ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1023–1031

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.5

О СПЕКТРЕ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

© 2021 г. А. С. Макин

Рассматривается спектральная задача для оператора Дирака с произвольными двухточечными краевыми условиями и произвольным комплекснозначным суммируемым потенциалом. Устанавливается существование нетривиальных краевых задач указанного типа, кратность собственных значений которых неограниченно растёт.

DOI: 10.31857/S0374064121080033

Введение. В настоящей работе изучается система Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y} = \operatorname{col}(y_1(x), y_2(x))$, $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

функции $p, q \in L_1(0,\pi)$ комплекснозначные, с двухточечными краевыми условиями

$$U(\mathbf{y}) \equiv C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = 0, \tag{2}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

коэффициенты a_{ij} могут быть любыми комплексными числами, а строки матрицы

$$A = (CD) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Обозначим через $\|f\| = (|f_1|^2 + |f_2|^2)^{1/2}$ норму произвольного вектора $f = \operatorname{col}(f_1, f_2) \in \mathbb{C}^2$ и положим $\langle f, g\rangle = f_1g_1 + f_2g_2$, а через $\|W\| = \sup\limits_{\|f\|=1} \|Wf\|$ – норму произвольной 2×2-матрицы W. Пусть $L_{2,2}(a,b)$ – пространство двумерных вектор-функций $f(t) = \operatorname{col}(f_1(t), f_2(t))$ с нормой $\|f\|_{L_{2,2}(a,b)} = (\int_a^b \|f(t)\|\,dt)^{1/2}$ и $L_{2,2}^{2,2}(a,b)$ – пространство 2×2-матриц-функций $W(t)$ с нормой $\|W\|_{L_{2,2}^{2,2}(a,b)} = (\int_a^b \|W(t)\|\,dt)^{1/2}$. Оператор $\mathbb{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ будем рассматривать как линейный в пространстве $L_{2,2}(0,\pi)$ с областью определения $D(\mathbb{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] : \mathbb{L}\mathbf{y} \in L_{2,2}(0,\pi),\ \ U_j(\mathbf{y}) = 0 \ \ (j = 1,2)\}$.

Пусть

$$E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x,\lambda) & -s_2(x,\lambda) \\ s_1(x,\lambda) & c_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

– фундаментальная матрица уравнения (1) с краевым условием $E(0,\lambda) = I$, где I – единичная матрица, и $E_0(x,\lambda)$ – фундаментальная матрица невозмущённого уравнения $B\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}$ с краевым условием $E_0(0,\lambda) = I$. Очевидно, что

$$E_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda x) & -\sin(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) & \cos(\lambda x) \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что элементы матрицы $E(x,\lambda)$ связаны соотношением

$$c_1(x,\lambda)c_2(x,\lambda)+s_1(x,\lambda)s_2(x,\lambda)=1, \tag{3}$$

справедливом при любых x, λ. Обозначим через J_{ij} определитель, составленный из i-го и j-го столбцов матрицы A. Обозначим $J_0=J_{12}+J_{34}$, $J_1=J_{14}-J_{23}$, $J_2=J_{13}+J_{24}$.

Методом оператора преобразования в [1] показано, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2), равный

$$\Delta(\lambda)=J_{12}+J_{34}+J_{14}c_2(\pi,\lambda)-J_{23}c_1(\pi,\lambda)-J_{13}s_2(\pi,\lambda)-J_{24}s_1(\pi,\lambda), \tag{4}$$

может быть приведён к виду

$$\Delta(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+\int\limits_0^\pi r_1(t)e^{-i\lambda t}\,dt+\int\limits_0^\pi r_2(t)e^{i\lambda t}\,dt=\Delta_0(\lambda)+R(\lambda), \tag{5}$$

в котором функция

$$\Delta_0(\lambda)=J_0+J_1\cos(\pi\lambda)-J_2\sin(\pi\lambda)=$$
$$=J_{12}+J_{34}+\frac{1}{2}(e^{i\pi\lambda}(J_1+iJ_2)+e^{-i\pi\lambda}(J_1-iJ_2))=J_0+C_1e^{i\pi\lambda}+C_2e^{-i\pi\lambda}, \tag{6}$$

где $C_1=(J_1+iJ_2)/2$, $C_2=(J_1-iJ_2)/2$, является характеристическим определителем невозмущённой задачи

$$B\mathbf{y}'=\lambda\mathbf{y},\quad U(\mathbf{y})=0, \tag{7}$$

а функции r_j принадлежат пространству $L_1(0,\pi)$, $j=1,2$. Если $p,q\in L_2(0,\pi)$ (для краткости будем писать $V\in L_2(0,\pi)$), то $r_j\in L_2(0,\pi)$. Отсюда следует, что функция $\Delta(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, стало быть, для спектра оператора $\mathbb{L}$ задачи (1), (2) могут представиться разве что только следующие возможности: 1) спектр отсутствует; 2) спектр является конечным непустым множеством; 3) спектр представляет собой счётное множество, не имеющее конечной предельной точки; 4) спектр заполняет всю комплексную плоскость.

Из соотношений (5), (6) вытекает, что для задачи (7) случай 1) реализуется, например, для краевых условий, задаваемых матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & i & -1 & i\\ 1 & -i & 1 & i\end{pmatrix},$$

а случай 4) – для краевых условий, задаваемых матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & -i & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 1\end{pmatrix}.$$

Докажем, что случай 2) невозможен. Пусть уравнение

$$\Delta(\lambda)=0$$

имеет конечное число корней λ_k, $k=\overline{1,n}$. Если $C_1C_2\neq 0$, то условия (2) являются регулярными и задача (1), (2) имеет счётное множество собственных значений, поэтому $C_1C_2=0$. Обозначим $P(\lambda)=\prod_{k=1}^n(\lambda-\lambda_k)$. Согласно [2]

$$\Delta(\lambda)=P(\lambda)e^{a\lambda+b},$$

где a, b – некоторые постоянные. Предположим, например, что $C_2=0$. Полагая в равенстве (5) $\lambda=-iy$, где $y>0$, получаем

$$J_0+C_1e^{\pi y}+R(-iy)=P(-iy)e^{-iay+b},$$

откуда вытекает, что

$$J_0 e^{-\pi y} + C_1 + e^{-\pi y} R(-iy) = P(-iy) e^{b - i\operatorname{Re} a y} e^{(\operatorname{Im} a - \pi) y}. \tag{8}$$

Согласно [3, с. 36] выражение в левой части равенства (8) при $y \to \infty$ стремится к C_1. Если $\operatorname{Im} a - \pi \geqslant 0$, то выражение в правой части равенства (8) по абсолютной величине стремится к бесконечности, а если $\operatorname{Im} a - \pi < 0$, то к нулю. Отсюда следует, что $C_1 = 0$. Если $C_1 = C_2 = 0$, то

$$R(\lambda) = P(\lambda) e^{a\lambda + b}. \tag{9}$$

Очевидно, левая часть равенства (9) ограничена на вещественной оси, а правая часть нет, т.е. приходим к противоречию.

Определение. Будем говорить, что задача (1), (2) имеет *классическую асимптотику спектра*, если её спектр представляет собой счётное множество, причём кратности собственных значений равномерно ограничены.

Целью настоящей работы является построение задач (1), (2), для которых реализуется случай 3) и кратности собственных значений неограниченно растут, т.е. задач с неклассической асимптотикой спектра.

Основные результаты. Обозначим $c_j(\lambda) = c_j(\pi, \lambda)$, $s_j(\lambda) = s_j(\pi, \lambda)$, $j = 1, 2$. Обозначим также через PW_σ класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, не превосходящего σ, таких, что $\|f\|_{L_2(R)} < \infty$. Известно [4], что функции $c_j(\lambda)$, $s_j(\lambda)$ допускают представление

$$c_j(\lambda) = \cos(\pi\lambda) + g_j(\lambda), \quad s_j(\lambda) = \sin(\pi\lambda) + h_j(\lambda),$$

где $g_j, h_j \in PW_\pi$, $j = 1, 2$.

Лемма 1 [5]. *Функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ допускают представления*

$$u(\lambda) = \sin(\pi\lambda) + h(\lambda), \quad v(\lambda) = \cos(\pi\lambda) + g(\lambda),$$

где $h, g \in PW_\pi$, тогда и только тогда, когда

$$u(\lambda) = -\pi(\lambda_0 - \lambda) \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n},$$

где $\lambda_n = n + \varepsilon_n$, $\{\varepsilon_n\} \in l_2$,

$$v(\lambda) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n - 1/2},$$

где $\lambda_n = n - 1/2 + \kappa_n$, $\{\kappa_n\} \in l_2$.

Рассмотрим систему Дирака с краевыми условиями, задаваемыми матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Будем предполагать, что $V \in L_2(0, \pi)$. Из представления (4) следует, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) с матрицей A, определённой в (10), может быть приведён к виду

$$\Delta(\lambda) = s_1(\lambda) - s_2(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} r(t) e^{i\lambda t}\, dt = f(\lambda),$$

где $r \in L_2(0, \pi)$, $f \in PW_\pi$. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. *Для любой функции $f \in PW_\pi$ существует такой потенциал $V \in L_2(0, \pi)$, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) с матрицей A, определённой равенством (10), и потенциалом $V(x)$ тождественно равен $f(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть $f(\lambda)$ – произвольная функция из класса PW_π. Из теоремы Пэли–Винера и [3, с. 36] следует, что
$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-\pi|\operatorname{Im}\lambda|}f(\lambda)=0, \tag{11}$$
следовательно, существует столь большое натуральное число N_0, что $|f(\lambda)|<1/100$, если $\operatorname{Im}\lambda=0$, $|\operatorname{Re}\lambda|\geqslant N_0$.

Пусть $\{\lambda_n\}$, $n\in\mathbb{Z}$, – строго монотонно возрастающая последовательность вещественных чисел такая, что $N_0<\lambda_n<N_0+1/100$, если $1\leqslant n\leqslant N_0$, $\lambda_n=n-1/2$, если $n>N_0$, и $\lambda_n=-\lambda_{-n+1}$ для любого n. Обозначим
$$c(\lambda)=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{n-1/2}.$$

Из леммы 1 вытекает равенство
$$c(\lambda)=\cos(\pi\lambda)+g(\lambda), \tag{12}$$
где $g\in PW_\pi$. Из теоремы Пэли–Винера и [3, с. 36] следует, что
$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-\pi|\operatorname{Im}\lambda|}g(\lambda)=0,$$
поэтому
$$|c(\lambda)|\geqslant c_0e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{13}$$
($c_0=\text{const}>0$) при $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M$, где M – некоторое достаточно большое число.

Дифференцируя равенство (12), получаем
$$\dot c(\lambda)=-\pi\sin(\pi\lambda)+\dot g(\lambda). \tag{14}$$
Так как функция $\dot g$ принадлежит классу PW_π, то, согласно [6], имеем
$$\dot c(\lambda_n)=-\pi\sin(\pi\lambda_n)+\tau_n,$$
где
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\tau_n|^2<\infty.$$
Отсюда в силу определения чисел λ_n получаем
$$\dot c(\lambda_n)=\pi(-1)^n+\rho_n, \tag{15}$$
где
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\rho_n|^2<\infty.$$
Следовательно, при всех достаточно больших по абсолютной величине чётных n имеет место неравенство $\dot c(\lambda_n)>0$. Несложно видеть, что для всех $n\in\mathbb{Z}$ справедливо неравенство $\dot c(\lambda_n)\dot c(\lambda_{n+1})<0$. Отсюда вытекает, что
$$(-1)^n\dot c(\lambda_n)>0 \tag{16}$$
при всех $n\in\mathbb{Z}$. Заметим, что из (15) следует равенство
$$\frac{1}{\dot c(\lambda_n)}=\frac{(-1)^n}{\pi}+\sigma_n, \tag{17}$$

где
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\sigma_n|^2 < \infty.$$

Рассмотрим квадратное уравнение
$$w^2 + f(\lambda_n)w - 1 = 0. \tag{18}$$

Оно имеет корни
$$s_n^{\pm} = \frac{-f(\lambda_n) \pm \sqrt{f^2(\lambda_n) + 4}}{2}.$$

Обозначим через $\Gamma(z, r)$ круг с центром в точке z радиуса r. Нетрудно видеть, что все числа s_n^+ лежат внутри круга $\Gamma(1, 1/10)$, а все числа s_n^- – внутри круга $\Gamma(-1, 1/10)$. Пусть $s_n = s_n^+$, если n нечётно, и $s_n = s_n^-$, если n чётно. Так как [6] $\{f(\lambda_n)\} \in l_2$, то из определения чисел s_n следует, что
$$s_n = (-1)^{n+1} + \vartheta_n, \tag{19}$$

где $\{\vartheta_n\} \in l_2$. Из определения чисел s_n и неравенства (16) также следует, что все числа $z_n = s_n/\dot{c}(\lambda_n)$ лежат строго левее мнимой оси, а из (17) и (19) вытекает равенство
$$z_n = -\frac{1}{\pi} + \rho_n,$$

где $\{\rho_n\} \in l_2$. Пусть $\beta_n = s_n - \sin(\pi\lambda_n)$, тогда $\{\beta_n\} \in l_2$ вследствие (19). Обозначим
$$h(\lambda) = c(\lambda) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_n}{\dot{c}(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)}.$$

Согласно [7, с. 120] функция h принадлежит классу PW_π и $h(\lambda_n) = \beta_n$. Обозначим $s(\lambda) = \sin(\pi\lambda) + h(\lambda)$, тогда $s(\lambda_n) = s_n \neq 0$, следовательно, функции $s(\lambda)$ и $c(\lambda)$ не имеют общих корней.

Обозначим
$$Y_0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{pmatrix}.$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующая элементарная

Лемма 2. *Если системы функций $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ полны в $L_2(a, b)$ $(n \in \mathbb{N})$, то система векторов*
$$\Psi_{n,n} = \begin{pmatrix} \{\varphi_n\} \\ \{\psi_n\} \end{pmatrix} \bigcup \begin{pmatrix} \{\varphi_n\} \\ \{-\psi_n\} \end{pmatrix}$$

полна в $L_{2,2}(a, b)$.

Доказательство. Предположим, существует вектор $f(x) = \mathrm{col}\,(f_1(x), f_2(x)) \neq 0$ такой, что
$$\int_a^b (\varphi_n(x)\overline{f_1(x)} + \psi_n(x)\overline{f_2(x)})\,dx = 0, \quad \int_a^b (\varphi_n(x)\overline{f_1(x)} - \psi_n(x)\overline{f_2(x)})\,dx = 0$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда
$$\int_a^b \varphi_n(x)\overline{f_1(x)}\,dx = 0, \quad \int_a^b \psi_n(x)\overline{f_2(x)}\,dx = 0,$$

следовательно, $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv 0$. Лемма доказана.

Из [8] следует, что системы функций $\{\cos(\lambda_n x)\}$ и $\{\sin(\lambda_n x)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ полны в $L_2(0,\pi)$. Отсюда, из определения чисел λ_n и леммы 2 вытекает, что система векторов

$$Y_0(x,\lambda_n) = \begin{pmatrix}\cos(\lambda_n x)\\ \sin(\lambda_n x)\end{pmatrix}$$

$(n \in \mathbb{Z})$ полна в $L_{2,2}(0,\pi)$. Обозначим

$$F(x,t) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\biggl(\frac{s_n}{\dot c(\lambda_n)}(Y_0(x,\lambda_n)Y_0^{\text{т}}(t,\lambda_n)) + \frac{1}{\pi}Y_0(x,n-1/2)Y_0^{\text{т}}(t,n-1/2)\biggr). \tag{20}$$

Из [4] следует, что

$$\|F(\,\cdot\,,x)\|_{L_{2,2}^{2,2}(0,\pi)} + \|F(x,\cdot\,)\|_{L_{2,2}^{2,2}(0,\pi)} < C,$$

где C – постоянная, не зависящая от x. Докажем, что для каждого $x \in [0,\pi]$ однородное уравнение

$$f^{\text{т}}(t) + \int\limits_0^x f^{\text{т}}(s)F(s,t)\,ds = 0, \tag{21}$$

в котором $f(t) = \mathrm{col}\,(f_1(t), f_2(t))$, $f \in L_{2,2}(0,x)$, $f(t) = 0$ при $x < t \leqslant \pi$, имеет только тривиальное решение. Умножая уравнение (21) на $\overline{f^{\text{т}}(t)}$ и интегрируя полученное равенство на отрезке $[0,x]$, получаем

$$\|f\|^2_{L_{2,2}(0,x)} + \int\limits_0^x \biggl\langle \int\limits_0^x f^{\text{т}}(s)F(s,t)\,ds, \overline{f^{\text{т}}(t)}\biggr\rangle\,dt = 0.$$

Учитывая определение (20), несложными вычислениями находим

$$f^{\text{т}}(s)F(s,t) = -\biggl\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\biggl\{z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t),$$

$$f_1(s)\cos(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)] +$$

$$+\frac{1}{\pi}[f_1(s)\cos((n-1/2)s)\cos((n-1/2)t) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)\cos((n-1/2)t),$$

$$f_1(s)\cos((n-1/2)s)\sin((n-1/2)t) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)\sin((n-1/2)t)]\biggr\}\biggr\} =$$

$$= -\biggl\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\biggl\{z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)] +$$

$$+\frac{1}{\pi}[f_1(s)\cos((n-1/2)s)\cos((n-1/2)t) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)\cos((n-1/2)t)],$$

$$z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)] +$$

$$+\frac{1}{\pi}[f_1(s)\cos(((n-1/2)s))\sin((n-1/2)t)f_2(s)\sin((n-1/2)s)\sin((n-1/2)t)]\biggr\}\biggr\},$$

откуда следует, что

$$\int\limits_0^x \biggl\langle \int\limits_0^x f^{\text{т}}(s)F(s,t)\,ds, \overline{f^{\text{т}}(t)}\biggr\rangle\,dt =$$

$$= -\Bigg\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^x \bigg(\int_0^x \Big\{ z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)] +$$

$$+ \frac{1}{\pi}[f_1(s)\cos((n-1/2)s)\cos((n-1/2)t) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)\cos((n-1/2)t)] \Big\}\, ds \bigg) \overline{f_1(t)}\, dt +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^x \bigg(\int_0^x \Big\{ z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)] +$$

$$+ \frac{1}{\pi}[f_1(s)\cos((n-1/2)s)\sin((n-1/2)t) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)\sin((n-1/2)t)] \Big\}\, ds \bigg) \overline{f_2(t)}\, dt \Bigg\} =$$

$$= -\Bigg\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bigg(\int_0^x z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)]\, ds \int_0^x \cos(\lambda_n t)\overline{f_1(t)}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^x [f_1(s)\cos((n-1/2)s) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)]\, ds \int_0^x \cos((n-1/2)t)\overline{f_1(t)}\, dt \bigg) +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bigg(\int_0^x z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)]\, ds \int_0^x \sin(\lambda_n t)\overline{f_2(t)}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^x [f_1(s)\cos((n-1/2)s) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)]\, ds \int_0^x \sin((n-1/2)t)\overline{f_2(t)}\, dt \bigg) \Bigg\} =$$

$$= -\Bigg\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bigg(\int_0^x z_n[f_1(s)\cos(\lambda_n s) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)]\, ds \int_0^x \cos(\lambda_n t)\overline{f_1(t)}\, dt +$$

$$+ \int_0^x [f_1(s)\cos(\lambda_n s) + f_2(s)\sin(\lambda_n s)]\, ds \int_0^x \sin(\lambda_n t)\overline{f_2(t)}\, dt \bigg) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bigg(\int_0^x [f_1(s)\cos((n-1/2)s) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)]\, ds \bigg) \int_0^x \cos((n-1/2)t)\overline{f_1(t)}\, dt +$$

$$+ \int_0^x [f_1(s)\cos((n-1/2)s) + f_2(s)\sin((n-1/2)s)]\, ds \int_0^x \sin((n-1/2)t)\overline{f_2(t)}\, dt \bigg) \Bigg\} =$$

$$= -\Bigg\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bigg(\int_0^x z_n[f_1(t)\cos(\lambda_n t) + f_2(t)\sin(\lambda_n t)]\, dt \int_0^x \cos(\lambda_n t)\overline{f_1(t)}\, dt +$$

$$+ \int_0^x [f_1(t)\cos(\lambda_n t) + f_2(t)\sin(\lambda_n t)]\, dt \int_0^x \sin(\lambda_n t)\overline{f_2(t)}\, dt \bigg) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bigg(\int_0^x [f_1(t)\cos((n-1/2)t) + f_2(t)\sin((n-1/2)t)]\, dt \int_0^x \cos((n-1/2)t)\overline{f_1(t)}\, dt +$$

$$+\int\limits_0^x [f_1(t)\cos(nt)+f_2(t)\sin((n-1/2)t)]\,dt\int\limits_0^x \sin((n-1/2)t)\overline{f_2(t)}\,dt\Big)\Big\}=$$

$$=-\Big\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n\int\limits_0^x [f_1(t)\cos(\lambda_n t)+f_2(t)\sin(\lambda_n t)]\,dt\int\limits_0^x [\overline{f_1(t)}\cos(\lambda_n t)+\overline{f_2(t)}\sin(\lambda_n t)]\,dt+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^x [f_1(t)\cos((n-1/2)t)+f_2(t)\sin((n-1/2)t)]\,dt\times$$

$$\times\int\limits_0^x [\overline{f_1(t)}\cos((n-1/2)t)+\overline{f_2(t)}\sin((n-1/2)t)]\,dt\Big\}=$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n\Big|\int\limits_0^x \langle f(t),Y_0(t,\lambda_n)\rangle\,dt\Big|^2-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_0^x \langle f(t),Y_0(t,(n-1/2))\rangle\,dt\Big|^2.$$

Вследствие равенства Парсеваля получаем

$$\|f\|^2_{L_{2,2}(0,x)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_0^x \langle f(t),Y_0(t,(n-1/2))\rangle\,dt\Big|^2,$$

поэтому

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n\Big|\int\limits_0^x \langle f(t),Y_0(t,\lambda_n)\rangle\,dt\Big|^2=0. \tag{22}$$

Так как $\operatorname{Re} z_n<0$ для любого n, то равенство (22) означает, что $\int_0^x\langle f(t),Y_0(t,\lambda_n)\rangle\,dt=0$. Отсюда и из полноты системы векторов $\{Y_0(t,\lambda_n)\}$ в $L_{2,2}(0,\pi)$ следует тождество $f(t)\equiv 0$.

Из однозначной разрешимости уравнения (21) вытекает [4], что функции $c(\lambda)$ и $-s(\lambda)$ являются элементами первой строки матрицы монодромии

$$\tilde U(\pi,\lambda)=\begin{pmatrix}\tilde c_1(\pi,\lambda) & -\tilde s_2(\pi,\lambda)\\ \tilde s_1(\pi,\lambda) & \tilde c_2(\pi,\lambda)\end{pmatrix}$$

задачи (1), (2) с матрицей A, определённой в (10), и некоторым потенциалом $\tilde V\in L_2(0,\pi)$, т.е.

$$c(\lambda)=\tilde c_1(\pi,\lambda),\quad s(\lambda)=\tilde s_2(\pi,\lambda). \tag{23}$$

В силу (4) характеристический определитель $\tilde\Delta(\lambda)$ этой задачи имеет вид

$$\tilde\Delta(\lambda)=\tilde s_1(\pi,\lambda)-\tilde s_2(\pi,\lambda)=\tilde f(\lambda),$$

где $\tilde f\in PW_\pi$. Из (3), (18) и (23) вытекает равенство

$$\tilde\Delta(\lambda_n)=\tilde s_1(\pi,\lambda_n)-\tilde s_2(\pi,\lambda_n)=\frac{1}{\tilde s_2(\pi,\lambda_n)}-\tilde s_2(\pi,\lambda_n)=\frac{1}{s(\lambda_n)}-s(\lambda_n)=f(\lambda_n),$$

из которого следует, что функция

$$\Phi(\lambda)=\frac{f(\lambda)-\tilde\Delta(\lambda)}{c(\lambda)}=\frac{f(\lambda)-\tilde f(\lambda)}{c(\lambda)}$$

является целой. Так как

$$|f(\lambda)-\tilde{f}(\lambda)|<c_1e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|},\quad c_1=\mathrm{const},\tag{24}$$

то вследствие неравенства (13) получаем, что $|\Phi(\lambda)|\leqslant c_2=\mathrm{const}$, если $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M$.

Обозначим через H объединение вертикальных отрезков $\{z:|\operatorname{Re}z|=n,|\operatorname{Im}z|\leqslant M\}$, где $|n|=N_0+1,N_0+2,\ldots$ Так как функция $c(\lambda)$ является функцией типа синуса [9], то $|c(\lambda)|>\delta>0$, если $\lambda\in H$. Из последнего неравенства, оценки (24) и принципа максимума вытекает неравенство $|\Phi(\lambda)|<c_3=\mathrm{const}$ в полосе $|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant M$. Следовательно, функция $\Phi(\lambda)$ ограничена во всей комплексной плоскости и в силу теоремы Лиувилля является постоянной. Пусть $|\operatorname{Im}\lambda|=M$. Тогда вследствие соотношения (11) имеем $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}(f(\lambda)-\tilde{f}(\lambda))=0$, поэтому $\Phi(\lambda)\equiv 0$, а значит, $f(\lambda)\equiv\tilde{\Delta}(\lambda)$. Теорема доказана.

Примеры функций из класса PW_π, имеющих корни сколь угодно высокой кратности, в литературе известны (см., например, [10, 11]). Заметим, что существование одномерных краевых задач с неограниченно растущей кратностью собственных значений ранее было установлено для оператора Штурма–Лувилля и обыкновенного дифференциального оператора любого чётного порядка [10–12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lunyov A., Malamud M.* On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 441. № 1. P. 57–103.
2. *Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш.* О структуре спектра краевой задачи Штурма–Лиувилля на конечном отрезке времени // Изв. АН РК. Сер. физ.-мат. 2000. № 3. С. 29–34.
3. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
4. *Tkachenko V.* Non-self-adjoint periodic Dirac operators // Oper. Theory: Adv. and Appl. 2001. V. 123. P. 485–512.
5. *Мисюра Т.В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. II // Теор. функц., функц. анализ и их прил. 1979. Т. 31. С. 102–109.
6. *Tkachenko V.* Non-self-adjoint periodic Dirac operators with finite-band spectra // Int. Equat. Oper. Theory. 2000. V. 36. P. 325–348.
7. *Левин Б.Я.* Целые функции (курс лекций). М., 1971.
8. *Седлецкий А.М.* Негармонический анализ // Итоги науки и техн. Сер. сов. мат. и ее прил. Тематич. обз. 2006. Т. 96. С. 106–211.
9. *Левин Б.Я., Островский И.В.* О малых возмущениях множества корней функций типа синуса // ИАН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43. № 1. С. 87–110.
10. *Макин А.С.* О двухточечной краевой задаче для оператора Штурма–Лиувилля с неклассической асимптотикой спектра // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 5. С. 564–572.
11. *Макин А.С.* Об одной задаче для оператора Штурма–Лиувилля с неклассической асимптотикой спектра // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 317–322.
12. *Makin A.* Two-point boundary value problems with nonclassical asymptotics on the spectrum // Electr. J. Differ. Equat. 2018. V. 2018. № 95. P. 1–7.

Российский технологический университет (МИРЭА),
г. Москва

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.
После доработки 20.07.2020 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.