

УДК 519.63+517.958:532.5

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РЕЛАКСАЦИОННОЙ МОДЕЛИ БАЕРА–НУНЦИАТО С ПОМОЩЬЮ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА

© 2021 г. Р. Р. Тухватуллина, М. В. Алексеев, Е. Б. Савенков

Предлагается численный метод для решения задач двухфазной двухскоростной гидродинамики в рамках модели Баера–Нунциато с релаксацией. Уравнения модели решаются с помощью разрывного метода Галёркина с лимитером WENO-S, который применяется непосредственно к консервативным переменным модели. Релаксационные процессы моделируются с использованием неявного метода Рунге–Кутты второго порядка с адаптивным выбором шага интегрирования. Алгоритм включает в себя метод Ньютона для решения уравнений нелинейного метода Рунге–Кутты. Соответствующие матрицы Якоби вычисляются с применением численного дифференцирования. Приводятся результаты численных расчётов, демонстрирующих возможности предложенного алгоритма. Проводится сравнение результатов численных расчётов с аналитическим решением, а также с результатами, полученными другими авторами. Представлены результаты численных экспериментов с различными скоростями релаксации, в том числе рассмотрен случай “жёсткой” релаксации.

DOI: 10.31857/S0374064121070116

Введение. В настоящей работе рассматриваются вопросы численного решения двухфазной полностью неравновесной модели Баера–Нунциато (Б.–Н.) с релаксационными слагаемыми. Впервые данная модель была предложена в работе [1] для анализа процесса перехода дефлаграции в детонацию при моделировании динамики горения гранулированных взрывчатых веществ. В дальнейшем она применялась для решения широкого спектра задач и в настоящее время может рассматриваться как базовая модель для целого ряда обобщений [2–6].

Математическая формулировка модели приведена в п. 1 настоящей работы. Укажем здесь основные свойства системы уравнений Б.–Н., которые усложняют задачу построения вычислительных алгоритмов для её решения. Система уравнений Б.–Н. является гиперболической системой первого порядка и включает в себя уравнения как в дивергентной форме, так и в квазилинейной. Она не может быть записана в дивергентной форме. Система включает в себя релаксационные слагаемые, которые описывают процесс релаксации механических и термодинамических параметров фаз к равновесному значению. По крайней мере в ряде приложений характерные времена релаксации могут быть значительно меньше характерных времён протекания гидродинамических процессов. В этом смысле система уравнений Б.–Н. является “жёсткой”.

Вследствие сказанного численное решение уравнений Б.–Н. представляет собой сложную задачу, решению которой посвящено значительное число работ. Большая их часть направлена на преодоление указанных выше трудностей.

Из многочисленных методов решения системы уравнений Б.–Н. далее будем рассматривать только методы гоуновского типа. Основой методов этого класса является способ постановки и решения задачи Римана о распаде разрыва. Применительно к системе уравнений Б.–Н. основным вопросом является корректное определение обобщённого решения. Возникающая при этом трудность связана с тем, что, как сказано выше, эта система включает в себя уравнения как в дивергентной, так и в квазилинейной форме. Это делает классическое определение обобщённого решения неприменимым в рассматриваемом случае. Наиболее хорошо разработанным способом разрешения данной проблемы является теория, предложенная в фундаментальной работе [7]. Этот подход используется в настоящей работе.

Способам построения схем высокого порядка для модели Б.–Н. посвящено значительное число работ (см., например, [8–11]). Большинство из них основывается на применении методов

типа WENO. В настоящей работе применяется разрывный метод Галёркина/Рунге–Кутты (RK/DG, Runge–Kutta/Discontinuous Galerkin method [12]). Такой выбор обусловлен тем, что разрывный метод Галёркина допускает формальные обобщения на случай уравнений высокого порядка, к которым сводятся модели типа Б.–Н.

В рамках настоящей работы модель Б.–Н. рассматривается в качестве основы для дальнейших обобщений. В силу этого используются алгоритмы, наиболее полно отвечающие идее “physics-free”, т.е. минимально учитывающие особенности задачи, но, вместе с тем, пригодные для получения конечных результатов с приемлемой точностью. По этой причине в настоящей работе:

- используется максимально простой численный поток Русанова, гарантирующий устойчивость аппроксимаций;
- лимитирование решения осуществляется в терминах консервативных переменных, без перехода к характеристическим.

Для монотонизации решения используется лимитер WENO-S [13].

Одной из основных трудностей при решении задач с использованием модели Б.–Н. является учёт релаксационных процессов. Более общая модель Б.–Н. с жёсткой релаксацией даёт результаты в соответствии с менее общими равновесными моделями [3–5], причём при этом делается значительно меньше предположений относительно протекающих физических процессов в многофазной среде. В этой модели релаксация скоростей фаз и их термодинамических параметров учитывается в виде источниковых слагаемых, при наличии которых система уравнений может становиться жёсткой. С вычислительной точки зрения операция интегрирования таких систем является сложной, поскольку характерные времена релаксации могут быть значительно меньше, чем шаг интегрирования по времени в вычислительной схеме.

Разработка эффективных методов аппроксимаций уравнений Б.–Н. в настоящее время не вполне завершена. Основные усилия направлены здесь на разработку методов интегрирования жёстких систем уравнений специального вида и алгоритмов решения полной задачи с учётом релаксационных слагаемых, в частности, разработку соответствующих схем расщепления по физическим процессам. Работы в этой области сосредоточены в основном в направлении развития так называемых асимптотически корректных разностных схем (“asymptotic preserving schemes”) (см. [14, 15]), которые, в частности, имеют равномерную по малому времени релаксации скорость сходимости численных аппроксимаций.

Целью настоящей работы является реализация и демонстрация возможностей алгоритма, который основывается на таких сравнительно простых средствах численных методов как:

- разрывный метод Галёркина для построения пространственных аппроксимаций уравнений модели;
- лимитирование консервативных переменных с использованием геометрического лимитера WENO-S;
- теория Dal Maso–Le Floch–Murat для формулировки задачи Римана и, как следствие, численных потоков для неконсервативной “части” задачи;
- простейшее расщепление по физическим процессам для учёта жёстких релаксационных слагаемых;
- неявный метод Рунге–Кутты для интегрирования уравнений модели.

Эффективность предложенной методики иллюстрируется результатами численных экспериментов в одномерном случае.

Структура работы следующая. Математическая модель Б.–Н. и её особенности представлены в п. 1. Разрывный метод Галёркина для гиперболических уравнений с неконсервативными слагаемыми кратко описан в пп. 2.1. Алгоритм вычисления релаксационных слагаемых изложен в пп. 2.2. Схема лимитирования представлена в пп. 2.3. Результаты численных экспериментов приведены в п. 3.

1. Модель Баера–Нунциато с релаксацией. Модель Б.–Н. с релаксационными слагаемыми, описывающая двухфазное течение, может быть представлена в виде системы гиперболических уравнений [5]

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \mathbf{u}_I \cdot \nabla \alpha_k = \nu(P_k - P_k^-), \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = 0, \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla (\alpha_k P_k) - P_I \nabla \alpha_k = \mu (\mathbf{u}_{\bar{k}} - \mathbf{u}_k), \quad (1.1c)$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k E_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k (\rho_k E_k + P_k) \mathbf{u}_k) - P_I \mathbf{u}_I \nabla \alpha_k = \mu (\mathbf{u}_{\bar{k}} - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{u}_I + \nu (P_{\bar{k}} - P_k) P_I. \quad (1.1d)$$

Здесь α_k , ρ_k , \mathbf{u}_k , P_k , E_k – объёмная доля, плотность, поле скоростей, давление и полная энергия фазы $k = 1, 2$ соответственно; $\bar{k} = \{1, 2\} \setminus \{k\}$; ν , μ – релаксационные параметры. Для объёмных долей выполнено условие нормировки $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Полная энергия k -й фазы определяется равенством

$$E_k = \mathcal{U}_k + \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k / 2,$$

где \mathcal{U}_k – внутренняя энергия фазы.

Уравнения модели (1.1) включают в себя уравнение динамики для объёмной доли (1.1a), законы сохранения массы (1.1b), импульса (1.1c) и энергии (1.1d).

Величины \mathbf{u}_I и P_I являются так называемыми “интерфейсными” скоростью и давлением. Для замыкания модели необходимо указать их конкретную зависимость от переменных задачи. Она может быть определена целым рядом способов, причём выбор замыкающих соотношений непосредственно влияет на структуру волн и поведение фаз в модели (см. [1, 16–18]). В настоящей работе используется вариант, предложенный в основополагающей работе [1]:

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_1, \quad P_I = P_2,$$

где $k = 1$ соответствует менее плотной фазе (более сжимаемой), $k = 2$ – более плотной фазе (менее сжимаемой). Термодинамические свойства фаз определяются уравнениями состояния вида $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k(P_k, \rho_k)$. В данной работе они определены равенствами

$$\mathcal{U}_k = \frac{P_k + \gamma_k P_{\infty, k}}{(\gamma_k - 1) \rho_k},$$

где $P_{\infty, k}$ и γ_k – параметры.

Отметим, что система уравнений (1.1) содержит нелинейные члены вида $P_I \nabla \alpha_k$ и не может быть записана в консервативном виде. Эта особенность является типичной для целого ряда многофазных многоскоростных моделей (см. [19]).

2. Вычислительные алгоритмы. Рассматриваемый алгоритм численного решения системы уравнений (1.1) основан на следующих подходах: использовании расщепления по физическим процессам для расчёта релаксационных правых частей системы; применении разрывного метода Галёркина для решения однородной системы (1.1) и неявного метода Рунге–Кутты для интегрирования “жёстких” правых частей системы (1.1). Далее описаны основные компоненты полного алгоритма решения задачи.

2.1. Разрывный метод Галёркина. В данном пункте представлена схема разрывного метода Галёркина [11] для одномерного варианта неоднородной гиперболической системы уравнений (1.1), записанной в абстрактной форме

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(x, t)}{\partial t} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \mathcal{S}(\mathbf{Q}), \quad (2.1)$$

где $x \in \Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}$, $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(x, t) = (Q_1, \dots, Q_M)^T$ – решение уравнения (2.1), $M = 7$ – число компонент вектора \mathbf{Q} ,

$$\mathbf{B}(\mathbf{Q}) = \partial \mathcal{F}(\mathbf{Q}) / \partial \mathbf{Q} + \mathcal{A}(\mathbf{Q}). \quad (2.2)$$

Здесь \mathcal{A} – заданная матрица, зависящая от решения задачи и определяющая квазилинейную “часть” системы уравнений, \mathcal{F} – заданный вектор потоков, \mathbf{B} – матрица системы, записанной в квазилинейной форме, \mathcal{S} – плотность источников. Далее считается, что матрицы \mathcal{A} , \mathbf{B} и

вектор поток \mathcal{F} являются непрерывными и имеют требуемое количество производных как функции вектора переменных \mathbf{Q} . Обобщённое решение данной задачи для консервативных систем (в случае, когда $\mathcal{A}(\mathbf{Q}) = 0$) может быть определено в классе обобщённых функций. Для неконсервативных систем (т.е. в случае, когда $\mathcal{A}(\mathbf{Q}) \neq 0$) обобщённое решение не может быть определено так же, как в случае консервативных систем. Для решения этой проблемы в настоящей работе используется распространённый подход, основанный на применении теории DLM (Dal Maso–Le Floch–Murat [7]). В рамках этого подхода для корректного определения “неконсервативного произведения” вида $\mathcal{A}(\mathbf{Q})$ вводится липшицево отображение $\Psi : [0, 1] \times \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ (путь), которое “соединяет” левое значение решения в точке разрыва с правым:

$$\Psi(\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-; 0) = \mathbf{Q}^-, \quad \Psi(\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-; 1) = \mathbf{Q}^+, \quad \Psi(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}; s) = \mathbf{Q}.$$

Введём разбиение $\{\omega_i\}_{i=0}^{i=N}$ области Ω и обозначим ячейку сетки (конечный элемент)

$$\omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], \quad 1 \leq i \leq N.$$

Обозначим через $\mathcal{V}_h^k(\Omega)$ подпространство в $\mathcal{L}^1(\Omega)$, состоящее из тех элементов, сужения (ограничения) которых на ячейки ω_i принадлежат векторному пространству $\mathcal{P}^k(\omega_i)$ полиномов степени не выше k :

$$\mathcal{V}_h^k = \{v \in \mathcal{L}^1(\Omega) : v|_{\omega_i} \in \mathcal{P}^k(\omega_i); \quad 1 \leq i \leq N\}.$$

Представим решение $\mathbf{Q}(x, t)$ в ячейке ω_i конечномерной аппроксимацией $\mathbf{Q}_h \in \mathcal{V}_h^k$:

$$\mathbf{Q}_h(x, t)|_{\omega_i} = \sum_{l=0}^k \psi_i^{(l)}(x) \mathbf{Q}_i^{(l)}(t), \tag{2.3}$$

где $\psi_i^{(l)}$ – полином Лежандра степени l . Здесь и в дальнейшем индекс i обозначает принадлежность i -й ячейке. Чтобы получить полудискретную систему уравнений для $\mathbf{Q}_h(x, t)$, умножим уравнение (2.1) на пробную функцию $v_h \in \mathcal{V}_h^k$ и проинтегрируем получившееся тождество по отрезку ω_i :

$$\int_{\omega_i} \frac{\partial \mathbf{Q}_h(x, t)}{\partial t} v_h(x) dx + \left\langle \left[\mathcal{B}(\mathbf{Q}(\cdot, t)) \frac{\partial \mathbf{Q}(\cdot, t)}{\partial x} \right]_{\Psi}, v_h \right\rangle = \int_{\omega_i} \mathcal{S}(\mathbf{Q}_h) v_h(x) dx.$$

Неконсервативное произведение может быть определено в обобщённом смысле следующим образом [20]:

$$\begin{aligned} \left\langle \left[\mathcal{B}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \right]_{\Psi}, v_h \right\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\omega_i} \mathcal{B}(\mathbf{Q}(x, t)) \frac{\partial \mathbf{Q}(x, t)}{\partial x} v_h(x) dx + \\ &+ \sum_d \left(\int_0^1 \mathcal{B}(\Psi(\mathbf{Q}_d^+, \mathbf{Q}_d^-, s)) \frac{\partial \Psi}{\partial s}(\mathbf{Q}_d^+, \mathbf{Q}_d^-, s) ds \right) v_h(x_d), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где индекс d нумерует точки разрыва решения \mathbf{Q} , при этом \mathbf{Q}_d^+ и \mathbf{Q}_d^- – предельные значения решения соответственно справа и слева от разрыва в точке x_d в момент времени t . Заметим, что данное определение существенно зависит от выбранного пути Ψ . В случае, когда $\mathcal{A} = 0$ произведение (2.4) не зависит от выбранного пути и совпадает с классическим определением обобщённого произведения. Следствием определения (2.4) и системы (2.1) без релаксационных слагаемых является условие Гюгоньо, которому должно удовлетворять обобщённое решение в точках разрыва x_d :

$$\int_0^1 (\xi_d \mathcal{I} - \mathcal{B}(\Psi(\mathbf{Q}_d^-, \mathbf{Q}_d^+; s))) \frac{\partial \Psi}{\partial s}(\mathbf{Q}_d^-, \mathbf{Q}_d^+; s) ds = 0,$$

где ξ_d – скорость движения разрыва, \mathcal{I} – единичная матрица. С учётом равенства (2.2) получим

$$\begin{aligned} \left\langle \left[\mathcal{B}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \right]_{\Psi}, v_h \right\rangle &= \int_{\omega_i} \left(\mathcal{A}(\mathbf{Q}(x, t)) \frac{\partial \mathbf{Q}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} \right) v_h(x) dx + \\ &+ \sum_d \left(\mathcal{F}(\mathbf{Q}_d^+) - \mathcal{F}(\mathbf{Q}_d^-) + \left(\int_0^1 \mathcal{A}(\Psi(\mathbf{Q}_d^+, \mathbf{Q}_d^-, s)) \frac{\partial \Psi}{\partial s}(\mathbf{Q}_d^+, \mathbf{Q}_d^-, s) ds \right) \right) v_h(x_d). \end{aligned}$$

Постановка задачи Римана для соответствующей неконсервативной системы представлена в [20]. На основе сделанных выше построений могут быть выведены соответствующие схемы типа Годунова. В частности, численная схема для разрывного метода Галёркина может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \int_{\omega_i} \frac{\partial \mathbf{Q}_h}{\partial t} v_h(x) dx + \int_{\omega_i} \left(\mathcal{A}(\mathbf{Q}_h) \frac{\partial \mathbf{Q}_h}{\partial x} + \mathcal{F}(\mathbf{Q}_h) \right) v_h(x) dx + \\ + (v_h(x_{i+1/2})^- \mathbf{D}_{i+1/2}^- + v_h(x_{i+1/2})^+ \mathbf{D}_{i-1/2}^+) = \int_{\omega_i} \mathcal{S}(\mathbf{Q}_h) v_h(x) dx, \end{aligned}$$

где $\mathbf{D}_{i\pm 1/2}^\mp$ и $v_h(x_{i\pm 1/2})^\mp$ определены на границах соответствующих ячеек,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{i+1/2}^- &= \mathcal{F}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}) - \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{i+1/2}^-) + \int_0^1 \mathcal{A}(\Psi(\mathbf{Q}_{i+1/2}^-, \hat{\mathbf{Q}}_{i+1}; s)) \frac{\partial \Psi}{\partial s}(\mathbf{Q}_{i+1/2}^-, \hat{\mathbf{Q}}_{i+1}; s) ds, \\ \mathbf{D}_{i+1/2}^+ &= \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{i+1/2}^+) - \mathcal{F}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}) + \int_0^1 \mathcal{A}(\Psi(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}, \mathbf{Q}_{i+1/2}^+; s)) \frac{\partial \Psi}{\partial s}(\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}, \mathbf{Q}_{i+1/2}^+; s) ds, \end{aligned}$$

здесь $\hat{\mathbf{Q}}_{i+1}$ – решение задачи Римана на границе ячеек.

Пусть выбран линейный путь $\Psi(\mathbf{Q}^-, \mathbf{Q}^+; s) = \mathbf{Q}_d^- + s(\mathbf{Q}_d^+ - \mathbf{Q}_d^-)$ и в качестве численного потока используется поток Русанова. Тогда в точках разрыва $x_d = x_{i\pm 1/2}$ будем иметь

$$\mathbf{D}_d^\pm = \mathcal{F}(\mathbf{Q}_d^+) - \mathcal{F}(\mathbf{Q}_d^-) + A_d^\pm(\mathbf{Q}_d^+ - \mathbf{Q}_d^-), \quad A_d^\pm = \frac{1}{2} \int_0^1 (\mathcal{A}(\mathbf{Q}_d^- + s(\mathbf{Q}_d^+ - \mathbf{Q}_d^-)) \pm \mathcal{I}\Lambda) ds,$$

где $\Lambda = \lambda(s)$ – максимальные собственные значения матрицы $\mathcal{B}(\mathbf{Q}_d^- + s(\mathbf{Q}_d^+ - \mathbf{Q}_d^-))$. Отметим, что применение более простого потока Лакса–Фридрикса приводит, вообще говоря, к неустойчивой схеме (см. приложение 2).

Рассматривая произвольный полином $v_h(x) \in \text{span} \{\psi_i^{(l)}\}$, получаем следующую полудискретную систему уравнений относительно переменных $\{\mathbf{Q}_i^{(l)}\}$, определённых в представлении (2.3):

$$\mathbf{M} \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}_i}{dt} = \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{Q}}_i) + \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{Q}}_i). \tag{2.5}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{Q}}_i = (Q_{1,i}^{(0)}, \dots, Q_{M,i}^{(0)}, \dots, Q_{M,i}^{(k)})$ – вектор неизвестных. Его компоненты $Q_{m,i}^{(l)}$ в дальнейшем будем называть l -й гармоникой ($l = \overline{0, k}$) m -й компоненты вектора \mathbf{Q}_i . Матрица $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{M(k+1) \times M(k+1)}$ является матрицей Грама указанной системы базисных функций,

вектор $\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{Q}}_i)$ представляет собой аппроксимацию дифференциального оператора в левой части системы уравнений (2.1), а вектор $\mathbf{I}(\tilde{\mathbf{Q}}_i)$ – аппроксимацию правой части (2.1),

$$I_m^{(l)} = \int_{\omega_i} S_m(\mathbf{Q}_h) \psi_i^{(l)} dx. \tag{2.6}$$

Одна из наиболее простых стратегий решения системы (2.5) – расщепление по процессам первого порядка. Разобьём временной интервал на части точками $\{t^n\}$. Далее на каждом временном шаге $t \in [t^n, t^{n+1}]$ сначала решается задача Коши для системы ОДУ

$$\mathbf{M} \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}_i}{dt} = \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{Q}}_i), \quad t \in (t^n, t^{n+1}], \tag{2.7}$$

с начальными данными $\tilde{\mathbf{Q}}_i^0 = \tilde{\mathbf{Q}}_i(t^n)$ для определения “промежуточного” решения $\tilde{\mathbf{Q}}_{i,H} = \tilde{\mathbf{Q}}_i(t^{n+1})$. Затем решается задача Коши для системы ОДУ

$$\mathbf{M} \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}_i}{dt} = \mathbf{I}(\tilde{\mathbf{Q}}_i), \quad t \in (t^n, t^{n+1}], \tag{2.8}$$

с начальными данными $\tilde{\mathbf{Q}}_{i,H}$.

Для интегрирования по времени однородной системы (2.7) далее используется вариант метода Рунге–Кутты TVD/RK3 [12] с лимитированием консервативных переменных на каждом шаге метода. В настоящей работе используется лимитер WENO-S, описанный в п. 2.3. Для интегрирования по пространству применяется метод квадратур Гаусса–Лежандра.

Для интегрирования системы уравнений (2.8) используется неявный алгоритм Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага интегрирования, описанный в п. 2.2.

2.2. Алгоритм расчёта релаксационных слагаемых. Задача Коши для ОДУ (2.8) решается неявным методом Рунге–Кутты второго порядка на временном интервале $t \in (t^n, t^{n+1}]$. Разобьём временной интервал на части точками $(t_0^n, t_1^n, \dots, t_{M-1}^n)$, где $t_{j+1}^n = t_j^n + \tau_j$, $t_0^n = t_n$, $t_{M-1}^n = t_{n+1}$. Таким образом, $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ – шаг интегрирования газодинамической части задачи, а τ_j – шаг интегрирования релаксационной части. При этом шаг τ_j может быть переменным. Разностная схема решения задачи Коши для системы (2.8) имеет следующий вид:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_i^0 = \tilde{\mathbf{Q}}_i(t^n); \quad \tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1} = \tilde{\mathbf{Q}}_i^j + \frac{1}{2} \tau_k (\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1}) + \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{Q}}_i^j)), \quad j = 0, 1, \dots, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}$. Аппроксимации релаксационных членов \mathbf{I} , определённые в (2.6), рассчитываются численно методом квадратур Гаусса–Лежандра.

Нелинейная система уравнений (2.9) решается численно методом Ньютона:

$$\partial \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1}) / \partial \tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1} |_{\tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1,s}} \cdot (\tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1,s+1} - \tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1,s}) = -\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1,s}), \tag{2.10}$$

где индекс s обозначает номер итерации, $\tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1,0} = \tilde{\mathbf{Q}}_i^j$ соответствует $s = 0$. Функция \mathbf{F} имеет следующий вид:

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1}) = \tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1} - \tilde{\mathbf{Q}}_i^j - 0.5 \tau_j (\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1}) + \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{Q}}_i^j)).$$

Якобиан $\partial \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1}) / \partial \tilde{\mathbf{Q}}_i^{j+1}$ в (2.10) вычисляется с применением численного дифференцирования. Итерации метода Ньютона продолжают до тех пор, пока величина $r = \max_m |r_m|$ не станет меньше заданного значения. Здесь r_m определены равенством

$$r_m = \begin{cases} (\tilde{\mathbf{Q}}_{i,m}^{j+1,s+1} - \tilde{\mathbf{Q}}_{i,m}^{j+1,s}) / \tilde{\mathbf{Q}}_{i,m}^{j+1,s+1}, & \text{если } |\tilde{\mathbf{Q}}_{i,m}^{j+1,s+1}| > 1, \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{i,m}^{j+1,s+1} - \tilde{\mathbf{Q}}_{i,m}^{j+1,s} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В реализованном алгоритме предусмотрен автоматический выбор шага интегрирования. В начальный момент $\tau_0 = 0.2\Delta t$. В случае, если превышено максимальное число N_{\max} ньютоновских итераций (далее $N_{\max} = 20$) или если решение сходится к нефизичным результатам (отрицательное давление или объёмная доля и т.д.), то шаг интегрирования уменьшается. В случае, когда число итераций меньше минимального значения N_{\min} (далее $N_{\min} = 6$), шаг интегрирования увеличивается.

2.3. Лимитирование переменных. Применение лимитера WENO-S состоит из двух шагов [13].

1. Идентификация ячеек, в которых решение подлежит лимитированию. В данной работе используется TVB-идентификатор, основанный на функции minmod .

2. Применение лимитера WENO-S для реконструкции решения в отмеченных ячейках.

Идентификация ячеек, в которых решение подлежит лимитированию. Обозначим через $\bar{Q}_{m,i}$ усреднённое по объёму решение в ячейке ω_i , т.е.

$$\bar{Q}_{m,i} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\omega_i} \tilde{Q}_m dx. \tag{2.11}$$

Здесь, как и выше, индекс i обозначает пространственную ячейку, а индекс m обозначает компоненту вектора \bar{Q} , $m = \overline{1, M \cdot k}$.

Определим скачки численного решения в ячейках как $\tilde{Q}_{m,i}^+ = \tilde{Q}_{m,i+1/2}^- - \bar{Q}_{m,i}$, $\tilde{Q}_{m,i}^- = \bar{Q}_{m,i} - \tilde{Q}_{m,i-1/2}^+$. Рассмотрим в каждой ячейке функции

$$\begin{aligned} (\tilde{Q}_{m,i}^+)^{(\text{mod})} &= \text{minmod}(\tilde{Q}_{m,i}^+, \bar{Q}_{m,i+1} - \bar{Q}_{m,i}, \bar{Q}_{m,i} - \bar{Q}_{m,i-1}), \\ (\tilde{Q}_{m,i}^-)^{(\text{mod})} &= \text{minmod}(\tilde{Q}_{m,i}^-, \bar{Q}_{m,i+1} - \bar{Q}_{m,i}, \bar{Q}_{m,i} - \bar{Q}_{m,i-1}), \end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$\text{minmod}(a_1, \dots, a_N) = \begin{cases} s \min(a_1, \dots, a_N), & \text{если } s = \text{sign}(a_k), \quad k = \overline{1, N}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Решение в ячейке ω_i подлежит лимитированию, если в (2.12) $(\tilde{Q}_{m,i}^\pm)^{(\text{mod})} \neq (\tilde{Q}_{m,i}^\pm)$, т.е. какая-либо из функций в (2.12) возвращает не первый аргумент.

Применение лимитера WENO-S состоит из следующих шагов.

1. Обозначим полиномы в ячейках ω_j , $j = i - 1, i, i + 1$, через $p_{-1}(x)$, $p_0(x)$ и $p_1(x)$ соответственно и модифицируем решения в соседних ячейках следующим образом:

$$p_{-1}^{\text{mod}}(x) = p_{-1} - \bar{p}_{-1} + \bar{p}_0, \quad p_1^{\text{mod}}(x) = p_1 - \bar{p}_1 + \bar{p}_0,$$

где \bar{p} – усреднённое по объёму решение, представленное равенством (2.11).

2. Индикаторы гладкости β_i рассчитываем по формуле

$$\beta_i = \sum_{l=1}^k \int_{\omega_j} \Delta x_j^{2l-1} \left(\frac{\partial^l}{\partial x^l} p_j(x) \right)^2 dx,$$

где k – степень полинома $p_j(x)$.

3. Весы κ_j рассчитываем по формуле

$$\kappa_j = \bar{\kappa}_j / \sum_{n=-1,0,+1} \bar{\kappa}_n, \quad \bar{\kappa}_n = \frac{\gamma_n}{(\varepsilon + \beta_n)^r}, \quad n = -1, 0 + 1.$$

Здесь γ_n – линейный вес, $\varepsilon = 10^{-6}$ и $r = 2$. Линейные веса должны удовлетворять следующим требованиям: $\gamma_0 \gg \gamma_{\pm 1}$, $\gamma_{-1} + \gamma_0 + \gamma_{+1} = 1$. В настоящей работе $\gamma_0 = 0.998$, $\gamma_{\pm 1} = 0.001$.

4. Реконструкция решения в центральной ячейке ω_0 проводится по формуле

$$p_0^{\text{new}}(x) = \kappa_{-1} p_{-1}^{\text{mod}}(x) + \kappa_0 p_0(x) + \kappa_1 p_1^{\text{mod}}(x).$$

Применение лимитера в одномерном случае может быть записано в операторном виде $p_0^{\text{new}} = \Lambda_\alpha p_0$ для направления \mathcal{O}_{x_α} . Для многомерного случая и декартовых сеток $p_0^{\text{new}} = \Lambda p_0$, где $\Lambda = \Lambda_z \Lambda_y \Lambda_x$.

Общая схема решения однородной гиперболической системы с применением описанного выше лимитера имеет приведённый ниже вид.

Для интегрирования по времени системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.7) используется TVD/RK3 метод Рунге–Кутты, представленный ниже. На k -й стадии метода Рунге–Кутты используется способ лимитирования переменных, описанный выше:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i^1 &= \tilde{Q}_i^n + \Delta t \mathbf{P}(\tilde{Q}_i^n), & \overline{\tilde{Q}_i^1} &= \tilde{\Lambda} \tilde{Q}_i^1, \\ \tilde{Q}_i^2 &= \frac{3}{4} \tilde{Q}_i^n + \frac{1}{4} \tilde{Q}_i^1 + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{P}(\overline{\tilde{Q}_i^1}), & \overline{\tilde{Q}_i^2} &= \tilde{\Lambda} \tilde{Q}_i^2, \\ \tilde{Q}_i^{n+1} &= \frac{1}{3} \tilde{Q}_i^n + \frac{2}{3} \tilde{Q}_i^2 + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{P}(\overline{\tilde{Q}_i^2}), & \overline{\tilde{Q}_i^{n+1}} &= \tilde{\Lambda} \tilde{Q}_i^{n+1}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{H}$ (см. (2.5)).

3. Вычислительные эксперименты. В настоящем пункте рассмотрен ряд тестовых расчётов, которые демонстрируют возможности предложенного алгоритма. В тесте 1 проводится тестирование численного алгоритма решения системы ОДУ (2.8). Приводится сравнение с численными результатами, полученными другими авторами [21], а также с аналитическим решением (см. приложение 1). В тесте 2 численно исследуется метод для решения полной задачи (1.1). Рассматриваются численные расчёты задачи Римана с различными коэффициентами релаксации. Приводится сравнение с численными результатами, полученными конечно-объёмной схемой первого порядка с численным потоком HLLEM (соответствующие решения далее называются “решения HLLEM”). Все расчёты предложенным методом приведены для разрывного метода Галёркина с линейным восполнением решения в ячейках сетки, что соответствует $k = 1$ в аппроксимации (2.3).

Результаты расчётов представлены для примитивных переменных (фазовые давления и скорости).

Тест 1. Рассматривается задача Коши для уравнения (2.8).

Начальные условия имеют следующие вид: для нулевых гармоник

$$u_1 = -5, \quad u_2 = 5, \quad P_1 = 0.1, \quad P_2 = 20, \quad \alpha_1 = 0.9, \quad \rho_1 = 1.1111, \quad \rho_2 = 40,$$

для первых гармоник

$$\tilde{Q}_{2,3,6,7}^{(1)} = 0.01 \cdot \tilde{Q}_{2,3,6,7}^{(0)}, \quad \tilde{Q}_{1,4,5,8,9}^{(1)} = 0.$$

Параметры уравнения состояния: $\gamma_1 = 6$, $\pi_1 = 0$ Па, $\gamma_2 = 1.4$, $\pi_2 = 0$ Па. Значения параметров релаксации $\mu = 10^9$ кг/(м·с) и $\nu = 10$ Па⁻¹·с⁻¹. На рис. 1, а и рис. 1, б представлены результаты расчётов для нулевой и первой гармоник фазовых давлений соответственно с $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ с. При расчёте с шагом $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ с скорости фаз сразу выходят на стационарное значение 3 м/с (эти результаты не показаны на рис. 1). На рис. 1, в и рис. 1, г представлены результаты расчётов для нулевой и первой гармоник фазовых скоростей соответственно с $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-9}$ с. Видим, что численный расчёт хорошо согласуется с результатами, полученными в [21] для нулевых гармоник (фазовые скорости и давления), а также хорошо согласуется с аналитическим решением для первых гармоник (фазовые скорости). Аналитическое решение для первых гармоник фазовых давлений в данной работе получено не было и сравнение с ним не приводится. Также видно, что нулевые и первые гармоники для фазовых давлений и скоростей релаксируют на одних и тех же временах. Резкое изменение давления (см. рис. 1, а и

рис. 1, б) в начальный момент времени связано с релаксацией скоростей, которая происходит на временах порядка 10 нс.

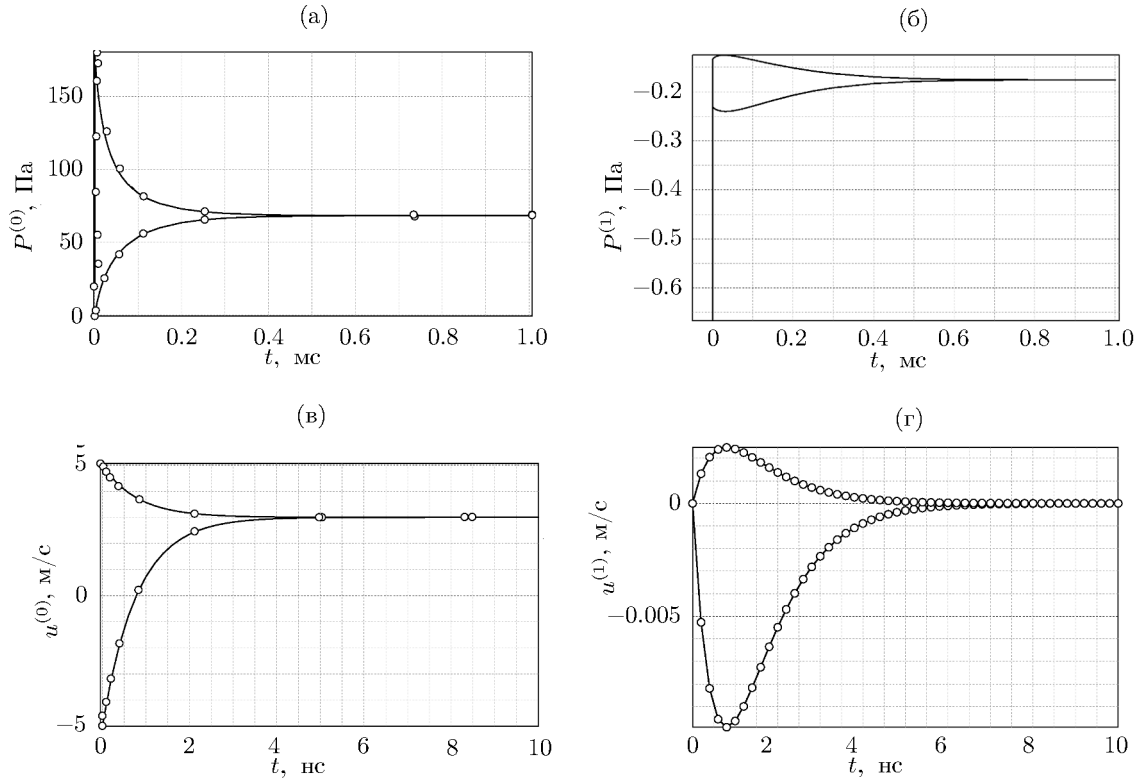


Рис. 1. Тест 1. Сплошные кривые – результаты численного расчёта, символы на (а) и (в) – результаты численного расчёта в [21], символы на (г) – аналитическое решение.

Тест 2. В данном тесте рассматривается задача Римана о распаде разрыва системы уравнений (1.1). В начальный момент времени разрыв находится в точке $x_0 = 0.6$ м. Длина расчётной области 1 м. Слева от разрыва $P_1 = P_2 = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.2$, $u_1 = u_2 = 0$, $\alpha_1 = 0.55$, справа от разрыва $P_1 = P_2 = 0.1$, $\rho_1 = 0.125$, $\rho_2 = 2$, $u_1 = u_2 = 0$, $\alpha_1 = 0.45$. Параметры уравнения состояния

$$\gamma_1 = 2, \quad \pi_1 = 2 \text{ Па}, \quad \gamma_2 = 1.4, \quad \pi_2 = 0 \text{ Па}.$$

Число узлов сетки и шаг по времени задавались как $N = 500$ и $\Delta t = 10^{-6}$ с. Значение параметра релаксации $\mu = 10^6 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$, что соответствует времени релаксации меньшему, чем газодинамический шаг интегрирования по времени. Значения параметра релаксации $\nu = 1, 10$ и $100 \text{ Па}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ (рис. 2–4). На графиках показаны только нулевые гармоники. Видим, что результаты численных расчётов хорошо согласуются с результатам HLLEM для всех коэффициентов релаксации (см. рис. 2–4), а также что величина времени релаксации принципиально меняет структуру разрывов. Небольшая немонотонность результатов, представленных на рис. 4, по-видимому, связана с численным расчётом матрицы Якоби в методе Ньютона, а именно, с выбором шага численного дифференцирования.

Результаты расчётов при помощи конечно-объёмной схемы с потоком HLLEM получены на сетке с $N = 10\,000$ шагами. Все остальные параметры не менялись.

Представленные результаты демонстрируют, что предложенный алгоритм обеспечивает устойчивый расчёт решения задачи при достаточно широком диапазоне изменения параметров релаксации, в том числе при жёсткой релаксации, и позволяет добиться сходного качества разрешения фронтов по сравнению с конечно-объёмной схемой первого порядка с потоками HLLEM при условии одновременного использования: (а) значительно более грубых сеток; (б) наиболее простых численных потоков типа Русанова; (в) лимитирования консервативных переменных.

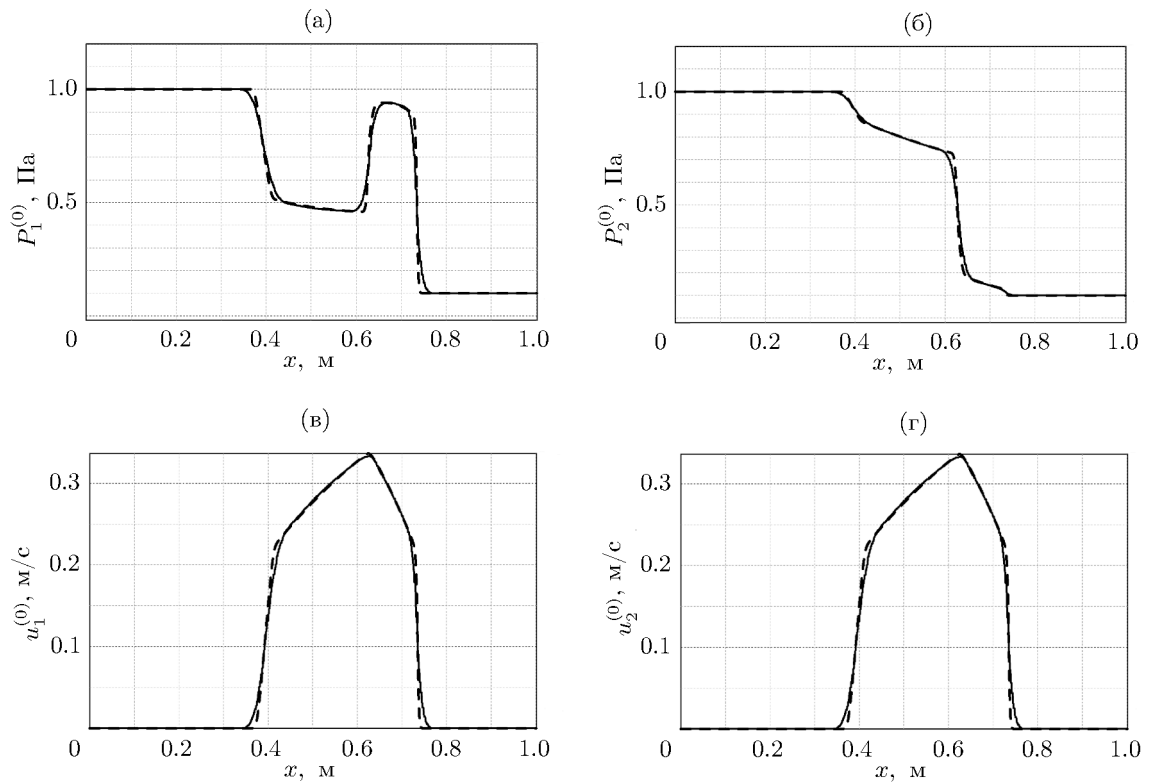


Рис. 2. Тест 2. Коэффициенты релаксации $\mu = 10^6$ кг/(м · с) и $\nu = 1$ Па⁻¹ · с⁻¹. Сплошные линии – результаты численного расчёта ($N = 500$), штриховые линии – результаты численного расчёта HLEM ($N = 10000$).

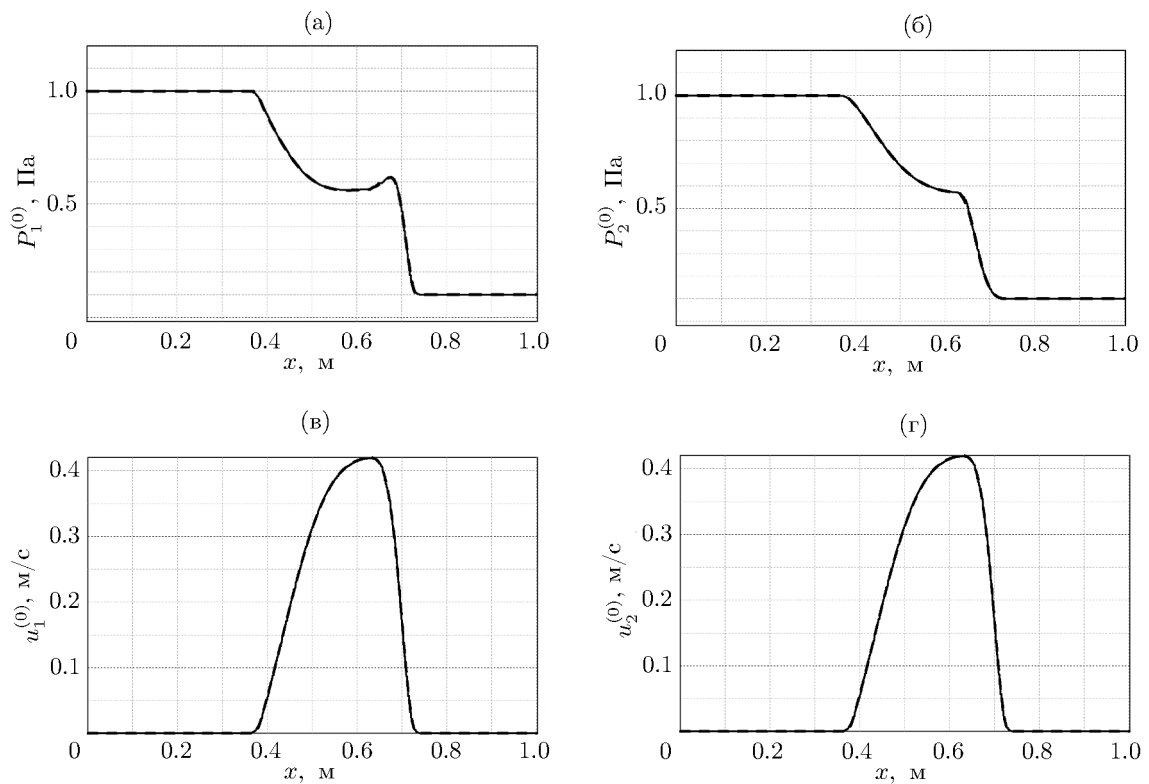


Рис. 3. Тест 2. Коэффициенты релаксации $\mu = 10^6$ кг/(м · с) и $\nu = 10$ Па⁻¹ · с⁻¹. Сплошные линии – результаты численного расчёта ($N = 500$), штриховые линии – результаты численного расчёта HLEM ($N = 10000$).

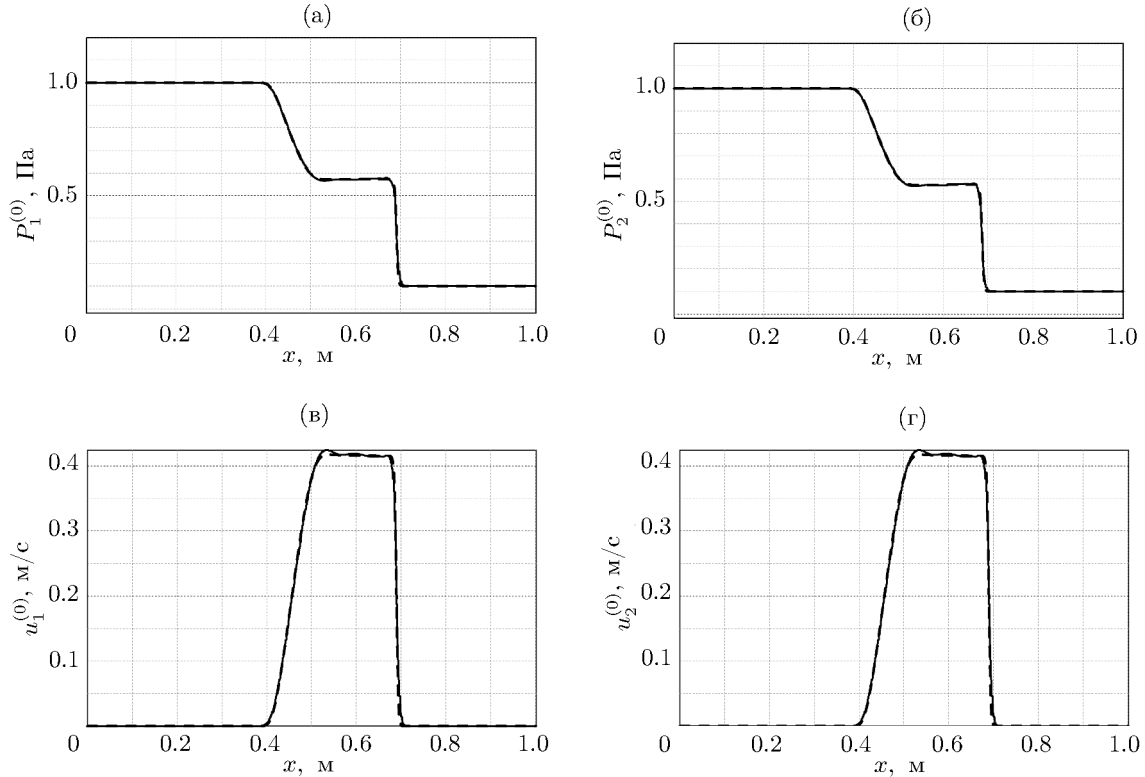


Рис. 4. Тест 2. Коэффициенты релаксации $\mu = 10^6$ кг/(м · с) и $\nu = 100$ Па⁻¹ · с⁻¹. Сплошные линии – результаты численного расчёта ($N = 500$), штриховые линии – результаты численного расчёта HLLEM ($N = 10\,000$).

Заключение. В работе представлен подход к численному решению многофазной полностью неравновесной модели Баера–Нунциато с релаксационными слагаемыми в одномерном случае. В качестве численной схемы используется разрывный метод Галёркина с применением численного потока Русанова. Для монотонизации решения используется лимитер WENO-S, применяемый непосредственно к консервативным переменным модели. Учёт релаксационных слагаемых в численной схеме проводится неявным методом Рунге–Кутты второго порядка с адаптивным выбором шага интегрирования. Соответствующая нелинейная система уравнений решается методом Ньютона. Представленный комплексный подход применяется к одномерным тестовым задачам. Результаты соответствуют полученным ранее для численных схем с потоком HLLEM. В работе показано, что использование разрывного метода Галёркина позволяет добиться сходного разрешения волновых фронтов при значительно меньшем числе расчётных ячеек, чем в методах с использованием большей информации об исходной системе уравнений.

4. Приложения.

Приложение 1. Для уравнения релаксации скоростей (см. систему ОДУ (2.8)) можно выписать точное аналитическое решение задачи, которое имеет вид

$$W(t) = \exp(At)W(t_0), \quad t > t_0; \quad \tilde{Q}_{2,3}^{(l)}(t) = \tilde{Q}_{2,3}^{(l)}(t_0), \quad t = t_0,$$

где $l = 0, 1$, а вектор W и матрица A имеют следующий вид:

$$W = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_4^{(0)} \\ \tilde{Q}_4^{(1)} \\ \tilde{Q}_7^{(0)} \\ \tilde{Q}_7^{(1)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & -b_{14} \end{pmatrix}.$$

Согласно (1.1) имеем $\tilde{Q}_2^{(0,1)} = (\alpha_1 \rho_1)^{(0,1)}$, $\tilde{Q}_3^{(0,1)} = (\alpha_2 \rho_2)^{(0,1)}$, $\tilde{Q}_4^{(0,1)} = (\alpha_1 \rho_1 u_1)^{(0,1)}$, $\tilde{Q}_7^{(0,1)} = (\alpha_2 \rho_2 u_2)^{(0,1)}$, где $u_{1,2}$ – скорость 1-й или 2-й фазы. Постоянные коэффициенты a_{ij} и b_{ij} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{\tilde{Q}_2^{(1)}} \log \left(\frac{\tilde{Q}_2^{(0)} - \tilde{Q}_2^{(1)}}{\tilde{Q}_2^{(0)} + \tilde{Q}_2^{(1)}} \right), & a_{12} &= -\frac{\mu}{\tilde{Q}_2^{(1)}} + \frac{1}{2} \frac{\mu \tilde{Q}_2^{(0)}}{(\tilde{Q}_2^{(1)})^2} \log \left(\frac{\tilde{Q}_2^{(0)} + \tilde{Q}_2^{(1)}}{\tilde{Q}_2^{(0)} - \tilde{Q}_2^{(1)}} \right), \\
 a_{13} &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{\tilde{Q}_3^{(1)}} \log \left(\frac{\tilde{Q}_3^{(0)} + \tilde{Q}_3^{(1)}}{\tilde{Q}_3^{(0)} - \tilde{Q}_3^{(1)}} \right), & a_{14} &= \frac{\mu}{\tilde{Q}_3^{(1)}} + \frac{1}{2} \frac{\mu \tilde{Q}_3^{(0)}}{(\tilde{Q}_3^{(1)})^2} \log \left(\frac{\tilde{Q}_3^{(0)} - \tilde{Q}_3^{(1)}}{\tilde{Q}_3^{(0)} + \tilde{Q}_3^{(1)}} \right), \\
 b_{11} &= -3 \frac{\mu}{\tilde{Q}_2^{(1)}} + \frac{3}{2} \frac{\mu \tilde{Q}_2^{(0)}}{(\tilde{Q}_2^{(1)})^2} \log \left(\frac{\tilde{Q}_2^{(0)} + \tilde{Q}_2^{(1)}}{\tilde{Q}_2^{(0)} - \tilde{Q}_2^{(1)}} \right), & b_{12} &= 3 \frac{\mu \tilde{Q}_2^{(0)}}{(\tilde{Q}_2^{(1)})^2} + \frac{3}{2} \frac{\mu (\tilde{Q}_2^{(0)})^2}{(\tilde{Q}_2^{(1)})^3} \log \left(\frac{\tilde{Q}_2^{(0)} - \tilde{Q}_2^{(1)}}{\tilde{Q}_2^{(1)} + \tilde{Q}_2^{(0)}} \right), \\
 b_{13} &= \frac{3\mu}{\tilde{Q}_3^{(1)}} + \frac{3}{2} \frac{\mu \tilde{Q}_3^{(0)}}{(\tilde{Q}_3^{(1)})^2} \log \left(\frac{\tilde{Q}_3^{(0)} - \tilde{Q}_3^{(1)}}{\tilde{Q}_3^{(1)} + \tilde{Q}_3^{(0)}} \right), \\
 b_{14} &= -3 \frac{\mu \tilde{Q}_3^{(0)}}{(\tilde{Q}_3^{(1)})^2} - 4 \frac{\mu (\tilde{Q}_3^{(0)})^2}{(\tilde{Q}_3^{(1)})^3} \log \left(\frac{\tilde{Q}_3^{(0)} - \tilde{Q}_3^{(1)}}{\tilde{Q}_3^{(0)} + \tilde{Q}_3^{(1)}} \right).
 \end{aligned}$$

Приложение 2. В настоящем приложении показывается, что простейший поток Лакса–Фридрикса при его применении в рамках разрывного метода Галёркина с интегрированием по времени методом TVD/RK3 приводит к неустойчивой схеме.

Утверждение. Для линейного одномерного уравнения переноса

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f(q)}{\partial x} = 0; \quad f(q) = aq, \quad a = \text{const}, \tag{4.1}$$

с начальными условиями в виде кусочно-линейных функций

$$q_h(x, 0)|_{\omega_i} = Q_0 - \frac{2Q_1 x_i}{h} + \frac{2Q_1}{h} x, \quad Q_{0,1} = \text{const}, \tag{4.2}$$

заданными на каждом конечном элементе $\omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, дискретное решение, полученное с использованием разрывного метода Галёркина с линейным восполнением решения в ячейках, интегрированием по времени с помощью схемы TVD/RK3, описанной в п. 2.3, и численного потока Лакса–Фридрикса вида

$$\hat{f}(q_l, q_r) = \frac{1}{2} [f(q_l) + f(q_r)] - \frac{h}{2\Delta t} (q_r - q_l), \tag{4.3}$$

удовлетворяет неравенству

$$|q_h^{n+1}| > |q_h^n|.$$

Доказательство. Считаем, что все ячейки сетки (конечные элементы) $\omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ имеют одинаковую длину h . Каждая из них может быть отображена на канонический конечный элемент $\tilde{\omega}_i = [-1, +1]$. В канонических координатах базисные функции разрывного метода Галёркина имеют вид $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = \xi$, а начальные условия – вид $q_h|_{\tilde{\omega}_i} = Q_0 + Q_1 \xi$.

В соответствии с п. 2.1 сначала получим полудискретное уравнение. Для этого умножим уравнение (4.1) на $\psi \in \text{span}(\psi_0, \psi_1)$ и проинтегрируем результат по $\tilde{\omega}_i$. Тогда получим

$$\frac{h}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial q}{\partial t} \psi(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 \frac{\partial f(q)}{\partial \xi} \psi(\xi) d\xi = 0. \tag{4.4}$$

Полудискретное решение задачи в каждой ячейке сетки (конечном элементе) можно представить в виде

$$q_i := q_h(\xi, t)|_{\tilde{\omega}_i} = s_0^i(t) + s_1^i(t)\xi,$$

где $s_{0,1}^i = s_{0,1}^i(t)$ – гармоники решения в ячейке $\tilde{\omega}_i$.

Введём следующие обозначения:

$$q_i^- = q_h(-1, t)|_{\tilde{\omega}_i} = s_0^i - s_1^i, \quad q_i^+ = q_h(1, t)|_{\tilde{\omega}_i} = s_0^i + s_1^i.$$

После стандартных преобразований уравнения (4.4) получим

$$\frac{h}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial q_i}{\partial t} \psi(\xi) d\xi - \int_{-1}^1 f(q_i) \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} d\xi + [\hat{f}(q_i)\psi|_{\xi=1} - \hat{f}(q_i)\psi|_{\xi=-1}] = 0,$$

где \hat{f} – численный поток. Отсюда получаем следующие уравнения для определения гармоник решения в ячейке ω_i :

$$\frac{h}{2} \int_{-1}^1 \frac{d}{dt} (s_0^i(t) + s_1^i(t)\xi) d\xi + [\hat{f}(q_{i+1/2}) - \hat{f}(q_{i-1/2})] = 0,$$

$$\frac{h}{2} \int_{-1}^1 \frac{d}{dt} (s_0^i(t) + s_1^i(t)\xi)\xi d\xi + [\hat{f}(q_{i+1/2}) + \hat{f}(q_{i-1/2})] - \int_{-1}^1 f(q_i) d\xi = 0.$$

Тогда с учётом ортогональности полиномов ψ_0 и ψ_1 будем иметь

$$\frac{ds_0}{dt} = -\frac{1}{h}(\hat{f}(q_{i+1/2}) - \hat{f}(q_{i-1/2})),$$

$$\frac{ds_1}{dt} = -\frac{3}{h} \left(\hat{f}(q_{i+1/2}) + \hat{f}(q_{i-1/2}) - \int_{-1}^1 f(q_i) d\xi \right).$$

При использовании численного потока Лакса–Фридрихса (4.3) получаем

$$\hat{f}(q_{i+1/2}) = \frac{1}{2}[f(q_{i+1}^-) + f(q_i^+)] - \frac{h}{2\Delta t}(q_{i+1}^- - q_i^+) = \frac{a}{2}(q_{i+1}^- + q_i^+) - \frac{h}{2\Delta t}(q_{i+1}^- - q_i^+),$$

$$\hat{f}(q_{i-1/2}) = \frac{1}{2}[f(q_i^-) + f(q_{i-1}^+)] - \frac{h}{2\Delta t}(q_i^- - q_{i-1}^+) = \frac{a}{2}(q_i^- + q_{i-1}^+) - \frac{h}{2\Delta t}(q_i^- - q_{i-1}^+),$$

или, вводя число Куранта $\lambda = a\Delta t/h$,

$$\hat{f}(q_{i+1/2}) = \frac{h}{2\Delta t}[(\lambda - 1)q_{i+1}^- + (1 + \lambda)q_i^+], \quad \hat{f}(q_{i-1/2}) = \frac{h}{2\Delta t}[(\lambda - 1)q_i^- + (1 + \lambda)q_{i-1}^+].$$

Помимо этого в частном случае линейного уравнения переноса верно равенство

$$\int_{-1}^1 f(q_i) d\xi = a \int_{-1}^1 (s_0^i + s_1^i\xi) d\xi = 2as_0^i = \frac{2\lambda hs_0^i}{\Delta t}.$$

В результате система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения гармоник решения в конечном элементе ω_i примет вид

$$\frac{ds_0^i}{dt} = \frac{1}{\Delta t}(-s_0^i - \lambda s_1^i) + \frac{1}{2\Delta t}[(1 + \lambda)q_{i-1}^+ + (1 - \lambda)q_{i+1}^-],$$

$$\frac{ds_1^i}{dt} = \frac{3}{\Delta t}(\lambda s_0^i - s_1^i) + \frac{3}{2\Delta t}[(1 - \lambda)q_{i+1}^- - (1 + \lambda)q_{i-1}^+].$$

Подставляя в последние уравнения выражения для численных потоков q_{i-1}^+ и q_{i+1}^- , получаем

$$\frac{ds_0^i}{dt} = \frac{1}{\Delta t}(-s_0^i - \lambda s_1^i) + \frac{1}{2\Delta t}[(1 + \lambda)(s_0^{i-1} + s_1^{i-1}) + (1 - \lambda)(s_0^{i+1} - s_1^{i+1})],$$

$$\frac{ds_1^i}{dt} = \frac{3}{\Delta t}(\lambda s_0^i - s_1^i) + \frac{3}{2\Delta t}[(1 - \lambda)(s_0^{i+1} - s_1^{i+1}) - (1 + \lambda)(s_0^{i-1} + s_1^{i-1})],$$

или

$$\frac{ds_0^i}{dt} = G_0(q_h), \quad \frac{ds_1^i}{dt} = G_1(q_h).$$

Учитывая начальные условия (4.2), находим, что

$$G_0(q_h) = 0, \quad G_1(q_h) = -\frac{6Q_1}{\Delta t}.$$

Непосредственной проверкой несложно убедиться в том, что для данной системы ОДУ применение аппроксимаций по времени вида TVD/RK3 приводит к следующим соотношениям:

$$s_1^{i,(1)} = Q_1 - 6Q_1 = -5Q_1,$$

$$s_1^{i,(2)} = \frac{3}{4}Q_1 + \frac{1}{4}(-5Q_1) + \frac{1}{4}(-6)(-5Q_1) = 7Q_1,$$

$$s_1^{i,new} = \frac{1}{3}Q_1 + \frac{2}{3}(7Q_1) + \frac{2}{3} - 6(7Q_1) = -23Q_1.$$

Поэтому значения решения на временном шаге $n + 1$ имеют вид

$$(s_0^i)^{n+1} = Q_0 \quad (s_1^i)^{n+1} = (-23)^n Q_1.$$

Таким образом, $|q_h^{n+1}| > |q_h^n|$, что доказывает утверждение.

Обратим внимание, что в рассмотренном выше случае алгоритм корректно пересчитывает нулевые гармоники дискретного решения в ячейках (которые соответствуют среднему значению решения в ячейках). При этом первые гармоники решения неограниченно возрастают, как только в начальном условии существуют соответствующие сколь угодно малые, но конечные возмущения. Одновременно с этим применение потока Лакса–Фридрихса для метода конечных объёмов первого порядка даёт устойчивое корректное решение.

Описанные теоретические построения подтверждаются результатами расчётов авторов (см. также работу [22]).

Исследование Р.Р. Тухватуллиной (введение, пп. 2.2, п. 3, приложение 1) выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-71-30004). Исследование М.В. Алексеева и Е.Б. Савенкова (введение, п. 1, пп. 2.1, 2.3, приложение 2) выполнено при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1623).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baer M., Nunziato J.* A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // *Int. J. Multiph. Flow.* 1986. № 12. P. 861–889.
2. *Drew D., Passman S.* Theory of Multicomponent Fluids. Springer, 2014.
3. *Favrie N., Gavriljuk S., Saurel R.* Solid-fluid diffuse interface model in cases of extreme deformations // *J. Comput. Phys.* 2009. V. 228. № 16. P. 6037–6077.
4. *Kapila A., Son S., Bdzil J., Menikoff R.* Two-phase modeling of DDT: structure of the velocity-relaxation zone // *Phys. Fluids.* 1997. V. 9. № 12. P. 3885–3897.
5. *Kapila A., Menikoff R., Bdzil J., Son S., Stewart S.* Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: Reduced equations // *Phys. Fluids.* 2001. V. 13. № 10. P. 3002–3024.

6. *Murrone A., Guillard H.* A five-equation reduced model for compressible two phase flow problems // J. Comput. Phys. 2005. V. 202. № 2. P. 664–698.
7. *Dal Maso G., Le Floch P., Murat F.* Definition and weak stability of nonconservative products // J. Math. Pures Appl. 1995. V. 74. № 6. P. 483–548.
8. *Tokareva S., Toro E.* HLLC-type Riemann solver for the Baer–Nunziato equations of compressible two-phase flow // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. № 10. P. 3573–3604.
9. *Dumbser M., Toro E.* A simple extension of the Osher Riemann solver to non-conservative hyperbolic systems // J. Sci. Comput. 2011. V. 48. P. 70–88.
10. *Franquet E., Perrier V.* Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for the approximation of Baer and Nunziato type multiphase models // J. Comput. Phys. 2012. V. 291. P. 4096–4141.
11. *de Frahan H., Varadan S., Johnsen E.* A new limiting procedure for discontinuous Galerkin methods applied to compressible multiphase flows with shocks and interfaces // J. Comput. Phys. 2015. V. 280. P. 489–509.
12. *Cockburn B., Shu C.-W.* The Runge–Kutta local projection-discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 1991. V. 25. № 3. P. 337–361.
13. *Zhong X., Shu C.-W.* A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods // J. Comput. Phys. 2013. V. 232. № 1. P. 397–415.
14. *Jin S., Xin Z.* The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions // Comm. Pure Appl. Math. 1995. V. 48. № 3. P. 0010–3640.
15. *Jin S.* Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations // SIAM J. Sci. Comput. 1999. V. 21. P. 441–454.
16. *Andrianov N., Warnecke G.* The Riemann problem for the Baer–Nunziato two-phase flow model // J. Comput. Phys. 2004. V. 195. № 2. P. 434–464.
17. *Daude F., Berry R., Galon P.* A Finite-volume method for compressible non-equilibrium two-phase flows in networks of elastic pipelines using the Baer–Nunziato model // Comput. Methods in Appl. Mech. Eng. 2019. V. 354. P. 820–849.
18. *Saurel R., Abgrall R.* A simple method for compressible multifluid flows // SIAM J. Sci. Comput. 1999. V. 21. № 3. P. 1115–1145.
19. *Nigmatulin R.* Dynamics of Multiphase Media. N.Y., 1990.
20. *Pares C.* Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework // SIAM J. Numer. Anal. 2006. V. 44. № 1. P. 300–321.
21. *Chiocchetti S., Muller C.* A solver for stiff finite-rate relaxation in Baer–Nunziato two-phase flow model // Droplet Interactions and Spray Processes. 2020. P. 31–44.
22. *Rider W., Lowrie R.* The use of classical Lax–Friedrichs Riemann solvers with discontinuous Galerkin methods // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2002. V. 40. P. 479–486.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша, г. Москва

Поступила в редакцию 01.03.2021 г.
После доработки 01.03.2021 г.
Принята к публикации 27.04.2021 г.