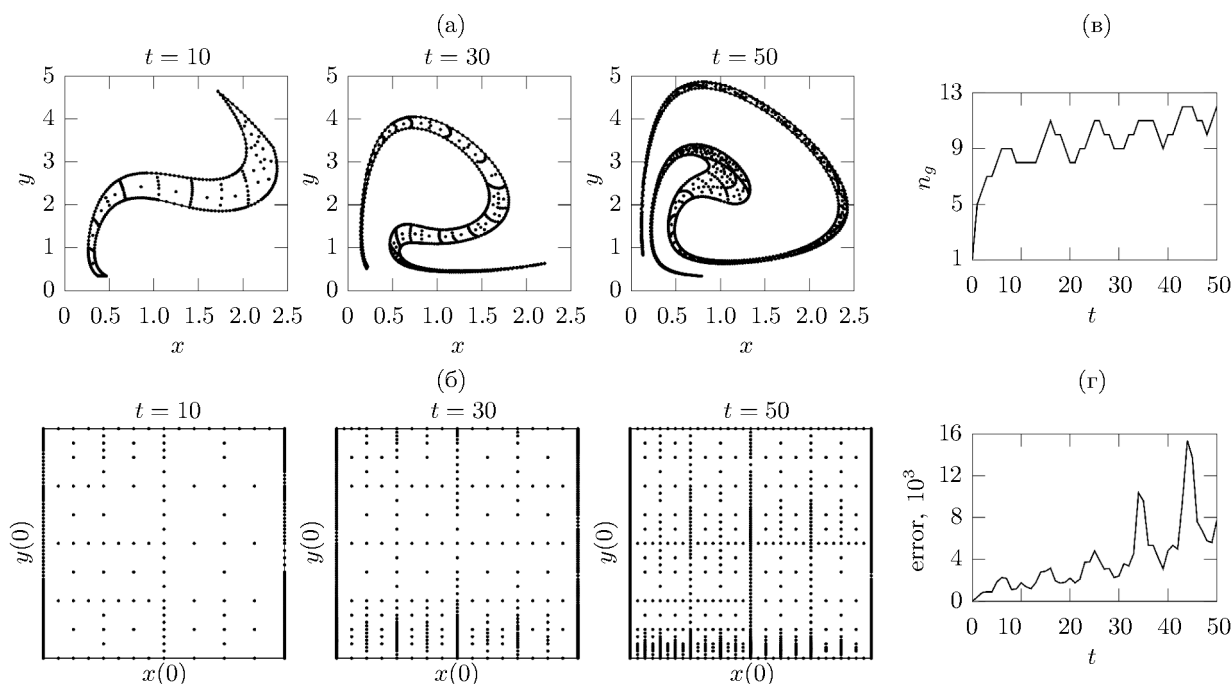


Рис. 3. Результаты решения системы (13): (а) – множество решений в различные моменты времени; (б) – узлы адаптивной разреженной сетки; (в) – зависимость уровня сетки от времени; (г) – зависимость глобальной погрешности от времени.

Здесь наблюдается корреляция между графиками, увеличение уровня приводит к увеличению погрешности, что соответствует ранее сформулированному утверждению. Для оценки погрешности в начальный момент времени случайным образом генерируется тестовое множество точек из области неопределённости параметров системы и строятся соответствующие решения, с которыми выполняется сравнение.

Далее рассмотрим автономные системы ОДУ, для которых решение может быть найдено аналитически. Первая система [11]:

$$x' = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right), \quad y' = a \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right), \quad t \in [0, 4],$$

$$x(0) = x_0 \in [-1, 1], \quad y(0) = y_0 \in [-1, 1], \quad a \in [-1, 1]. \quad (14)$$

Общее решение системы в (14) имеет следующее аналитическое представление:

$$x(x_0, y_0, a, t) = \exp \left(\frac{\sqrt{3}}{2}at \right) \left(y_0 \sin \left(\frac{at}{2} \right) + x_0 \cos \left(\frac{at}{2} \right) \right),$$

$$y(x_0, y_0, a, t) = \exp \left(\frac{\sqrt{3}}{2}at \right) \left(y_0 \cos \left(\frac{at}{2} \right) - x_0 \sin \left(\frac{at}{2} \right) \right). \quad (15)$$

Проанализируем решение (15). Оно линейно зависит от начальных условий x_0 и y_0 и нелинейно – от параметра a . Старшие производные отличны от нуля только для параметра a , и, соответственно, коэффициенты (10) ненулевые только при $l_1 = 0$ и $l_2 = 0$. Следовательно, уплотнение сетки будет происходить на четырёх подмножествах:

$$\{-1\} \times \{-1\} \times a, \quad \{-1\} \times \{1\} \times a, \quad \{1\} \times \{-1\} \times a, \quad \{1\} \times \{1\} \times a.$$

На рис. 4, а и 4, б показаны множество решений системы (14) и адаптивная разреженная сетка в различные моменты времени. Уплотнение сетки происходит только на рёбрах, которые соответствуют параметру a . На рис. 4, в и 4, г представлены зависимости уровня сетки и погрешности от t . Видим, что аналогично предыдущей задаче увеличение уровня приводит к увеличению погрешности.

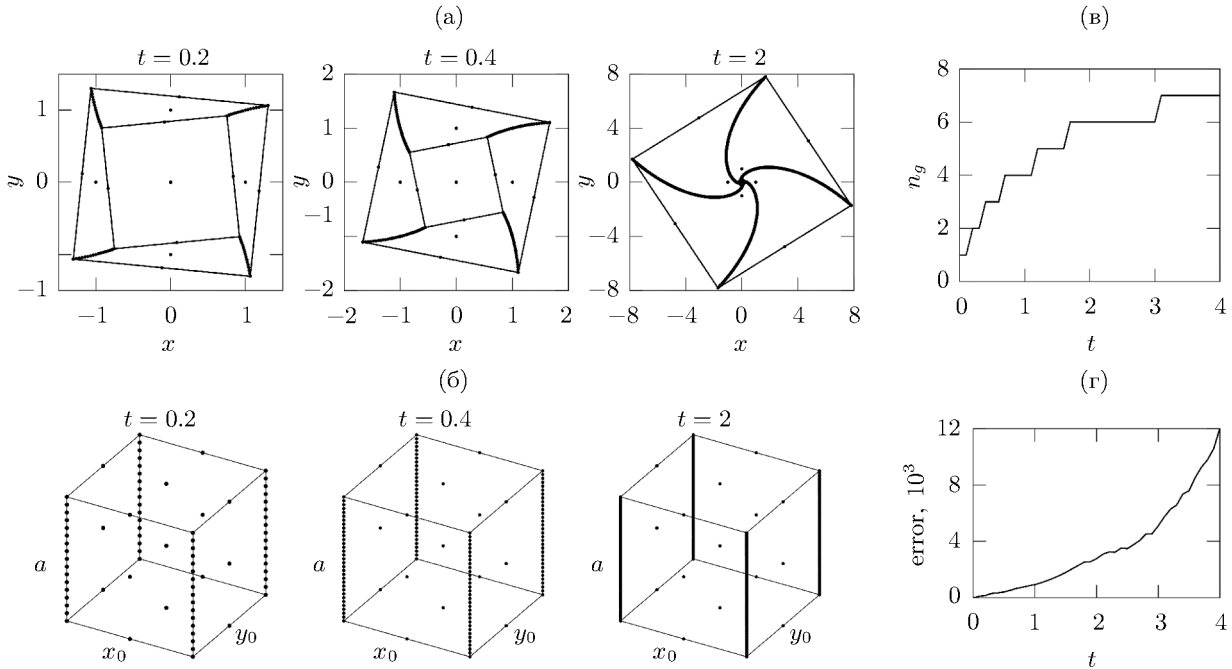


Рис. 4. Результаты решения системы (14): (а) – множество решений в различные моменты времени; (б) – узлы адаптивной разреженной сетки; (в) – зависимость уровня сетки от времени; (г) – зависимость глобальной погрешности от времени.

Введём в систему (14) ещё один интервальный параметр и получим вторую систему:

$$\begin{aligned}
 x' &= a(bx + \sqrt{1 - b^2}y), & y' &= a(-\sqrt{1 - b^2}x + by), & t &\in [0, 3], \\
 x(0) &= x_0 \in [-1, 1], & y(0) &= y_0 \in [-1, 1], & a &\in [0, 1], & b &\in [0, 1].
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Общее решение системы в (16) аналитически записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x(x_0, y_0, a, b, t) &= \exp(abt)(y_0 \sin(a\sqrt{1 - b^2}t) + x_0 \cos(a\sqrt{1 - b^2}t)), \\
 y(x_0, y_0, a, b, t) &= \exp(abt)(y_0 \cos(a\sqrt{1 - b^2}t) - x_0 \sin(a\sqrt{1 - b^2}t)).
 \end{aligned}$$

В отличие от предыдущего примера здесь старшие смешанные производные не равны нулю сразу по двум параметрам: a и b . Следовательно, уплотнение сетки будет происходить только на подмножествах, соответствующих этим параметрам:

$$\{-1\} \times \{-1\} \times a \times b, \quad \{-1\} \times \{1\} \times a \times b, \quad \{1\} \times \{-1\} \times a \times b, \quad \{1\} \times \{1\} \times a \times b.$$

Построение решения выполняется при $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$. На рис. 5, а показано множество решений системы (16) в различные моменты времени. Решение системы в каждый момент времени принадлежит пространству \mathbb{R}^4 , поэтому изображение на фазовой плоскости является лишь проекцией. На рис. 5, б показана адаптивная разреженная сетка, получающаяся в процессе интегрирования системы. Область неопределённости является четырёхмерным прямоугольным параллелепипедом, поэтому, по аналогии с рис. 5, а, здесь показана проекция.

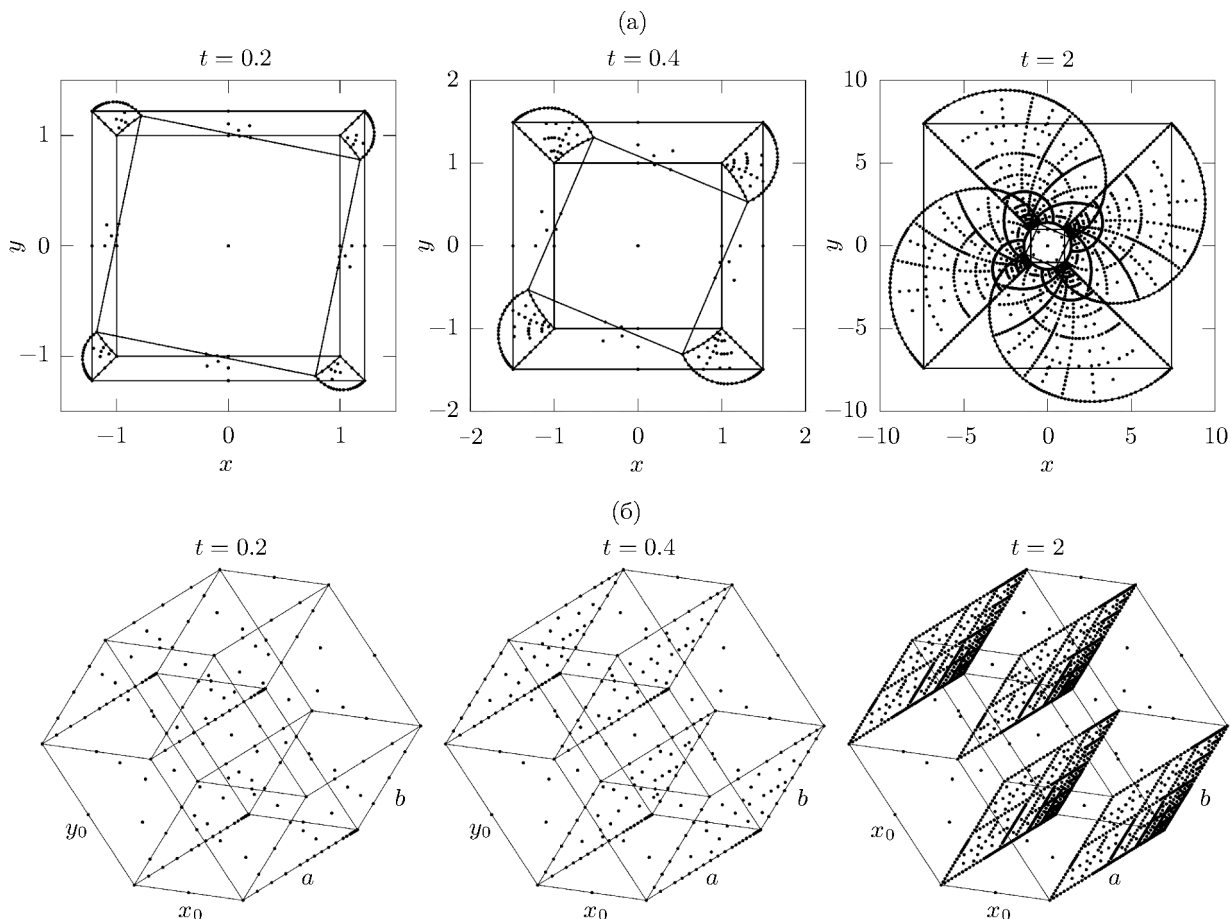


Рис. 5. Результаты решения системы (16): (а) – множество решений в различные моменты времени; (б) – узлы адаптивной разреженной сетки.

Выполним сравнение вычислительных затрат алгоритма адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток с классическим вариантом алгоритма. В работе [13] определён критерий I , который характеризует вычислительные затраты и численно равен числу решённых неинтервальных систем (2) при конкретных точечных значениях интервальных параметров. В таблице приведены значения погрешности и критерия I для рассмотренных выше трёх систем ОДУ. Сравнение результатов показывает, что алгоритм адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток для данных задач работает значительно быстрее, чем классический вариант алгоритма.

Таблица. Результаты работы классического алгоритма адаптивной интерполяции при $p = 3$ и алгоритма адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток

Система ОДУ	Классический алгоритм		Алгоритм на основе разреженных сеток	
	errог	I	errог	I
(13)	$9.89 \cdot 10^{-3}$	1 560	$7.71 \cdot 10^{-3}$	820
(14)	$1.62 \cdot 10^{-2}$	1 318	$1.2 \cdot 10^{-2}$	521
(16)	$1.3 \cdot 10^{-1}$	14 549	$9.45 \cdot 10^{-2}$	1 968

Заключение. В работе рассмотрены теоретические аспекты обобщения алгоритма адаптивной интерполяции на случай большого числа интервальных параметров с использованием разреженных сеток. В процессе работы алгоритма на каждом шаге выполняется построение

функции, которая интерполирует зависимость решения от точечных значений интервальных параметров. В классическом варианте алгоритма используются регулярные сетки, на основе которых строится интерполяционный полином в форме Лагранжа. При этом количество узлов в сетке зависит экспоненциально от числа интервальных параметров. В данной статье изучен вопрос замены регулярных сеток на разреженные сетки. В процессе работы алгоритма происходит адаптация сетки к решению, при этом новые узлы создаются с помощью интерполяции и важно понимать, как в результате будет вести себя глобальная погрешность. Получена оценка глобальной погрешности и показано, что она линейно зависит от текущего уровня сетки. Проведена апробация алгоритма адаптивной интерполяции на разреженных сетках на нескольких системах ОДУ, демонстрирующая эффективность рассматриваемого подхода. Полученные результаты согласуются с теоретическими оценками.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 075-15-2020-799).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мозохина А.С., Мухин С.И. Некоторые точные решения задачи о течении жидкости в сокращающемся эластичном сосуде // *Мат. моделирование*. 2019. Т. 31. № 3. С. 124–140.
2. Moore R. *Interval Analysis*. New Jersey, 1966.
3. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. *Introduction to Interval Analysis*. Philadelphia, 2009.
4. Шарый С.П. *Конечномерный интервальный анализ*. Новосибирск, 2019.
5. Eijgenraam P. *The Solution of Initial Value Problems Using Interval Arithmetic*. Math. Centre Tracts. № 144. Stichting Math. Centrum. Amsterdam, 1981.
6. Lohner R.J. Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems // *Comput. Arithmetic: Scientific Comput. and Program. Lang.* 1987. P. 255–286.
7. Черноусько Ф.Л. *Оценивание фазовых состояний динамических систем. Метод эллипсоидов*. М., 1988.
8. Makino K., Berz M. Models and their applications // *Numerical Software Verification 2017: conference*. Heidelberg, Germany, July 22–23, 2017. Springer International Publishing AG, 2017. P. 3–13.
9. Nataraj P.S.V., Sondur S. The extrapolated Taylor Model // *Reliable Computing*. July, 2011. P. 251–278.
10. Роголев А.Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // *Вычислит. технологии*. 2003. Т. 8. № 5. С. 102–116.
11. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. *Методы компьютерного моделирования динамических систем с интервальными параметрами*. М., 2019.
12. Sauer T., Xu Y. On multivariate Lagrange interpolation // *Math. of Comput.* 1995. V. 64. № 211. P. 1147–1170.
13. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными условиями // *Дифференц. уравнения*. 2018. Т. 54. № 7. С. 963–974.
14. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л., Гудаслов В.Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для решения задач химической кинетики с интервальными параметрами // *Мат. моделирование*. 2018. Т. 30. № 12. С. 129–144.
15. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. Modelling of dynamic systems with interval parameters on graphic processors // *Program. Ingeneria*. 2019. V. 10. № 2. P. 69–76.
16. Khoirudin, Shun-Liang J. Gpu application in cuda memory // *Adv. Comput.: An Int. J.* 2015. V. 6. № 2. P. 1–10.
17. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. Modeling of dynamic systems with interval parameters in the presence of singularities // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2020. V. 16. № 3. P. 479–490.
18. Морозов А.Ю., Журавлев А.А., Ревизников Д.Л. Анализ и оптимизация алгоритма адаптивной интерполяции численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами // *Дифференц. уравнения*. 2020. Т. 56. № 7. С. 960–974.
19. Morozov A.Yu., Zhuravlev A.A., Reviznikov D.L. Sparse grid adaptive interpolation in problems of modeling dynamic systems with interval parameters // *Mathematics*. 2021. V. 9. № 4. P. 298.
20. Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // *Докл. АН СССР*. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.

21. *Gerstner T., Griebel M.* Sparse grids // Encyclopedia of Quantitative Finance / Ed. R. Cont. New York, 2010.
22. *Garcke J.* Sparse grids in a nutshell. Sparse grids and applications // Lect. Not. in Comput. Sci. and Engin. V. 88. Berlin; Heidelberg, 2013. P. 57–80.
23. *Brumm J., Scheidegger S.* Using adaptive sparse grids to solve high-dimensional dynamic models // Econometrica. 2017. V. 85. № 5. P. 1575–1612.
24. *Bungartz H.-J., Griebel M.* Sparse grids // Acta Numerica. 2004. V. 13. № 1. P. 147–269.
25. *Judd K.L., Maliar L., Maliar S., Valero R.* Smolyak method for solving dynamic economic models: Lagrange interpolation, anisotropic grid and adaptive domain // J. of Economic Dyn. and Cont. 2014. V. 44. P. 92–123.
26. *Niesen J., Hall T.* On the Global Error of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations. Cambridge, 2004.
27. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 2012.

Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление”
Российской академии наук, г. Москва,
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 15.02.2021 г.
После доработки 15.02.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.