ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1032–1038

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ВЕБЕРА, ВОЗМУЩЁННОГО δ-ФУНКЦИЕЙ ДИРАКА

© 2021 г. А. С. Печенцов

В $L^2[0,+\infty)$ рассматривается оператор Штурма–Лиувилля, порождаемый выражением

$$l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2-2}{4} + a\delta(x-b), \quad a,b>0,$$

и краевым условием $y(0)=0$. Доказывается, что собственные значения λ_n, $n=1,2,\ldots$, этого оператора удовлетворяют неравенствам $1<\lambda_1\leqslant 2$, $2n-1\leqslant\lambda_n\leqslant 2n$, $n=2,3,\ldots$

DOI: 10.31857/S0374064121080045

Введение. В пространстве $L^2[0,+\infty)$ рассмотрим оператор Штурма–Лиувилля, порождаемый выражением

$$l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2-2}{4} + a\delta(x-b) \tag{1}$$

(δ – дельта-функция Дирака, a и b – положительные числа) и граничным условием $y(0)=0$.

При определении оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями будем следовать подходу, развитому А.М. Савчуком и А.А. Шкаликовым в работах [1, 2]. Для абсолютно непрерывной на любом отрезке $[0,t]$, $t>0$, функции $y(x)$ определим её квазипроизводную, положив

$$y^{[1]}(x) := \frac{dy(x)}{dx} - Q(x)y(x),$$

где

$$Q(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{2} + aH(x-b),$$

а H – функция Хевисайда: $H(x)=0$, если $x<0$, и $H(x)=1$ при $x\geqslant 0$. Если функция $y^{[1]}(x)$ в свою очередь является абсолютно непрерывной, то действие оператора (1) запишется в виде

$$l_{a,b}[y] := -\frac{dy^{[1]}(x)}{dx} - Q(x)y^{[1]}(x) - Q^2(x)y(x).$$

Нетрудно убедиться, что включение $y^{[1]}\in AC[0,t]$ (при всех $t>0$) равносильно тому, что функция y' обладает следующими четырьмя свойствами:

1) $y'\in C[0,b)\bigcup C(b,+\infty)$;

2) существуют односторонние пределы $y'(b-)$ и $y'(b+)$, и для них имеет место равенство $y'(b+)-y'(b-)=ay(b)$;

3) функция y', доопределённая в точке b значением $y'(b-)$, абсолютно непрерывна на отрезке $[0,b]$;

4) функция y', доопределённая в точке b значением $y'(b+)$, абсолютно непрерывна на отрезке $[b,t]$ (при всех $t>b$).

В пространстве $L^2[0,+\infty)$ зададим оператор $\mathcal{H}_{a,b}$, положив

$$\mathcal{H}_{a,b}y = l_{a,b}[y],$$

$\operatorname{Dom}\mathcal{H}_{a,b}:=\{\, y\in L^2[0,+\infty):\ y(x)\in AC[0,+\infty),\ \ y'(x)\in AC([0,+\infty)\setminus\{b\}),\ \ y'(b+)-y'(b-)= = ay(b),\ \ y(0)=0,\ \ l_{a,b}[y]\in L^2[0,+\infty)\}$.

Локализация спектра оператора $\boldsymbol{\mathcal{H}_{a,b}}$.

Теорема. *Собственные значения* λ_n *оператора* $\mathcal{H}_{a,b}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$1 < \lambda_1 \leqslant 2, \quad 2n-1 \leqslant \lambda_n \leqslant 2n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Доказательство. Функции параболического цилиндра $D_\lambda(x)$, $D_\lambda(-x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения Вебера [3]

$$-y''(x) + \frac{x^2-2}{4}y(x) = \lambda y(x). \tag{2}$$

Тогда функция

$$V_\lambda(x) = \frac{\Gamma(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}}(D_\lambda(-x) - \cos(\pi\lambda)D_\lambda(x)),$$

где $\Gamma(\lambda)$ – гамма-функция Эйлера, также является решением уравнения Вебера. Вронскиан функций $D_\lambda(x)$, $V_\lambda(x)$ равен единице. Поэтому эти функции образуют фундаментальную систему решений уравнения Вебера. Так как $D_\lambda(x) \in L^2[0,+\infty)$, а $V_\lambda(x) \notin L_2[0,+\infty)$, то собственная функция $\psi(x,\lambda)$ оператора $\mathcal{H}_{a,b}$ на луче $b \leqslant x < +\infty$ пропорциональна функции $D_\lambda(x)$, а на отрезке $0 \leqslant x \leqslant b$ допускает представление

$$\psi(x,\lambda) = C_1(\lambda)D_\lambda(x) + C_2(\lambda)V_\lambda(x).$$

Коэффициенты $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$ определяются из условий в точке b:

$$C_1(\lambda)D_\lambda(b) + C_2(\lambda)V_\lambda(b) = D_\lambda(b), \quad C_1(\lambda)D'_\lambda(b) + C_2(\lambda)V'_\lambda(b) = D'_\lambda(b) - aD_\lambda(b).$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$C_1(\lambda) = 1 + aD_\lambda(b)V_\lambda(b), \quad C_2(\lambda) = -aD^2_\lambda(b).$$

Учитывая граничное условие $y(0) = 0$, заключаем, что спектр оператора $\mathcal{H}_{a,b}$ совпадает с множеством корней целой функции $\psi(0,\lambda)$:

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) = \psi(0,\lambda) &= (1 + aD_\lambda(b)V_\lambda(b))D_\lambda(0) - aD^2_\lambda(b)V_\lambda(0) = \\ &= D_\lambda(0) + \frac{a\Gamma(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}}D_\lambda(0)D_\lambda(b)(D_\lambda(-b) - D_\lambda(b)).\end{aligned} \tag{3}$$

Невозмущённый оператор $\mathcal{H}_0$, соответствующий значению $a = 0$, имеет дискретный спектр $\{\lambda^0_n\}^\infty_{n=1}$, являющийся множеством корней целой функции

$$D_\lambda(0) = \sqrt{\pi}\frac{2^{\lambda/2}}{\Gamma((1-\lambda)/2)}.$$

Следовательно, $\lambda^0_n = 2n-1$, $n = 1, 2, \ldots$

Функция $D_\lambda(x)$ при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ может быть задана в виде интеграла [4]

$$D_\lambda(x) = \frac{\exp(-x^2/4)}{\Gamma(-\lambda)}\int\limits_0^{+\infty}\exp\biggl(-\frac{t^2}{2} - tx\biggr)t^{-\lambda-1}\,dt, \tag{4}$$

а при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ – в виде контурного интеграла [4]

$$D_\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\pi i}\int\limits_l \exp\biggl(-\frac{t^2}{2} + tx\biggr)t^{-\lambda-1}\,dt. \tag{5}$$

В (5) контур l состоит из: интервала $(-\infty,-r)$, $r>0$, проходимого от $-\infty$ до $-r$, окружности $\gamma = r\exp(i\phi)$, ϕ возрастает от $-\pi$ до π, и интервала $(-\infty,-r)$, проходимого от $-r$ до $-\infty$. При $\lambda<0$ из представления (4) вытекают неравенства

$$D_\lambda(b)>0, \quad D_\lambda(-b)-D_\lambda(b)>0,$$

кроме того,

$$D_\lambda(0)=\sqrt{\pi}\frac{2^{\lambda/2}}{\Gamma((1-\lambda)/2)}>0, \quad \Gamma(-\lambda)>0.$$

Поэтому в силу представления (3) характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ при $\lambda<0$ положителен и, следовательно, оператор $\mathcal{H}_{a,b}$ не имеет отрицательных собственных значений (с.з.).

Лемма 1. *Характеристический определитель* $\Delta(\lambda)$ *положителен при* $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

Доказательство. Воспользовавшись представлениями (3) и (4) и равенством $D_0(b) = \exp(-b^2/4)$, вычислим $\Delta(0)$:

$$\Delta(0)=1+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\exp(-b^2/2)\lim_{\lambda\to 0-}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-t^2/2)(\exp(tb)-\exp(-tb))t^{-\lambda-1}\,dt.$$

Так как в этом несобственном интеграле подынтегральная функция положительна и

$$\exp(-t^2/2)(\exp(tb)-\exp(-tb))t^{-\lambda-1}\sim bt^{-\lambda} \quad \text{при} \quad t\to 0+,$$

то он сходится при $\lambda<1$ и

$$\lim_{\lambda\to 0-}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-t^2/2)(\exp(tb)-\exp(-tb))t^{-\lambda-1}\,dt=c^2>0.$$

Таким образом,

$$\Delta(0)=1+\frac{ac^2}{\sqrt{2\pi}}\exp(-b^2/2)>0.$$

Используя тождество [5]

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2), \quad 2z\neq 0,-1,-2,\ldots,$$

и равенство $D_1(b)=b\exp(-b^2/4)$, вычислим $\Delta(1)$:

$$\Delta(1)=-2ab^2\exp(-b^2/2)\lim_{\lambda\to 1}\frac{\Gamma(-\lambda)}{\Gamma((1-\lambda)/2)}=ab^2\exp(-b^2/2)>0.$$

Функция $\Delta(\lambda)$ принимает положительные значения и внутри отрезка [0,1]. В противном случае найдутся $\widetilde{\lambda}$, $\widehat{\lambda}$ такие, что $0<\widetilde{\lambda}<\widehat{\lambda}<1$ и

$$\Delta(\widetilde{\lambda})=\psi(0,\widetilde{\lambda})=\Delta(\widehat{\lambda})=\psi(0,\widehat{\lambda})=0.$$

Следовательно, собственная функция $\psi(x,\widetilde{\lambda})$ оператора $\mathcal{H}_{a,b}$, соответствующая с.з. $\widetilde{\lambda}$, имеет нуль $x_{1,\widetilde{\lambda}}=0$. Корни уравнения $\psi(x,\lambda)=0$ являются непрерывными функциями от λ [6, лемма 3.1, с. 23], и при увеличении λ каждый нуль x_λ передвигается влево [6, теорема 3.2; 7, с. 144]. Поэтому собственная функция $\psi(x,\widehat{\lambda})$ имеет отрицательный нуль $x_{1,\widehat{\lambda}}$ и нуль $x_{2,\widehat{\lambda}}=0$. По теореме Штурма [6, теорема 3.1] между двумя нулями $x_{1,\widehat{\lambda}}<x_{2,\widehat{\lambda}}=0$ решения $\psi(x,\widehat{\lambda})$

уравнения (2) при $\lambda = \widehat{\lambda} < 1$ заключён по крайней мере один нуль решения $D_1(x)$ уравнения (2) при $\lambda = 1$. Но функция $D_1(x) = x\exp(-x^2/4)$ не имеет отрицательных нулей. Полученное противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

Пусть $1 < \lambda < 3$. На этом интервале нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ совпадают с нулями функции

$$\Delta_1(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{D_\lambda(0)} = 1 + \frac{a\Gamma(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} D_\lambda(b)(D_\lambda(-b) - D_\lambda(b)).$$

При $\operatorname{Re}\lambda > 1$ функция $D_\lambda(x)$ может быть задана в виде интеграла

$$D_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(x^2/4)\int\limits_0^{+\infty}\exp(-t^2/2)t^\lambda\cos(xt - \pi\lambda/2)\,dt.$$

Тогда

$$D_\lambda(-b) - D_\lambda(b) = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(x^2/4)\int\limits_0^{+\infty}\exp(-t^2/2)t^\lambda\sin(bt)\,dt\,\sin(\pi\lambda/2).$$

Учитывая соотношение

$$\Gamma(-\lambda)\Gamma(1+\lambda) = -\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}, \quad \lambda \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

получаем уравнение

$$\frac{C(\lambda)S(\lambda)}{\cos(\pi\lambda/2)} = -d\Gamma(\lambda+1), \tag{6}$$

в котором

$$C(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty}\exp(-t^2/2)t^\lambda\cos(bt - \pi\lambda/2)\,dt,$$

$$S(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty}\exp(-t^2/2)t^\lambda\sin(bt)\,dt, \quad d = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\exp(-b^2/2)}{a}.$$

Так как

$$\lim_{\lambda\to 1+}(C(\lambda)S(\lambda)) = C(1)S(1) = S^2(1) = \frac{\pi}{2}b^2\exp(-b^2) > 0,$$

то

$$\lim_{\lambda\to 1+}\frac{C(\lambda)S(\lambda)}{\cos(\pi\lambda/2)} = -\infty.$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\lambda\to 3-}(C(\lambda)S(\lambda)) = C(3)S(3) = -S^2(3) = -\frac{\pi}{2}b^2(b^2-3)^2\exp(-b^2).$$

Поэтому, если $b \neq \sqrt{3}$, то

$$\lim_{\lambda\to 3-}\frac{C(\lambda)S(\lambda)}{\cos(\pi\lambda/2)} = +\infty,$$

а если $b = \sqrt{3}$, то

$$\lim_{\lambda\to 3-}\frac{C(\lambda)S(\lambda)}{\cos(\pi\lambda/2)} = 0.$$

Следовательно, поскольку обе части уравнения (6) непрерывны $(\lambda > 0)$, а его правая часть при $\lambda \in [1,3]$ отрицательна и убывает, то на интервале $(1,3)$ уравнение (6) имеет хотя бы одно решение.

Лемма 2. *На интервале* $(1,3)$ *характеристический определитель* $\Delta(\lambda)$ *имеет единственный нуль* λ_1, *причём* $\lambda_1 \leqslant 2$.

Доказательство. Уравнение (6) запишем в виде

$$S^2(\lambda)\sin(\pi\lambda/2) + A(\lambda)\cos(\pi\lambda/2) = 0, \tag{7}$$

где

$$A(\lambda) = S(\lambda)\int\limits_0^{+\infty} \exp(-t^2/2)t^\lambda \cos(bt)\,dt + d\Gamma(\lambda+1).$$

Так как выражение $A^2(\lambda) + S^4(\lambda)$ не принимает нулевых значений, то уравнение (7) равносильно уравнению

$$\sin(\phi(\lambda) + \pi\lambda/2) = 0, \tag{8}$$

в котором

$$\phi(\lambda) = \arccos\frac{S^2(\lambda)}{\sqrt{A^2(\lambda) + S^4(\lambda)}}.$$

Заметим, что $0 \leqslant \phi(\lambda) \leqslant \pi/2$. Поэтому при $\lambda \in (1,3)$ аргумент функции $\sin$ в уравнении (8) принадлежит интервалу $(0,2\pi)$, а значит, это уравнение равносильно уравнению

$$\phi(\lambda) + \frac{\pi\lambda}{2} = \pi,$$

которое на интервале $(1,3)$ в силу непрерывности функции $\phi(\lambda)$ и того, что $\phi(\lambda) \in (0,\pi/2)$ и $\phi(1) \neq \pi/2$, имеет хотя бы один корень. Обозначим этот корень через λ_1. Если $2 < \lambda < 3$, то $\pi < \phi(\lambda) + \pi\lambda/2 < 2\pi$, а значит, уравнение (8) не имеет корней при $2 < \lambda < 3$. Поэтому $1 < \lambda_1 \leqslant 2$. Таким образом, $\psi(0,\lambda_1) = 0$ и собственная функция $\psi(x,\lambda_1)$ оператора $\mathcal{H}_{a,b}$, соответствующая с.з. λ_1, имеет нуль $x_{1,\lambda_1} = 0$. Такой же нуль $x^0_{1,1} = 0$ имеет решение $D_1(x)$ уравнения (2) при $\lambda = 1$.

Предположим, что существует другое с.з. $\widetilde{\lambda}$ оператора $\mathcal{H}_{a,b}$ и $\lambda_1 < \widetilde{\lambda} \leqslant 2$. Тогда $\psi(0,\widetilde{\lambda}) = 0$ и, следовательно, $x_{2,\widetilde{\lambda}} = 0$ является нулём функции $\psi(x,\widetilde{\lambda})$. Собственная функция $\psi(x,\widetilde{\lambda}) = 0$ имеет также отрицательный нуль $x_{1,\widetilde{\lambda}}$ – результат сдвига влево нуля $x_{1,\lambda_1} = 0$ собственной функции $\psi(x,\lambda_1)$ при возрастании λ от λ_1 до $\widetilde{\lambda}$. Таким образом, имеем неравенства

$$x^0_{1,3} \leqslant x_{1,\widetilde{\lambda}} < x_{2,\widetilde{\lambda}} = 0,$$

где $x^0_{1,3} = -\sqrt{3}$ – нуль функции $D_3(x)$. Нетрудно убедиться в том, что

$$D_3(x) = 2^{-3/2}\exp\biggl(-\frac{x^2}{4}\biggr)x(x^2-3),$$

поэтому функция $D_3(x)$ имеет всего один отрицательный нуль $x^0_{1,3} \leqslant x_{1,\widetilde{\lambda}}$. Пришли к противоречию с теоремой Штурма [6, теорема 3.1], которая утверждает, что между двумя нулями $x_{1,\widetilde{\lambda}}$, $x_{2,\widetilde{\lambda}}$ решения $\psi(x,\widetilde{\lambda})$ уравнения (2) при $\lambda = \widetilde{\lambda} < 3$ заключён по крайней мере один нуль решения $D_3(x)$ уравнения (2) при $\lambda = 3$. Полученное противоречие доказывает единственность нуля характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ на интервале (1,3). Лемма доказана.

Если $b = \sqrt{3}$, то $D_3(b) = 0$, и $\Delta(3) = 0$ в силу (3). Значит, при $b = \sqrt{3}$ вторым с.з. оператора $\mathcal{H}_{a,b}$ будет $\lambda_2 = 3$.

Если $b \neq \sqrt{3}$, то $\Delta(3) < 0$, и, следовательно, $\lambda = 3$ не является с.з. оператора.

Рассмотрим уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ на произвольном отрезке $[2n-1, 2n+1]$, $n = 1, 2, \ldots$ Находим

$$\Delta(2n-1) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} D_{2n-1}(b)(D_{2n-1}(-b) - D_{2n-1}(b)) \lim_{\lambda \to 2n-1} (\Gamma(-\lambda) D_\lambda(0)),$$

$$\Delta(2n+1) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} D_{2n+1}(b)(D_{2n+1}(-b) - D_{2n+1}(b)) \lim_{\lambda \to 2n+1} (\Gamma(-\lambda) D_\lambda(0)).$$

Из представления [4]

$$D_{2n-1}(b) = 2^{-(2n-1)/2} \exp(-b^2/4) H_{2n-1}(b/\sqrt{2}), \tag{9}$$

где $H_{2n-1}(x/\sqrt{2})$ – полином Эрмита степени $2n-1$, вытекает (в силу нечётности полинома Эрмита) равенство

$$D_{2n-1}(-b) - D_{2n-1}(b) = -2D_{2n-1}(b).$$

Так как

$$\lim_{\lambda \to 2n-1} (\Gamma(-\lambda) D_\lambda(0)) = 2^{-n-1/2} \Gamma(-n + 1/2),$$

то

$$\Delta(2n-1) = -\frac{a}{\sqrt{\pi} 2^n} D^2_{2n-1}(b) \Gamma(-n + 1/2).$$

Аналогично получаем

$$\Delta(2n+1) = -\frac{a}{\sqrt{\pi} 2^{n+1}} D^2_{2n+1}(b) \Gamma(-n - 1/2).$$

Поскольку $\Gamma(-n+1/2)\Gamma(-n-1/2) < 0$, то произведение $\Delta(2n-1)\Delta(2n+1) < 0$ отрицательно, если b не является корнем полиномов Эрмита $H_{2n-1}(x/\sqrt{2})$, $H_{2n+1}(x/\sqrt{2})$. Таким образом, на концах отрезка $[2n-1, 2n+1]$ непрерывная функция $\Delta(\lambda)$ принимает значения разных знаков, если b не является корнем полиномов Эрмита $H_{2n-1}(b)$, $H_{2n+1}(b)$. Следовательно, в этом случае на интервале $(2n-1, 2n+1)$ существует нуль λ_n функции $\Delta(\lambda)$, который является с.з. оператора $\mathcal{H}_{a,b}$.

Доказательство единственности нуля функции $\Delta(\lambda)$ на интервале $(2n-1, 2n+1)$ проведём методом математической индукции. При $n = 1$ единственность нуля функции $\Delta(\lambda)$ на интервале $(1, 3)$ доказана в лемме 1. Предположим, что на n-м интервале $(2n-1, 2n+1)$ функция $\Delta(\lambda)$ также имеет ровно один нуль λ_n. Докажем, что тогда и на интервале $(2n+1, 2n+3)$ она имеет равно один нуль. Заметим, что функция $D_{2n+1}(x)$ имеет n отрицательных нулей (следует из представления (9), в котором полином Эрмита $H_{2n+1}(x)$ степени $2n+1$ является нечётной функцией. При переходе на следующий интервал $(2n+1, 2n+3)$ функция $\psi(x, \lambda_{n+1})$ будет иметь n отрицательных нулей $x_{1,\lambda_{n+1}} < x_{2,\lambda_{n+1}} < \ldots < x_{n,\lambda_{n+1}} < 0$ и нуль $x_{n+1,\lambda_{n+1}} = 0$. При этом функция $D_{2n+3}(x)$ имеет $n+1$ отрицательных нулей. Предположение о существовании у функции $\Delta(\lambda)$ ещё одного нуля $\widetilde{\lambda}$, $\lambda_{n+1} < \widetilde{\lambda} < 2n+3$, означает, что функция $\psi(x, \widetilde{\lambda})$ имеет $n+1$ отрицательных нулей $x_{1,\widetilde{\lambda}} < x_{2,\widetilde{\lambda}} < \ldots < x_{n+1,\widetilde{\lambda}} < 0$ и нуль $x_{n+2,\widetilde{\lambda}} = 0$. По теореме Штурма [6, теорема 3.1; 7, с. 142] между каждыми двумя из этих нулей решения $\psi(x, \widetilde{\lambda})$ уравнения (2) при $\lambda = \widetilde{\lambda} < 2n+3$ заключён по крайней мере один нуль решения $D_{2n+3}(x)$ того же уравнения при $\lambda = 2n+3$. Следовательно, функция $D_{2n+3}(x)$ должна иметь не менее $n+2$ отрицательных нулей. Полученное противоречие доказывает единственность нуля функции $\Delta(\lambda)$ на интервале $(2n+1, 2n+3)$.

Уточним расположение с.з. λ_n на интервале $(2n-1, 2n+1)$. Воспользуемся уравнением (8). При $2n < \lambda < 2n+1$ справедливы неравенства

$$\pi n < \phi(\lambda) + \frac{\pi\lambda}{2} < \pi(n+1),$$

из которых следует, что $\sin(\phi(\lambda)+\pi\lambda/2)$ не обращается в нуль на этом интервале. Поэтому $2n-1<\lambda_n\leqslant 2n$.

Если b является корнем полинома Эрмита $H_{2n+1}(x/\sqrt{2})$, то $D_{2n+1}(b)=0$ в силу (9). Поэтому из представления (3) вытекает, что $\Delta(2n+1)=0$. Следовательно, $\lambda_{n+1}=2n+1$ является с.з.оператора $\mathcal{H}_{a,b}$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что уравнение (3) позволяет находить асимптотику с.з. λ_n при $n\to+\infty$ и расположение первого с.з. λ_1 в зависимости от параметров a и b, включая случай $a<0$. Для оператора Эйри с δ-взаимодействием асимптотика с.з. найдена в работе [8], формулы регуляризованных следов получены в работе [9]. След разности сингулярных операторов Штурма–Лиувилля с потенциалом, содержащим δ-функции, в случае непрерывного спектра вычислен в [10]. Асимптотика с.з. и формула регуляризованного следа для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с потенциалом, содержащем δ-функции, установлена в работе [11]. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с δ-потенциалом вычислен в работе [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 897–912.
2. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. Моск. мат. о-ва. 2003. Т. 64. С. 159–212.
3. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М., 1963.
4. *Славянов С.Ю.* Асимптотика решений одномерного уравнения Шрёдингера. Л., 1990.
5. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М., 1990.
6. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М., 1988.
7. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М., 1960.
8. *Печенцов А.С., Попов А.Ю.* Распределение спектра одного сингулярного оператора Штурма–Лиувилля, возмущённого δ-функцией Дирака // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 168–179.
9. *Печенцов А.С.* Регуляризованные следы оператора Эйри, возмущённого δ-функцией Дирака // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 498–503.
10. *Pechentsov A.* Trace of a difference of singular Sturm–Liouville operators with a potential containing Dirac functions // Russ. J. of Math. Phys. 2013. V. 20. № 2. P. 230–238.
11. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С. 735–751.
12. *Савчук А.М.* Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма Лиувилля с δ-потенциалом // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55. № 6. С. 155–156.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.05.2020 г.
После доработки 04.02.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.