ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1005–1013

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938.5

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ СЕМЕЙСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПРЕДЕЛЁННЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2021 г. А. Н. Ветохин

Рассматривается параметрическое семейство динамических систем, определённых на некомпактном метрическом пространстве и непрерывно зависящих от параметра из некоторого метрического пространства. Для любого такого семейства топологическая энтропия входящих в него динамических систем изучается как функция параметра с точки зрения бэровской классификации функций.

DOI: 10.31857/S037406412108001X

Топологическая энтропия для автономных динамических систем на инвариантном компактном метрическом пространстве определена в статье [1]. В дальнейшем в работе [2] это понятие было распространено на динамические системы, определённые на произвольном метрическом пространстве.

1. Класс Бэра топологической энтропии семейства динамических систем в случае неинвариантного компакта. Следуя [2], приведём необходимое в дальнейшем определение. Пусть (X,d) – метрическое пространство, $\mathcal{K}(X)$ – множество компактных подмножеств (компактов) в X, а $f: X\to X$ – непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик d_n^f, $n\in\mathbb{N}$, равенством

$$d_n^f(x,y)=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d(f^{\circ i}(x),f^{\circ i}(y)),\quad x,y\in X,\quad n\in\mathbb{N},$$

где $f^{\circ i}$, $i\in\mathbb{N}$, – i-я итерация отображения f, $f^{\circ 0}\equiv \mathrm{id}_X$. Для фиксированного $K\in\mathcal{K}(X)$ и каждых $n\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon>0$ обозначим через $N_d(K,f,\varepsilon,n)$ максимальное число точек в компакте K, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше, чем ε. Тогда *верхней* и *нижней топологической энтропией* отображения f на компакте K называют соответственно величины

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(K,f,\varepsilon,n)\quad\text{и}\quad \underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(K,f,\varepsilon,n).\qquad(1)$$

Отметим, что если метрику d заменить на другую метрику, порождающую ту же, что и d, топологию, то значения величин (1) не изменятся [3, с. 121].

Напомним ещё формулы для вычисления верхней и нижней топологических энтропий отображения f на компакте K, используемые в дальнейшем. Для каждых $x\in X$, $\varepsilon>0$ и $n\in\mathbb{N}$ через $B_f(x,\varepsilon,n)$ обозначим открытый шар $\{y\in K: d_n^f(x,y)<\varepsilon\}$ с центром в x радиуса ε в пространстве (X,d_n^f). Множество $D\subset K$ называется (f,ε,n)-*покрытием* компакта K, если

$$K\subset\bigcup_{x\in D}B_f(x,\varepsilon,n).$$

Пусть $S_d(K,f,\varepsilon,n)$ обозначает минимальное количество элементов, которое может содержать (f,ε,n)-покрытие компакта K. Тогда верхняя и нижняя топологические энтропии отображения f на компакте K могут быть вычислены по формулам [3, с. 122]

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_d(K,f,\varepsilon,n),\quad \underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_d(K,f,\varepsilon,n).\qquad(2)$$

Из формул (1) (или (2)) очевидно следует неравенство $\overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)\geqslant \underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f)$. Если компакт K является для отображения f инвариантным множеством, т.е. выполнено включение $f(K)\subset K$, то значения верхней и нижней топологических энтропий отображения f на компакте K совпадают [3, с. 122]. В общем случае, как показывает следующий пример, величины (1) могут не совпадать между собой. Рассмотрим множество Ω_2 последовательностей $x = (x_1,x_2,x_3,\ldots)$, где $x_i\in\{0,1\}$, с метрикой

$$d_{\Omega_2}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } x=y,\\ 1/\min\{i: x_i\neq y_i\}, & \text{если } x\neq y.\end{cases}$$

Отметим, что пространство (Ω_2,d_{Ω_2}) гомеоморфно множеству Кантора на отрезке $[0,1]$ с метрикой, индуцированной стандартной метрикой вещественной прямой. Пусть K_0 – компакт в Ω_2, задаваемый условием:

$$(x_1,x_2,x_3,\ldots)\in K_0 \Leftrightarrow x_i=0,\quad i\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}}\{(2k)!,\ldots,(2k+1)!\},$$

а отображение $\sigma:\Omega_2\to\Omega_2$ – сдвиг влево на один элемент: $\sigma((x_1,x_2,x_3,\ldots))=(x_2,x_3,x_4,\ldots)$. Тогда

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(K_0,\sigma)=\ln 2,\quad \underline{h}_{\mathrm{top}}(K_0,\sigma)=0.$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$, компакту $K\subset X$ и непрерывному отображению

$$f:\mathcal{M}\times X\to X \tag{3}$$

образуем функции

$$\mu\mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f(\mu,\cdot\,)), \tag{4}$$

$$\mu\mapsto \underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f(\mu,\cdot\,)). \tag{5}$$

В данной работе для любого отображения (3) функции (4) и (5) изучаются с точки зрения бэровской классификации функций. Напомним, что функциями *нулевого бэровского класса* на метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называются непрерывные функции $M\to\mathbb{R}$, и для всякого натурального числа p функциями *p-го бэровского класса* называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го бэровского класса.

В случае инвариантности компакта K относительно отображения f, как уже отмечалось, величины (1) совпадают между собой, а их общее значение называют *топологической энтропией* отображения f и обозначают $h_{\mathrm{top}}(f)$. В работе [4] установлено, что для любого отображения (3) функция

$$\mu\mapsto h_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot\,)) \tag{6}$$

принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$, а в [5] для $X=\mathcal{M}=\Omega_2$ построено семейство гомеоморфизмов (3), для которого функция (6) не принадлежит первому бэровскому классу, а следовательно, функции (4) и (5), вообще говоря, также не принадлежат первому бэровскому классу. В работе [4] показано, что если пространство $\mathcal{M}$ метризуемо полной метрикой, то множество точек полунепрерывности снизу функции (6) содержит всюду плотное в пространстве $\mathcal{M}$ множество типа G_δ, а в работе [6] установлено, что само множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным в $\mathcal{M}$ множеством типа G_δ. Кроме того, в работе [7] для $X=\Omega_2$ и любого полного метрического сепарабельного нульмерного пространства $\mathcal{M}$ (в качестве примера такого пространства можно рассматривать Ω_2) для каждого всюду плотного в пространстве $\mathcal{M}$ множества типа G_δ построено такое отображение (3), что множество точек полунепрерывности снизу функции (6) совпадает с этим множеством. Оказывается, в случае неинвариантного компакта K справедлива следующая

Теорема 1. *Для любых $K \in \mathcal{K}(X)$ и отображения (3) функция (4) принадлежит третьему бэровскому классу, а функция (5) – второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$. Если пространство $\mathcal{M}$ метризуемо полной метрикой, то для любого отображения (3) множество точек полунепрерывности снизу функции (5) является всюду плотным множеством типа G_δ.*

Доказательство. Для каждых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ функция $\mu \mapsto n^{-1} \ln N_d(K, f(\mu, \cdot), \varepsilon, n)$ полунепрерывна снизу [8], а функция $\mu \mapsto n^{-1} \ln S_d(K, f(\mu, \cdot), \varepsilon, n)$ полунепрерывна сверху [4], следовательно [9, гл. IX, § 37, XI], существуют последовательности непрерывных на пространстве $\mathcal{M}$ функций $\mu \mapsto \varphi_d^m(K; \mu, \varepsilon, n)$ и $\mu \mapsto \psi_d^m(K; \mu, \varepsilon, n)$, $m \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\frac{1}{n} \ln N_d(K, f(\mu, \cdot), \varepsilon, n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \varphi_d^m(K; \mu, \varepsilon, n), \quad \mu \in \mathcal{M}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{n} \ln S_d(K, f(\mu, \cdot), \varepsilon, n) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \psi_d^m(K; \mu, \varepsilon, n), \quad \mu \in \mathcal{M}. \tag{8}$$

Вследствие формулы (7) получаем представление

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(K, f(\mu, \cdot)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(K, f(\mu, \cdot), \varepsilon, n) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \varlimsup_{n \to \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \varphi_d^m(K; \mu, 1/k, n) =$$

$$= \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{l \geqslant n} \sup_{m \in \mathbb{N}} \varphi_d^m(K; \mu, 1/k, l) =$$

$$= \lim_{p \to \infty} \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \lim_{r \to \infty} \min_{1 \leqslant n \leqslant r} \lim_{q \to \infty} \max_{n \leqslant l \leqslant q} \max_{1 \leqslant m \leqslant q} \varphi_d^m(K; \mu, 1/k, l),$$

а в силу формулы (8) – представление

$$\underline{h}_{\mathrm{top}}(K, f(\mu, \cdot)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varliminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(K, f(\mu, \cdot), \varepsilon, n) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \varliminf_{n \to \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \psi_d^m(K; \mu, 1/k, n) =$$

$$= \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{l \geqslant n} \inf_{m \in \mathbb{N}} \psi_d^m(K; \mu, 1/k, l) =$$

$$= \lim_{p \to \infty} \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \max_{1 \leqslant n \leqslant p} \lim_{q \to \infty} \min_{n \leqslant l \leqslant q} \min_{1 \leqslant m \leqslant q} \psi_d^m(K; \mu, 1/k, l).$$

Из этих представлений, поскольку максимум и минимум конечного множества функций из некоторого бэровского класса принадлежит тому же классу [9, гл. IX, § 37, III], очевидно вытекает, что функция $\mu \mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(K, f(\mu, \cdot))$ принадлежит третьему классу Бэра, а функция $\mu \mapsto \underline{h}_{\mathrm{top}}(K, f(\mu, \cdot))$ – второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$.

Так как функция $\mu \mapsto \underline{h}_{\mathrm{top}}(K, f(\mu, \cdot))$ представима в виде неубывающей последовательности функций первого бэровского класса, то её множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным множеством типа G_δ [10, лемма 2]. Теорема доказана.

Отметим, что из теоремы 1 в силу теоремы Бэра [9, гл. IX, § 39, VI] вытекает, что для любого отображения (3) в полном метрическом пространстве $\mathcal{M}$ найдётся всюду плотное множество G типа G_δ такое, что сужения функций $\mu \mapsto \underline{h}_{\mathrm{top}}(K, f(\mu, \cdot))$ и $\mu \mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(K, f(\mu, \cdot))$ на множество G непрерывны.

Возникает естественный вопрос о наименьшем бэровском классе, которому принадлежит функция (4). Чтобы ответить на него, построим метрические пространства $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Точками пространства $\mathcal{B}$ являются, по определению, всевозможные (счётные) последовательности $\mu = (\mu_k)_{k=1}^\infty$ натуральных чисел. Расстояние между двумя точками μ и ν определяется равенством

$$d_{\mathcal{B}}(\mu, \nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = \nu; \\ 1/\min\{k : \mu_k \neq \nu_k\}, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Отметим, что пространство $(\mathcal{B}, d_{\mathcal{B}})$ гомеоморфно множеству иррациональных чисел на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. Точками пространства $\mathcal{C}$ являются всевозможные пары (x,i), где $x\in[0,1]$ и $i\in\mathbb{N}$. Расстояние между точками (x,i) и (y,j) определяется равенством

$$d_{\mathcal{C}}((x,i),(y,j))=\begin{cases}|x-y|, & \text{если } i=j;\\ 1, & \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

Для каждого $r\in\mathbb{N}$ обозначим через $K_r\in\mathcal{K}(\mathcal{C})$ компакт $K_r=[0,1]\times\{1,\ldots,r\}$ в пространстве $\mathcal{C}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}=\mathcal{B}$, $X=\mathcal{C}$ и $K=K_r$, тогда существует отображение (3) такое, что функция (4) всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.*

Доказательство. По последовательности $\mu=(\mu_k)_{k=1}^{\infty}\in\mathcal{B}$ построим последовательность $\alpha(\mu)$ с элементами $\alpha_k(\mu)=\mu_{[\log_2(k+1)]}$ ($[\cdot]$ – целая часть числа). Рассмотрим последовательность (f_k) отображений из $\mathcal{B}\times[0,1]$ в $[0,1]$, определяемых следующим образом:

$$f_k(\mu,x)=\begin{cases}x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1-1/\alpha_k(\mu),\\ 2x-1+1/\alpha_k(\mu), & \text{если } 1-1/\alpha_k(\mu)<x\leqslant 1-1/(2\alpha_k(\mu)),\\ -2x+3-1/\alpha_k(\mu), & \text{если } 1-1/(2\alpha_k(\mu))<x\leqslant 1.\end{cases}$$

По этой последовательности построим отображение $f:\mathcal{B}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ следующим образом:

$$f(\mu,(x,k))=(f_k(\mu,x),k+1). \tag{9}$$

Функция f в силу её определения непрерывна на $\mathcal{B}\times\mathcal{C}$.

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество тех последовательностей из $\mathcal{B}$, которые стремятся к бесконечности. Вычислим значение верхней топологической энтропии отображения (9) для $\mu\in\mathcal{E}$.

Лемма 1. *Если $\mu\in\mathcal{E}$, то для отображения (9) при любом $r\in\mathbb{N}$ выполнено равенство*

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(K_r,f(\mu,\cdot))=0.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon\in(0,1)$ и $\mu\in\mathcal{E}$, тогда найдётся такой номер $k_0(\varepsilon)>r$, что для любого $k\geqslant k_0(\varepsilon)$ выполнено неравенство $1/\alpha_k(\mu)<\varepsilon/2$.

Пусть $A_{k_0(\varepsilon)}$ – такое $(f(\mu,\cdot),\varepsilon/2,k_0(\varepsilon))$-покрытие компакта K_r, которое содержит минимальное количество элементов. Докажем, что множество $A_{k_0(\varepsilon)}$ является $(f(\mu,\cdot),\varepsilon,k_0(\varepsilon)+i)$-покрытием компакта K_r для любого $i\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

В силу определения множества $A_{k_0(\varepsilon)}$ для любой точки $(x,l)\in K_r$ найдётся такой элемент $(x_0,l)\in A_{k_0(\varepsilon)}$, что $(x,l)\in B_{f(\mu,\cdot)}((x_0,l),\varepsilon/2,k_0(\varepsilon))$.

Если $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x,l)),f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x_0,l))\in[0,1-\varepsilon/2]\times\mathbb{N}$, то для любого $i\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ выполнено неравенство

$$d_{\mathcal{C}}(f^{\circ(k_0(\varepsilon)+i)}(\mu,(x,l)),f^{\circ(k_0(\varepsilon)+i)}(\mu,(x_0,l)))=$$
$$=d_{\mathcal{C}}(f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x,l)),f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x_0,l)))<\varepsilon/2, \tag{10}$$

поскольку отрезок $[0,1-\varepsilon/2]$ инвариантен относительно отображения $f_{k_0(\varepsilon)+i}(\mu,\cdot)$ для всех $i\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

Если $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x,l))$, $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x_0,l))\in[1-\varepsilon/2,\,1]\times\mathbb{N}$, то для любого $i\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ имеет место неравенство

$$d_{\mathcal{C}}(f^{\circ(k_0(\varepsilon)+i)}(\mu,(x,l)),f^{\circ(k_0(\varepsilon)+i)}(\mu,(x_0,l)))\leqslant\varepsilon/2, \tag{11}$$

так как отрезок $[1-\varepsilon/2,\,1]$ инвариантен относительно отображений $f_{k_0(\varepsilon)+i}(\mu,\cdot)$ для всех $i\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

Если либо $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x,l))\in[0,1-\varepsilon/2]\times\mathbb{N}$, $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x_0,l))\in[1-\varepsilon/2,1]\times\mathbb{N}$, либо $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x_0,l))\in[0,1-\varepsilon/2]\times\mathbb{N}$, $f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x,l))\in[1-\varepsilon/2,1]\times\mathbb{N}$, то для любого $i\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ выполнено неравенство

$$d_{\mathcal{C}}(f^{\circ(k_0(\varepsilon)+i)}(\mu,(x,l)),f^{\circ(k_0(\varepsilon)+i)}(\mu,(x_0,l)))\leqslant$$

$$\leqslant d_{\mathcal{C}}(f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x,l)),f^{\circ(k_0(\varepsilon)-1)}(\mu,(x_0,l)))+\varepsilon/2<\varepsilon. \quad (12)$$

Из неравенств (10)–(12) следует, что $(x,l)\in B_{f(\mu,\cdot)}((x_0,l),\varepsilon,k_0(\varepsilon)+i)$ для любого $i\in\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, а следовательно, множество $A_{k_0(\varepsilon)}$ является $(f(\mu,\cdot),\varepsilon,k_0(\varepsilon)+i)$-покрытием компакта K_r для любого $i\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Таким образом, при $n\geqslant k_0(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$S_{d_{\mathcal{C}}}(K_r,f(\mu,\cdot),\varepsilon,n)\leqslant S_{d_{\mathcal{C}}}(K_r,f(\mu,\cdot),\varepsilon/2,k_0(\varepsilon)),$$

из которой вытекает, что

$$\overline{h}_{\rm top}(K_r,f(\mu,\cdot))=\lim_{\varepsilon\to0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln S_{d_{\mathcal{C}}}(K_r,f(\mu,\cdot),\varepsilon,n)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\varepsilon\to0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln S_{d_{\mathcal{C}}}(K_r,f(\mu,\cdot),\varepsilon/2,k_0(\varepsilon))=0.$$

Лемма доказана.

Теперь оценим значение верхней топологической энтропии отображения (9) для $\mu\notin\mathcal{E}$.

Лемма 2. *Если $\mu\notin\mathcal{E}$, то для отображения (9) выполнено неравенство*

$$\overline{h}_{\rm top}(K_1,f(\mu,\cdot))\geqslant\frac{1}{4}\ln 2.$$

Доказательство. Пусть $\mu\notin\mathcal{E}$, тогда существуют подпоследовательность $(\mu_{k_j})_{j=1}^{\infty}\subset\subset(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ и натуральное число q такие, что $\mu_{k_j}=q$ при всех $j\in\mathbb{N}$.

Для всех $j\in\mathbb{N}$, $k\in\{2^{k_j}-1,\ldots,2^{k_j+1}-2\}$ и $x\in[0,1]$ справедливо равенство $f_k(\mu,x)==f_{2^{k_j}-1}(\mu,x)=t_q(x)$, где

$$t_q(x)=\begin{cases}x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1-1/q;\\ 2x-1+1/q, & \text{если } 1-1/q<x\leqslant 1-1/(2q);\\ -2x+3-1/q, & \text{если } 1-1/(2q)<x\leqslant 1.\end{cases}$$

При помощи аффинного сохраняющего порядок преобразования φ отобразим отрезок $I_q==[1-1/q,\,1]$ на отрезок $[0,\,1]$, при этом отображение $t_q|_{I_q}:I_q\to I_q$ перейдёт в отображение $g=\varphi\circ t_q|_{I_q}\circ\varphi^{-1}:[0,\,1]\to[0,\,1]$, определяемое равенством

$$g(x)=\begin{cases}2x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1/2;\\ 2-2x, & \text{если } 1/2<x\leqslant 1.\end{cases}$$

В монографии [3, с. 502] установлено, что топологическая энтропия отображения g равна $\ln 2$, следовательно, найдётся такое $\varepsilon_0<1/q$, что для любого $\varepsilon<\varepsilon_0$ выполнено неравенство

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln N_d([0,\,1],g,\varepsilon,n)\geqslant\frac{1}{2}\ln 2,\quad d(x,y)=|x-y|.$$

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ на отрезке $[0,\,1]$ рассмотрим множество точек $\{a_1,\ldots,a_{N_d([0,\,1],g,\varepsilon,n)}\}$, попарные d_n^g-расстояния между которыми больше $\varepsilon>0$.

Пусть $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $n = 2^{k_j+1} - 2^{k_j} - 1,$ тогда $d^{f(\mu,\cdot)}_{2^{k_j}+n-1}$-расстояние между любыми прообразами любых двух точек $(\varphi^{-1}(a_i), 2^{k_j}-1)$ и $(\varphi^{-1}(a_m), 2^{k_j}-1),$ $i \neq m,$ при отображении $f^{\circ(2^{k_j}-2)}(\mu,\cdot)$ больше $\varepsilon/q > 0,$ а следовательно,

$$N_{d_{\mathcal{C}}}(K_1, f(\mu,\cdot), \varepsilon/q, 2^{k_j+1}) \geqslant N_d([0,\,1], g, \varepsilon, 2^{k_j+1} - 2^{k_j}),$$

откуда получаем оценки

$$\overline{h}_{\rm top}(K_1, f(\mu,\cdot)) \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{j\to\infty}\frac{(2^{k_j+1}-2^{k_j})}{2^{k_j+1}}\frac{1}{(2^{k_j+1}-2^{k_j})}\ln N_d([0,\,1], g, \varepsilon, 2^{k_j+1}-2^{k_j}) \geqslant \frac{1}{4}\ln 2.$$

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы 2 воспользуемся следующим утверждением, установленным в работе [11]: если функция $\mu \mapsto \overline{h}_{\rm top}(K_r, f(\mu,\cdot))$ принадлежит второму классу Бэра, то пересечение замыканий множеств $\overline{h}_{\rm top}(K_r, f(\mathcal{E},\cdot))$ и $\overline{h}_{\rm top}(K_r, f(\mathcal{B}\setminus\mathcal{E},\cdot))$ непусто. В силу лемм 1 и 2 имеем неравенства

$$\overline{h}_{\rm top}(K_r, f(\mathcal{E},\cdot)) = 0 < \frac{1}{4}\ln 2 \leqslant \overline{h}_{\rm top}(K_1, f(\mathcal{B}\setminus\mathcal{E},\cdot)) \leqslant \overline{h}_{\rm top}(K_r, f(\mathcal{B}\setminus\mathcal{E},\cdot)),$$

следовательно, функция $\mu \mapsto \overline{h}_{\rm top}(K_r, f(\mu,\cdot))$ не принадлежит второму бэровскому классу, а в силу всюду плотности множеств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}\setminus\mathcal{E}$ в пространстве $\mathcal{B}$ она всюду разрывна на пространстве $\mathcal{B}.$ Теорема доказана.

2. Класс Бэра топологической энтропии семейства динамических систем на некомпактном метрическом пространстве. Следуя [2], назовём величины

$$\overline{h}_{\rm top}(f) = \sup_{K\in\mathcal{K}(X)}\overline{h}_{\rm top}(K,f), \quad \underline{h}_{\rm top}(f) = \sup_{K\in\mathcal{K}(X)}\underline{h}_{\rm top}(K,f) \qquad (13)$$

соответственно *верхней* и *нижней топологической энтропией* отображения $f: X\to X.$ Как показывает следующий пример, величины (13) могут не совпадать между собой. Построим пространство $\mathcal{A}$ следующим образом. Точками пространства $\mathcal{A}$ являются всевозможные пары $(x,i),$ где $x\in\Omega_2,$ $i\in\mathbb{N},$ а метрика определяется равенством

$$d_{\mathcal{A}}((x,i),(y,j)) = \begin{cases} d_{\Omega_2}(x,y), & \text{если } i=j,\\ 1, & \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

По последовательности

$$f_n = \begin{cases} {\rm id}_{\Omega_2}, & \text{если } t_{2k}\leqslant n\leqslant t_{2k+1}-1,\\ \sigma, & \text{если } t_{2k+1}\leqslant n\leqslant t_{2k+2}-1,\end{cases} \qquad t_s = \sum_{m=0}^{s} m!, \quad k=0,1,2,\ldots,$$

непрерывных отображений из Ω_2 в Ω_2 определим непрерывное отображение $f_{\mathcal{A}}: \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ равенством

$$f_{\mathcal{A}}(x,n) = (f_n(x), n+1).$$

Лемма 3. *Имеет место неравенство* $\underline{h}_{\rm top}(f_{\mathcal{A}}) < \overline{h}_{\rm top}(f_{\mathcal{A}}).$

Доказательство. Для произвольного $r\in\mathbb{N}$ обозначим через $H_r\in\mathcal{K}(\mathcal{A})$ компакт $H_r = \Omega_2\times\{1,\ldots,r\}.$ Для любого компакта $K\in\mathcal{K}(\mathcal{A})$ найдётся такое $r,$ что $K\subset H_r,$ следовательно, выполнены равенства

$$\underline{h}_{\rm top}(f_{\mathcal{A}}) = \lim_{r\to\infty}\underline{h}_{\rm top}(H_r, f_{\mathcal{A}}), \quad \overline{h}_{\rm top}(f_{\mathcal{A}}) = \lim_{r\to\infty}\overline{h}_{\rm top}(H_r, f_{\mathcal{A}}).$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, а множество Q является $(f_{\mathcal{A}}, 1/p, t_{2k})$-покрытием компакта H_r, содержащим минимальное количество элементов. Тогда в силу определения отображения $f_{\mathcal{A}}$ это множество является $(f_{\mathcal{A}}, 1/p, t_{2k+1})$-покрытием компакта H_r. Так как точки $(x, i) \in \mathcal{A}$, где $x = (x_1, \ldots, x_{t_{2k}+p}, 0, 0, \ldots)$, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, образуют $(f_{\mathcal{A}}, 1/p, t_{2k})$-покрытие компакта H_r, то количество элементов в множестве Q не превосходит $r2^{t_{2k}+p}$. Поэтому получаем

$$\underline{h}_{\mathrm{top}}(H_r, f_{\mathcal{A}}) \leqslant \lim_{p\to\infty} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{t_{2k}+p}{(2k+1)!} \ln 2 + \frac{\ln r}{(2k+1)!} \right) \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\ln 2}{2k+1} \left(2 + \frac{p}{(2k)!} \right) = 0,$$

а следовательно, $\underline{h}_{\mathrm{top}}(f_{\mathcal{A}}) = 0$.

Установим неравенство $\overline{h}_{\mathrm{top}}(f_{\mathcal{A}}) \geqslant 0.5 \ln 2$, из которого будет следовать утверждение леммы 3. В пространстве Ω_2 рассмотрим множество R_k, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, точек вида

$$(x_1, \ldots, x_{(2k+2)!}, 0, 0, \ldots).$$

В прообразе каждой точки (x, t_{2k+1}), $x \in R_k$, при отображении $f_{\mathcal{A}}^{\circ(t_{2k+1}-1)}$ выберем одну точку $(y_x, 1) \in H_1$. Пусть $x' \neq x''$, $x', x'' \in R_k$, тогда имеем

$$d_{t_{2k+2}}^{f_{\mathcal{A}}}((y_{x'}, 1), (y_{x''}, 1)) \geqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant (2k+2)!-1} d_{\mathcal{A}}(f_{\mathcal{A}}^{\circ i}(x', t_{2k+1}), f_{\mathcal{A}}^{\circ i}(x'', t_{2k+1})) = 1.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon < 1$ величина $N_{d_{\mathcal{A}}}(H_1, f_{\mathcal{A}}, \varepsilon, t_{2k+2})$ не меньше, чем $2^{(2k+2)!}$ – мощности множества R_k, а значит, справедливы неравенства

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(f_{\mathcal{A}}) \geqslant \overline{h}_{\mathrm{top}}(H_1, f_{\mathcal{A}}) \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{t_{2k+2}} \ln N_{d_{\mathcal{A}}}(H_1, f_{\mathcal{A}}, \varepsilon, t_{2k+2}) \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!}{t_{2k+2}} \ln 2 \geqslant \frac{\ln 2}{2}.$$

Лемма доказана.

Для отображения (3) рассмотрим функции

$$\mu \mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot)), \tag{14}$$

$$\mu \mapsto \underline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot)). \tag{15}$$

В случае компактности метрического пространства X величины (13) равны топологической энтропии отображения f, поэтому, как вытекает из [4], функции (14) и (15) принадлежат второму бэровскому классу, а из работы [5] следует, что они, вообще говоря, не принадлежат первому бэровскому классу.

Теорема 3. *Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}$, $X = \mathcal{C}$, то существует отображение (3) такое, что функция (14) всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Для любого компакта $K \in \mathcal{K}(\mathcal{C})$ найдётся такое r, что $K \subset K_r$, следовательно, для топологической энтропии любого непрерывного отображения $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ выполнено равенство

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(f) = \sup_{K\in\mathcal{K}(\mathcal{C})} \overline{h}_{\mathrm{top}}(K, f) = \sup_{r\in\mathbb{N}} \overline{h}_{\mathrm{top}}(K_r, f).$$

В силу лемм 1 и 2 для семейства (9) получаем цепочку неравенств

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mathcal{E}, \cdot)) = 0 < \frac{1}{4} \ln 2 \leqslant \overline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}, \cdot)),$$

следовательно, функция $\mu \mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot))$ не принадлежит второму бэровскому классу [11], а в силу всюду плотности множеств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$ в пространстве $\mathcal{B}$ она всюду разрывна на пространстве $\mathcal{B}$. Теорема доказана.

Напомним, что метрическое пространство X называют *локально компактным*, если каждая его точка обладает компактной окрестностью [12, с. 315], а локально компактное пространство X *счётно в бесконечности* [12, с. 316], если оно является объединением счётного семейства компактных множеств. Примерами таких пространств являются $\mathbb{R}^n$, определённое выше пространство $\mathcal{C}$ и, вообще, любое локально компактное пространство со счётной базой [12, с. 316; 13, с. 254].

Теорема 4. *Пусть локально компактное пространство X счётно в бесконечности, тогда для любого пространства $\mathcal{M}$ и отображения (3) функция (14) принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$, а функция (15) – второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$. Если пространство $\mathcal{M}$ метризуемо полной метрикой, то для любого отображения (3) множество точек полунепрерывности снизу функции (15) является всюду плотным множеством типа G_δ в пространстве $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Так как пространство X счётно в бесконечности, то существует возрастающая последовательность $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ относительно компактных открытых множеств, образующая покрытие пространства X, такая, что $\overline{U}_s \subset U_{s+1}$ для всех $s \in \mathbb{N}$ [12, с. 316]. Для любого компакта $K \subset X$ найдётся такое s_0, что $K \subset U_{s_0}$, так как в противном случае из покрытия компакта K последовательностью $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ открытых множеств невозможно выделить конечное подпокрытие, что противоречит компактности K. Таким образом, для любого непрерывного отображения $f : X \to X$ имеем

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(f) = \sup_{K\in\mathcal{K}(X)} \overline{h}_{\mathrm{top}}(K,f) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \overline{h}_{\mathrm{top}}(\overline{U}_s,f),$$

$$\underline{h}_{\mathrm{top}}(f) = \sup_{K\in\mathcal{K}(X)} \underline{h}_{\mathrm{top}}(K,f) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \underline{h}_{\mathrm{top}}(\overline{U}_s,f).$$

Используя формулу (7), получаем

$$\overline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot)) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(\overline{U}_s, f(\mu,\cdot),\varepsilon,n) =$$

$$= \sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \varlimsup_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \varphi_d^m(\overline{U}_s;\mu,1/k,n) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{l\geqslant n} \sup_{m\in\mathbb{N}} \varphi_d^m(\overline{U}_s;\mu,1/k,l) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \max_{1\leqslant s\leqslant p} \max_{1\leqslant k\leqslant p} \lim_{r\to\infty} \min_{1\leqslant n\leqslant r} \lim_{q\to\infty} \max_{n\leqslant l\leqslant q} \max_{1\leqslant m\leqslant q} \varphi_d^m(\overline{U}_s;\mu,1/k,l).$$

Вследствие формулы (8) имеем

$$\underline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot)) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \lim_{\varepsilon\to 0} \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln S_d(\overline{U}_s, f(\mu,\cdot),\varepsilon,n) =$$

$$= \sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \varliminf_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \psi_d^m(\overline{U}_s;\mu,1/k,n) = \sup_{s\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{l\geqslant n} \inf_{m\in\mathbb{N}} \psi_d^m(\overline{U}_s;\mu,1/k,l) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \max_{1\leqslant s\leqslant p} \max_{1\leqslant k\leqslant p} \max_{1\leqslant n\leqslant p} \lim_{q\to\infty} \min_{n\leqslant l\leqslant q} \min_{1\leqslant m\leqslant q} \psi_d^m(\overline{U}_s;\mu,1/k,l).$$

Так как максимум и минимум конечного множества функций из некоторого бэровского класса принадлежат тому же классу [9, гл. IX, § 37, III], функция $\mu \mapsto \overline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot))$ принадлежит третьему классу Бэра, а функция $\mu \mapsto \underline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot))$ – второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$.

Поскольку функция $\mu \mapsto \underline{h}_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot\,,\,))$ представима в виде неубывающей последовательности функций первого бэровского класса, то её множество точек полунепрерывности снизу является множеством типа G_δ, которое является всюду плотным в случае, когда пространство $\mathcal{M}$ метризуемо полной метрикой [10, лемма 2]. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adler R.L., Konheim A.G., McAndrew M.H.* Topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 114. P. 309–319.
2. *Bowen R.* Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 153. P. 401–414.
3. *Каток А.Б., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999.
4. *Ветохин А.Н.* Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453.
5. *Ветохин А.Н.* Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2016. № 2. С. 44–48.
6. *Ветохин А.Н.* Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2019. № 3. С. 69–71.
7. *Ветохин А.Н.* О некоторых свойствах топологической энтропии и топологического давления семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1275–1283.
8. *Ветохин А.Н.* Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Мат. заметки. 2019. Т. 106. № 3. С. 327–333.
9. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М., 1937.
10. *Карпук М.В.* Строение множества точек полунепрерывности показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 4. С. 1404–1408.
11. *Ветохин А.Н.* Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1313–1317.
12. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь. М., 1975.
13. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 13.10.2020 г.
После доработки 31.05.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.