ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1014–1022

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911+517.923

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА

© 2021 г. Дж. Кртинич, М. Микич

Для уравнения Эмдена–Фаулера $y'' - x^a y^\sigma = 0$ с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma < 0$ рассматривается задача Коши, у которой начальное значение решения принадлежит одной из положительных координатных полуосей. Для задачи с начальным значением на положительной полуоси ординат (при этом допускается несобственное начальное значение производной решения) получены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять параметры уравнения, чтобы эта задача Коши имела решение. Для задачи с начальным значением на положительной полуоси абсцисс доказано, что при $\sigma \in (-1, 0)$ она имеет единственное решение.

DOI: 10.31857/S0374064121080021

1. Введение. В работе изучается нелинейное дифференциальное уравнение Эмдена–Фаулера

$$y'' - x^a y^\sigma = 0, \tag{1.1}$$

здесь a и σ – вещественные параметры, $\sigma \neq 1$. Это уравнение и его обобщения имеют значительные применения во многих областях науки и техники. Уравнение Эмдена–Фаулера исследовалось во многих монографиях и статьях. Например, в монографиях [1, гл. 7; 2, гл. 5] изучены асимптотические свойства его решений в бесконечности. В работах [3–7] установлены некоторые асимптотические свойства решений уравнения Эмдена–Фаулера в окрестности нуля, а также получен ряд результатов о решении некоторых задач Коши для уравнения (1.1), которые побудили нас изучить в данной работе эти задачи в случае $\sigma < 0$ и $a \in \mathbb{R}$ полностью.

В [3] доказано, что при $\sigma < 1$, если $a = -2$, каждое решение $y(x)$ уравнения (1.1), определённое на интервале с нулевым левым концом, имеет при $x \to +0$ асимптотическое представление

$$y(x) = (1-\sigma)^{1/(1-\sigma)}(-\ln x)^{1/(1-\sigma)}(1 + o(1)),$$

а если $a < -2$, то каждое такое положительное решение $y(x)$ имеет при $x \to +0$ представление

$$y(x) = [(a+2)(1+a+\sigma)/(1-\sigma)^2]^{1/(\sigma-1)} x^{(a+2)/(1-\sigma)}(1 + o(1)),$$

из чего следует, что ось y является вертикальной асимптотой решения уравнения (1.1) при $a \leqslant -2$, $\sigma < 1$. В работе [5] показано, что если $\sigma \leqslant -1$ и $x_1 > 0$, то каждое положительное монотонное решение уравнения (1.1), определённое в точке x_1, существует на некотором интервале I таком, что $(0, x_1] \subset I$. В [5] показано также, что при $\sigma < 0$, $a > -2$, если $y(x)$ – положительное решение уравнения (1.1), определённое на полуинтервале $(0, x_0]$ при некотором $x_0 > 0$, такое, что $y'(x_0) \leqslant 0$, то $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)$ существует и конечен. Кроме того, в теореме 3 из [5] для уравнения (1.1) при $\sigma < 0$, $a > -1$ доказаны существование и единственность решения задачи Коши

$$y(0) = c, \quad y'(0) = \lambda, \tag{1.2}$$

где $c > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (здесь $y(0) = \lim\limits_{x\to 0+} y(x)$ и $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0+} y'(x)$, существование этих пределов следует из приведённых выше результатов).

В этой работе мы дополним результаты [3] и [5].

Структура работы следующая. В п. 2 рассматривается задача Коши (1.1), (1.2) при $c \in \in (0,\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}$. Мы получим необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять параметры a и σ уравнения (1.1), чтобы задача Коши (1.1), (1.2) имела решение (или не имела решения). В случаях когда решение существует, мы исследуем его единственность. В п. 3 для уравнения (1.1) рассматривается задача Коши

$$y(x_0)=0, \quad y'(x_0)=\lambda, \quad x_0>0, \tag{1.3}$$

где $\sigma<0$, $a\in\mathbb{R}$ и $\lambda\in\mathbb{R}$. Доказано, что при $\sigma\in(-1,0)$ эта задача имеет единственное решение.

2. Задача Коши для уравнения Эмдена–Фаулера для начальной точки на положительной части оси y. Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2), в которой $\sigma<0$, $a\in\mathbb{R}$ и $\lambda\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}$, $c>0$.

Прежде всего мы должны определить, что означает постановка задачи Коши в рассматриваемой ситуации. Будем понимать величины $y(0)$ и $y'(0)$ как пределы при $x\to 0+$ функций $y(x)$ и $y'(x)$. Как следует из приведённых во введении результатов работы [5], при $\sigma\leqslant -1$ и $a>-2$ для положительного решения $y(x)$ уравнения (1.1), определённого на интервале с нулевым левым концом, существует $y(0)\in[0,+\infty)$. Существование $y'(0)\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}$ вытекает из того, что в силу уравнения (1.1) справедливо неравенство $y''(x)>0$ при $x>0$.

Рассмотрим уравнение (1.1) для $\sigma<0$ и $a\in\mathbb{R}$. Как сказано во введении, в [3] доказано, в частности, что если $\sigma<0$ и $a\leqslant -2$, то $x=0$ является вертикальной асимптотой всех положительных решений уравнения (1.1), определённых на интервалах с нулевым левым концом, а согласно теореме 3 из [5], если $\sigma<0$, $a>-1$ и $\lambda\in\mathbb{R}$, то задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение. Вследствие этого естественно возникают два вопроса.

1. Как ведут себя положительные решения уравнения (1.1), определённые на интервалах с нулевым левым концом, при $x\to 0+$, в случае, когда $\sigma<0$ и $-2<a\leqslant -1$?

2. Могут ли решения уравнения (1.1) в случае $\sigma<0$ и $a>-1$ стремиться к конечной точке на положительной полуоси оси y, когда $x\to 0+$ с наклоном “$\lambda=-\infty$”?

Следующие лемма, теорема и пример дают ответ на первый вопрос.

Лемма 2.1. *Пусть $\sigma<0$, $-2<a\leqslant -1$, $\lambda\in\mathbb{R}$ и $c>0$. Тогда задача Коши (1.1), (1.2) не имеет решения.*

Доказательство. Предположим, что такое решение $y(\cdot)$ существует, и пусть оно определено на $(0,h]$ для некоторого $h>0$. Интегрируя уравнение (1.1), получаем

$$y'(h)-\lambda=\int\limits_0^h x^a y^\sigma(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Так как $y(x)\to c$, когда $x\to 0+$, то $x^a y^\sigma \sim Cx^a$ для некоторого $C>0$, когда $x\to 0+$. Поэтому правая часть равенства (2.1) бесконечна, а его левая часть конечна, получаем противоречие. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть $\sigma<0$ и $-2<a\leqslant -1$. Тогда для любого положительного решения $y(\cdot)$ дифференциального уравнения (1.1), определённого на интервале $(0,x_0]$ при некотором $x_0>0$, такого, что $y'(x_0)\leqslant 0$, имеет место соотношение*

$$\lim_{x\to 0+} y'(x)=-\infty.$$

Доказательство. В теореме 1 работы [5] доказано, что если $\sigma<0$ и $a+\sigma+1\leqslant 0$, то никакое положительное решение уравнения (1.1), определённое на интервале с нулевым левым концом, не стремится к нулю. Следовательно, решение $y(x)$, удовлетворяющее предположениям доказываемой теоремы, стремится при $x\to 0+$ к конечной точке положительной полуоси оси y. Так как $y''(x)>0$, то решения уравнения (1.1) представляют собой выпуклые функции, и поэтому существует $\lim\limits_{x\to 0+} y'(x)$. Обозначим наклон к оси x решения $y(x)$ в точке 0 через $\lambda,\ \ \lambda\in\mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}$. Пусть $\lambda\neq-\infty$. Интегрируя уравнение (1.1), получаем

$$y'(h)-\lambda=\int\limits_0^h x^a y^\sigma(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Из того, что $y(x)\to c>0$ при $x\to 0+$, следует эквивалентность $x^a y^\sigma\sim Cx^a$, где $C>0$, когда $x\to 0+$. Поэтому левая часть равенства (2.2) конечна, а его правая часть бесконечна, что приводит к противоречию. Теорема доказана.

В силу леммы 2.1 и теоремы 2.1 заключаем, что если $\sigma<0$ и $a\in(-2,-1]$, то все положительные решения дифференциального уравнения (1.1), определённые на интервале $(0,x_0]$ при некотором $x_0>0$, имеют наклон $\lambda=-\infty$, когда $x\to 0+$, т.е. ось y является касательной к интегральным кривым решений этого уравнения.

Это приводит к вопросу о единственности решения задачи Коши

$$y(0)=c,\quad y'(0)=-\infty \tag{2.3}$$

для уравнения (1.1) при $\sigma<0$, $-2<a\leqslant-1$ и $c>0$. Следующий пример показывает, что решение задачи Коши (1.1), (2.3) не обязательно будет единственным.

Пример. Пусть

$$x(t)=\frac{c^3}{2}\frac{1}{\sqrt{t(t-1)}+\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})+d},\quad y(t)=\frac{ct}{\sqrt{t(t-1)}+\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})+d}, \tag{2.4}$$

где c и d – произвольные положительные постоянные. Заметим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ корректно определены на интервале $(1,\infty)$. Кроме того, функция $x(t)$ монотонна на $(1,\infty)$, поэтому $x(t)$ и $y(t)$ – параметрические представления некоторой функции $y(x)$. Простыми вычислениями получаем равенства

$$\frac{dx}{dt}(t)=-\frac{c^3}{2}\frac{1}{(\sqrt{t(t-1)}+\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})+d)^2}\sqrt{\frac{t}{t-1}},$$

$$\frac{dy}{dt}(t)=c\frac{\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})+d-\sqrt{t/(t-1)}}{(\sqrt{t(t-1)}+\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})+d)^2},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t)=\frac{c^3}{4}\frac{1+4t+\sqrt{t^{-1}(t-1)^{-1}}(\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})+d)}{(t-1)(\sqrt{t(t-1)}+\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})+d)^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t)=\frac{c}{2}\frac{5t+(5-4t)\sqrt{t/(t-1)}(\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})+d)}{(t-1)(\sqrt{t(t-1)}+\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})+d)^3}.$$

Отсюда следует, что

$$y''_{x^2}(t)=\frac{1}{(x'(t))^3}(y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t))=\frac{2}{c^5}\frac{1}{t^2}(\sqrt{t(t-1)}+\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})+d)^3,$$

а из определения (2.4) – что

$$(x(t))^{-1}(y(t))^{-2}=\frac{2}{c^5}\frac{1}{t^2}(\sqrt{t(t-1)}+\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})+d)^3.$$

Поэтому $x(t)$ и $y(t)$ при каждых $c>0$, $d>0$ задают параметрическое представление функции $y(x)$, являющейся решением уравнения $y''=x^{-1}y^{-2}$.

При $t \to \infty$ получаем $x(t) \to 0$, $y(t) \to c$,

$$y'_x(t) = -\frac{2}{c^2}\sqrt{1-\frac{1}{t}}\left(\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1}) + d - \frac{1}{\sqrt{1-1/t}}\right) \to -\infty$$

для любого $d \in (0,\infty)$. Таким образом, функции $x(t)$ и $y(t)$, определённые равенствами (2.4), дают при каждом положительном d параметрическое представление решения $y(x)$ задачи Коши (2.3) для уравнения $y'' = x^{-1}y^{-2}$. Остаётся убедиться, что при разных d получаются различные решения.

Из определения (2.4) очевидно вытекает, что $y(t)/x(t) = 2t/c^2$. Поэтому, если график функции $y(x)$, имеющей параметрическое представление (2.4), при некотором значении параметра t проходит через точку $(x_0, y_0) \in (0,\infty)^2$, то это значение параметра определяется однозначно: $t_0 = c^2y_0/(2x_0)$ (число $c > 0$ фиксировано). Но тогда из любого уравнения (2.4) однозначно находится $d = c^3/(2x_0) - (\sqrt{t_0(t_0-1)} + \ln(\sqrt{t_0}+\sqrt{t_0-1}))$. Таким образом, функции, имеющие параметрические представления (2.4) с разными d, не только не совпадают друг с другом, но их графики даже не имеют общих точек.

Ответ на второй из поставленных в начале этого пункта вопросов даёт

Лемма 2.2. *Пусть $\sigma < 0$, $a > -1$, $c > 0$ и $\lambda = -\infty$. Тогда задача Коши (1.1), (1.2) не имеет решения.*

Доказательство. Предположим, что такое решение $y(x)$ существует, и пусть это решение определено на $(0,h]$ при некотором $h > 0$. Интегрируя уравнение (1.1), получаем

$$y'(h) - y'(\delta) = \int\limits_{\delta}^{h} y''(x)\,dx = \int\limits_{\delta}^{h} x^a y^\sigma(x)\,dx, \tag{2.5}$$

где $\delta \in (0,h)$. Так как $y \to c$ при $x \to 0+$, то $x^a y^\sigma \sim Cx^a$ для некоторого $C > 0$, когда $x \to 0+$. Поэтому правая часть равенства (2.5) конечна, а его левая часть бесконечна, когда $\delta \to 0+$, что приводит к противоречию. Лемма доказана.

3. Задача Коши для уравнения Эмдена–Фаулера для начальной точки на положительной части оси x. Для уравнения (1.1) рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.3), в которой $\sigma < 0$, $a \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Уточнение постановки задачи (1.1), (1.3) проводится аналогично тому, как это сделано в начале п. 2 для задачи (1.2), т.е. под $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ понимаются односторонние пределы при $x \to x_0+$ функций $y(x)$ и $y'(x)$ соответственно.

Как отмечено выше, в теореме 1 из [5] показано, что если $\sigma < 0$ и $a + \sigma + 1 \leqslant 0$, то не существует положительного решения уравнения (1.1) такого, что его график “стремится к точке” $(0,0)$.

Естественно возникает вопрос: при каких условиях будет существовать решение уравнения (1.1) такое, что его график “стремится” к некоторой точке на оси x? Частичный ответ на этот вопрос следует для $\lambda = 0$ из работы [6]. Действительно, в теореме 1 этой работы показано, что при $\sigma > -1$, если $p(x)$ – непрерывная отрицательная функция на $[0,1]$, существует решение уравнения $y'' + p(x)|y|^\sigma = 0$ такое, что $y(0) = y'(0) = 0$. Отметим, что в этом утверждении начальные условия относятся к точке $(0,0)$, но если применить его к функции $p(x) = -(x-x_0)^a$, где $x_0 > 0$, то получим ответ на наш вопрос для точки x_0.

Ответ на поставленный вопрос для $\lambda \geqslant 0$, $\sigma \in (-1,0)$ даёт

Теорема 3.1. *Пусть $-1 < \sigma < 0$ и $\lambda \geqslant 0$. Тогда задача Коши (1.1), (1.3) имеет решение, определённое на полуинтервале $(x_0, x_0+h]$ при некотором $h > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство решений $y_\mu(x)$ на $[x_0, x_0+h]$ такое, что

$$y_\mu(x_0) = \mu, \quad y'_\mu(x_0) = \lambda.$$

Так как $y''_\mu(x) = x^a y^\sigma_\mu(x)$, имеем, что $y''_\mu(x) > 0$ и $y'_\mu(x) \geqslant 0$ на $[x_0, x_0+h]$. Кроме того, поскольку отображение $x \mapsto x^a$ непрерывно и положительно на $[x_0, x_0+h]$, существуют постоянные m и M такие, что $M \geqslant x^a \geqslant m > 0$ для каждого $x \in [x_0, x_0+h]$.

Пусть $0 < \alpha \leqslant h$. Если $x \in (x_0, x_0+\alpha]$, то $y''_\mu(x) = x^a y^\sigma_\mu(x) \geqslant m y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)$. Следовательно,

$$y'_\mu(x) - \lambda = y'_\mu(x) - y'_\mu(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} y''_\mu(t)\,dt \geqslant m y^\sigma_\mu(x_0+\alpha) \int\limits_{x_0}^{x} dt = m y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)(x - x_0)$$

для каждого $x \in [x_0, x_0+\alpha]$. Воспользовавшись этим неравенством, аналогично получаем

$$y_\mu(x) - \mu = y_\mu(x) - y_\mu(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} y'_\mu(t)\,dt \geqslant \lambda(x - x_0) + \frac{m y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)}{2}(x - x_0)^2$$

для каждого $x \in [x_0, x_0+\alpha]$.

Поэтому

$$y_\mu(x_0+\alpha) \geqslant \mu + \lambda\alpha + \frac{m}{2} y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)\alpha^2 \geqslant \frac{m}{2} y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)\alpha^2,$$

т.е. $y_\mu(x_0+\alpha) \geqslant (m/2)^{1/(1-\sigma)}\alpha^{2/(1-\sigma)}$, а поскольку $0 < \alpha \leqslant h$ произвольно, имеем

$$y_\mu(x) \geqslant \left(\frac{m}{2}\right)^{1/(1-\sigma)} (x - x_0)^{2/(1-\sigma)} \tag{3.1}$$

для каждого $x \in [x_0, x_0+h]$.

Таким образом, справедлива оценка

$$y''_\mu(x) = x^a y^\sigma_\mu(x) \leqslant M(m/2)^{\sigma/(1-\sigma)}(x - x_0)^{(2\sigma)/(1-\sigma)} = c_1(x - x_0)^{(2\sigma)/(1-\sigma)}$$

для каждого $x \in (x_0, x_0+h]$ (где c_1 – постоянная, не зависящая от μ). Интегрируя два раза, получаем

$$y'_\mu(x) - \lambda = \int\limits_{x_0}^{x} y''_\mu(t)\,dt \leqslant c_1 \int\limits_{x_0}^{x} (t - x_0)^{2\sigma/(1-\sigma)}\,dt = c_1\frac{1-\sigma}{1+\sigma}(x - x_0)^{(1+\sigma)/(1-\sigma)} \tag{3.2}$$

и

$$y_\mu(x) - \mu - \lambda(x - x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} y'_\mu(t)\,dt \leqslant c_1\frac{(1-\sigma)^2}{2(1+\sigma)}(x - x_0)^{2/(1-\sigma)} = c_2(x - x_0)^{2/(1-\sigma)} \tag{3.3}$$

для каждого $x \in [x_0, x_0+h]$ (где c_2 – постоянная, не зависящая от μ). Из оценки (3.3) следует, что семейство $(y_\mu(x))_\mu$ является равномерно ограниченным на $[x_0, x_0+h]$, а из оценки (3.2) – что это семейство равностепенно непрерывно. По теореме Арцела–Асколи заключаем, что существует последовательность $\mu' \to 0$ такая, что $y_{\mu'}(x)$ равномерно сходится на $[x_0, x_0+ h]$ к некоторой функции $y(x)$.

В частности, $y_{\mu'}(x)$ равномерно сходится к $y(x)$ на $[x_0+\alpha, x_0+h]$ для каждого $\alpha \in (0, h)$. Из оценки (3.1) (ограниченность снизу) следует, что $y^\sigma_{\mu'}(x)$ равномерно сходится к $y^\sigma(x)$ на $[x_0+\alpha, x_0+h]$. Так как $y''_{\mu'}(x) = x^a y^\sigma_{\mu'}(x)$, то $y''(x) = x^a y^\sigma(x)$ на $[x_0+\alpha, x_0+h]$ (и поскольку α произвольно, это равенство выполняется также на $(x_0, x_0+h]$). Очевидно, что $y(x_0) = 0$ и $y'(x_0) = \lambda$. Теорема доказана.

Теорему 3.1 можно также доказать в случае $-1 < \sigma < 0$ и $\lambda \leqslant 0$. Тогда решение определяется на некотором полуинтервале $[x_0 - h, x_0)$, $h > 0$, для достаточно малого h. Доказательство этого случая вытекает из рассмотрения функции $y(2x_0 - x)$.

Теорема 3.1 даёт нам существование решения задачи Коши (1.1), (1.3). Возникает вопрос о единственности такого решения. В случае, когда $\lambda > 0$ $(\lambda < 0)$, ответ можно получить стандартным способом. Это показано в следующей теореме.

Теорема 3.2. *Пусть* $-1 < \sigma < 0$ *и* $\lambda \in (0, \infty)$. *Тогда задача Коши (1.1), (1.3) имеет единственное решение, определённое на некотором полуинтервале* $(x_0, x_0 + h]$, $h > 0$.

Доказательство. Задача Коши (1.1), (1.3) равносильна интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda(x - x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} (x - t)t^a y^\sigma(t)\, dt. \tag{3.4}$$

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения задачи Коши (1.1), (1.3). Из представления (3.4) вытекает неравенство

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant (x - x_0) \int\limits_{x_0}^{x} t^a |y_1^\sigma(t) - y_2^\sigma(t)|\, dt. \tag{3.5}$$

Вследствие уравнения (1.1) и начальных условий получаем, что $y''(x) > 0$ и $\lambda \leqslant y'(x) \leqslant 2\lambda$ для $x \in [x_0, x_0 + h]$ при некотором $h > 0$. Отсюда вытекает, что

$$\lambda(x - x_0) \leqslant y_1(x) \leqslant 2\lambda(x - x_0) \quad \text{и} \quad \lambda(x - x_0) \leqslant y_2(x) \leqslant 2\lambda(x - x_0) \tag{3.6}$$

для $x \in [x_0, x_0 + h]$. Согласно теореме Лагранжа справедливо равенство

$$|y_1^\sigma(x) - y_2^\sigma(x)| = |\sigma|\xi^{\sigma-1}(x)|y_1(x) - y_2(x)| \quad \text{при} \quad x \in (x_0, x_0 + h], \tag{3.7}$$

где $\xi(x) \geqslant \lambda(x - x_0)$ для $x \in [x_0, x_0 + h]$. Поэтому

$$\xi^{\sigma-1}(x) \leqslant \lambda^{\sigma-1}(x - x_0)^{\sigma-1} \quad \text{при} \quad x \in (x_0, x_0 + h]. \tag{3.8}$$

Из оценок (3.6) для $x \in (x_0, x_0 + h]$ следует, что

$$\frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0} \leqslant \frac{y_1(x) + y_2(x)}{x - x_0} \leqslant 4\lambda < \infty,$$

поэтому $\sup\limits_{x \in (x_0, x_0 + h]} (|y_1(x) - y_2(x)|(x - x_0)^{-1}) < \infty$. Далее, из неравенств (3.5), (3.7), (3.8) вытекает, что

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant (x - x_0)|\sigma|\lambda^{\sigma-1} \sup_{x \in (x_0, x_0 + h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0} \int\limits_{x_0}^{x} t^a (t - x_0)^\sigma\, dt,$$

откуда

$$\frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0} \leqslant |\sigma|\lambda^{\sigma-1} \sup_{x \in (x_0, x_0 + h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0} \int\limits_{x_0}^{x_0 + h} t^a (t - x_0)^\sigma\, dt \tag{3.9}$$

для $x \in (x_0, x_0 + h]$. Так как интеграл в неравенстве (3.9) конечен, то при достаточно малых h получаем, что

$$\sup_{x \in (x_0, x_0 + h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0} < \sup_{x \in (x_0, x_0 + h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0}.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, $y_1 \equiv y_2$. Теорема доказана.

Теорему 3.2 можно также доказать в случае $\lambda < 0$. Тогда единственное решение определяется на некотором полуинтервале $[x_0 - h, x_0)$, $h > 0$, для достаточно малого h. Доказательство в этом случае аналогично предыдущему, поэтому оно опущено.

В случае $\lambda = 0$ рассуждения, проведённые в доказательстве теоремы 3.2, неприменимы. Тем не менее результат, сформулированный в этой теореме, имеет место и в этом случае. Это вытекает из работы [6]. Для полноты изложения в следующей теореме мы получим указанный результат, используя технику, отличную от применяемой в [6].

Теорема 3.3. *Пусть* $-1 < \sigma < 0$ *и* $\lambda = 0$. *Тогда задача Коши (1.1), (1.3) имеет единственное решение, определённое на некотором полуинтервале* $(x_0, x_0 + h]$, $h > 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $a \geqslant 0$. Предположим, что решение $y(x)$ задачи Коши (1.1), (1.3) определено на интервале $(x_0, x_0+h]$, $h > 0$, для некоторого h. Тогда в силу уравнения (1.1) имеем

$$y''(x) = x^a y^\sigma(x) \geqslant x_0^a y^\sigma(x) \tag{3.10}$$

для $x \in (x_0, x_0 + h]$. Из уравнения (1.1) следует, что $y''(x) > 0$ для $x \in [x_0, x_0 + h]$, а из начального условия $y'(x_0) = 0$ – что $y'(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_0 + h]$. Умножая обе части неравенства (3.10) на $y'(x)$ и затем интегрируя полученное неравенство, будем иметь

$$y'^2(x) \geqslant \frac{2x_0^a}{\sigma+1} y^{\sigma+1}(x)$$

для $x \in [x_0, x_0 + h]$. Отсюда, поскольку $y'(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_0 + h]$, следует, что

$$y'(x) \geqslant \left(\frac{2x_0^a}{\sigma+1}\right)^{1/2} (y(x))^{(\sigma+1)/2}$$

для $x \in [x_0, x_0 + h]$. После деления обеих частей этого неравенства на $(y(x))^{(\sigma+1)/2}$ и последующего интегрирования получаем

$$(y(x))^{(1-\sigma)/2} \geqslant \frac{1-\sigma}{2}\left(\frac{2x_0^a}{\sigma+1}\right)^{1/2}(x - x_0),$$

т.е.

$$y(x) \geqslant \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)^{2/(1-\sigma)} \left(\frac{2x_0^a}{\sigma+1}\right)^{1/(1-\sigma)} (x - x_0)^{2/(1-\sigma)} \tag{3.11}$$

при $x \in [x_0, x_0 + h]$.

Задачи Коши (1.1), (1.3) при $\lambda = 0$ равносильна интегральному уравнению

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (x - t)t^a y^\sigma(t)\, dt. \tag{3.12}$$

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения задачи Коши (1.1), (1.3). Для $x \in (x_0, x_0+h]$ в силу представления (3.12) имеем

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)t^a |y_1^\sigma(t) - y_2^\sigma(t)|\, dt \leqslant (x_0 + h)^a \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)|y_1^\sigma(t) - y_2^\sigma(t)|\, dt. \tag{3.13}$$

Согласно теореме Лагранжа и вследствие неравенства (3.11) для $x \in (x_0, x_0 + h]$ получаем

$$|y_1^\sigma(x) - y_2^\sigma(x)| = \xi^{\sigma-1}(x)|y_1(x) - y_2(x)|,$$

где

$$\xi(x) \geqslant \min\{y_1(x), y_2(x)\} \geqslant \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)^{2/(1-\sigma)} \left(\frac{2x_0^a}{\sigma+1}\right)^{1/(1-\sigma)} (x - x_0)^{2/(1-\sigma)}.$$

Так как $\sigma \in (-1, 0)$, для $x \in (x_0, x_0 + h]$ имеем неравенство

$$\xi^{\sigma-1}(x) \leqslant \frac{2(\sigma+1)}{(1-\sigma)^2 x_0^a}(x - x_0)^{-2}.$$

Из последнего неравенства и из (3.13) следует, что

$$|y_1(x)-y_2(x)| \leqslant (x_0+h)^a|\sigma|\frac{2(\sigma+1)}{(1-\sigma)^2x_0^a}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)(t-x_0)^{-2}|y_1(t)-y_2(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a|\sigma|\frac{2(\sigma+1)}{(1-\sigma)^2}\sup_{x\in(x_0,x_0+h]}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)(t-x_0)^{-2+2/(1-\sigma)}\,dt \tag{3.14}$$

при $x\in(x_0,x_0+h]$. Для $x\in(x_0,x_0+h]$ интеграл $\int_{x_0}^{x}(x-t)(t-x_0)^{-2+2/(1-\sigma)}\,dt$ сходится, поскольку $-2+2/(1-\sigma)\in(-1,0)$. Непосредственным вычислением находим

$$\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)(t-x_0)^{-2+2/(1-\sigma)}\,dt = \frac{(1-\sigma)^2}{2(\sigma+1)}(x-x_0)^{2/(1-\sigma)},$$

тогда при $x\in(x_0,x_0+h]$ из неравенства (3.14) вытекает оценка

$$\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}} \leqslant |\sigma|\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a\sup_{x\in(x_0,x_0+h]}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}}. \tag{3.15}$$

Супремум в (3.15) является конечным, поскольку в силу неравенства (3.3) имеем

$$\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}} \leqslant \frac{y_1(x)+y_2(x)}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}} \leqslant 2c_2<\infty$$

для $x\in(x_0,x_0+h]$. Так как $(1+h/x_0)^a\to 1$ при $h\to 0+$ и $\sigma\in(-1,0)$, то из оценки (3.15) следует, что

$$\sup_{x\in(x_0,x_0+h]}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{x-x_0} < \sup_{x\in(x_0,x_0+h]}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{x-x_0}$$

для достаточно малого $h>0$. Противоречие. Следовательно, $y_1\equiv y_2$.

Рассмотрим теперь случай $a<0$. Доказательство в этом случае аналогично доказательству в случае $a\geqslant 0$, поэтому мы укажем только ключевые шаги. Неравенство

$$y''(x)=x^a y^\sigma(x)\geqslant (x_0+h)^a y^\sigma(x)$$

аналогично неравенству (3.10) для $x\in(x_0,x_0+h]$. Применяя тот же метод, что и в случае $a\geqslant 0$, получаем неравенства, аналогичные неравенствам (3.11), (3.13) и (3.15) соответственно:

$$y(x)\geqslant\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)^{2/(1-\sigma)}\left(\frac{2(x_0+h)^a}{\sigma+1}\right)^{1/(1-\sigma)}(x-x_0)^{2/(1-\sigma)},$$

$$|y_1(x)-y_2(x)|\leqslant x_0^a\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)|y_1^\sigma(t)-y_2^\sigma(t)|\,dt$$

и

$$\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}} \leqslant |\sigma|\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{-a}\sup_{x\in(x_0,x_0+h]}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{2/(1-\sigma)}}$$

при $x\in(x_0,x_0+h]$. Из последнего неравенства в силу произвольности h следует, что $y_1\equiv y_2$ в случае $a<0$. Теорема доказана.

Теорему, аналогичную теореме 3.3, можно доказать в случае, когда $\lambda = 0$ и единственное решение определяется на некотором полуинтервале $[x_0 - h, x_0)$, $h > 0$, для достаточно малого $h > 0$. Доказательство аналогично предыдущему, поэтому оно опущено.

Благодарим рецензента за полезные предложения, а также за литературные указания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования, науки и технологического развития Республики Сербия в Математическом институте Сербской академии наук и искусств (проект OI174001) и при частичной финансовой поддержке Министерства образования, науки и технологического развития Республики Сербия (грант 174017).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954.
2. *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1990.
3. *Кнежевич-Милянович Ю.* Вертикальные асимптоты решений уравнения Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 12. С. 1710–1711.
4. *Кнежевич-Милянович Ю.* О задаче Коши для уравнения типа Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 2. С. 260–262.
5. *Krtinić Đ., Mikić M.* Note on asymptotical behavior of solutions of Emden–Fowler equation and the existence and uniqueness of solution of some Cauchy problem // Miskolc Math. Notes. 2017. V. 18. № 1. P. 285–294.
6. *Лысова Т.В.* О решениях сингулярного уравнения типа Эмдена–Фаулера // Вестн. молодых ученых. Сер. Прикл. математика и механика. 2004. № 4. С. 17–22.
7. *Mikić M.* Note about asymptotic behaviour of positive solutions of superlinear differential equation of Emden–Fowler type at zero // Kragujevac J. of Math. 2016. V. 40. № 1. P. 105–112.

Белградский университет,
Сербия

Поступила в редакцию 22.12.2020 г.
После доработки 21.04.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.