ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1039–1048

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ НА ПЛОСКОСТИ

© 2021 г. **Е. А. Бадерко, М. Ф. Черепова**

Рассмотрены первая и вторая начально-краевые задачи для параболической по Петровскому системы второго порядка с переменными коэффициентами в ограниченной области на плоскости с негладкими боковыми границами. Доказана единственность решения этих задач в классе функций, непрерывных вместе с пространственной производной первого порядка в замыкании области.

DOI: 10.31857/S0374064121080057

**Введение.** Работа посвящена вопросу о единственности классических решений начально-краевых задач для параболических по Петровскому систем второго порядка в плоских областях с негладкими боковыми границами. В случае одного уравнения единственность классического решения первой начально-краевой задачи следует из принципа максимума (см., например, [1]), а единственность классического решения второй начально-краевой задачи установлена в [2, 3] с помощью теоремы о знаке косой производной. Заметим, что для систем, в отличие от уравнений, принцип максимума, вообще говоря, места не имеет (см. [4]).

Если область $\Omega$ имеет гладкую боковую границу, то однозначная разрешимость параболических начально-краевых задач для систем в классе Гёльдера $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$ следует из работы [5] (см. также [6, с. 706–707]). В случае областей с негладкими боковыми границами единственность решения первой начально-краевой задачи доказана в [7, 8] для одномерной по пространственной переменной $x$ параболической системы второго порядка с постоянными коэффициентами в классе $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ при дополнительном условии на старшую производную $\partial_x^2 u$ решения и на характер его гладкости по временно́й переменной, а в [9] – для одномерной параболической системы второго порядка с переменными коэффициентами в классе Гёльдера $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$.

В настоящей работе рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для одномерных по пространственной переменной параболических систем с переменными коэффициентами в плоской ограниченной области $\Omega$ с негладкими боковыми границами и доказывается единственность их решений в классе $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ функций, непрерывных вместе с пространственной производной первого порядка в замыкании области. Результаты настоящей работы анонсированы в [10].

Статья состоит из трёх пунктов. В п. 1 ставится начально-краевая задача, приводятся необходимые сведения и формулируются основные теоремы единственности решений. В п. 2 доказывается вспомогательное утверждение, а в п. 3 – теоремы единственности.

**1. Необходимые сведения и формулировка основных результатов.** В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ 0 < t < T\}$, $T < +\infty$, рассматривается параболический по Петровскому [11] матричный оператор

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{k=0}^{2} A_k(x,t)\partial_x^k u, \quad u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{т}}, \quad m > 1,$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x^k = \partial^k/\partial x^k$, $A_k = \|a_{ij}^k\|_{i,j=1}^m$ – $m \times m$-матрицы, элементы которых – вещественные функции, определённые в $\overline{D}$ и удовлетворяющие условиям:

а) собственные числа $\mu_r$ матрицы $A_2$ подчиняются неравенству $\operatorname{Re}\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \overline{D}$, $r = \overline{1,m}$;

б) имеют место включения $a_{ij}^k \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$, $\alpha \in (0,1)$, $i,j = \overline{1,m}$, $k = 0,1,2$, где $H^{\beta,\beta/2}(\overline{D})$ ($\beta$ – нецелое число) – пространство Гёльдера [6, с. 16].

Известно (см., например, [12, с. 73; 13, с. 310]), что выполнение условий а) и б) обеспечивает существование фундаментальной матрицы решений (ф.м.р.) $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D} \times \overline{D}$, $t > \tau$, системы $Lu = 0$, и при этом справедливы оценки

$$|\partial_t^l \partial_x^k \Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-(2l+k+1)/2} \exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\},$$
$$2l + k \leqslant 2; \quad (x,t;\xi,\tau) \in \overline{D} \times \overline{D}, \quad t > \tau,$$

для некоторых положительных постоянных $C$ и $c$, где $\partial_t^l = \partial^l/\partial t^l$. Здесь и далее для матрицы $B$ (вектора $b$) под нормой $|B|$ (соответственно нормой $|b|$) понимаем максимум из модулей её элементов (его компонент).

В полосе $D$ выделяется область $\Omega = \{(x,t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t)\}$ с негладкими, вообще говоря, боковыми границами $\Sigma_k = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g_k(t)\}$, $k = 1,2$, где функции $g_k$ удовлетворяют условиям

$$|g_k(t+\Delta t) - g_k(t)| \leqslant \mathcal{M}|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}, \quad t, t+\Delta t \in [0,T], \quad k = 1,2, \quad \mathcal{M} = \text{const}, \tag{1}$$

$$g_1(t) < g_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

В $\Omega$ рассматривается задача отыскания классического решения системы

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = 0, \quad g_1(0) \leqslant x \leqslant g_2(0), \tag{4}$$

и одному из следующих граничных условий:

$$u(g_k(t),t) = \psi_k(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1,2, \tag{5}$$

или

$$\partial_x u(g_k(t),t) = \theta_k(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1,2. \tag{6}$$

Определим функциональные пространства, которые нам будут нужны в дальнейшем. Для любого отрезка $[\tau,\eta]$, $0 \leqslant \tau < \eta \leqslant T$, через $\underset{0}{C}[\tau,\eta]$ обозначим пространство непрерывных вектор-функций $\psi : [\tau,\eta] \to \mathbb{R}^m$, для которых $\psi(\tau) = 0$; при этом $\|\psi;[\tau,\eta]\|^0 = \max\limits_{t\in[\tau,\eta]} |\psi(t)|$. Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T],$$

– оператор дробного дифференцирования порядка 1/2. Через $\underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$ обозначим (см. [14, 15]) пространство вектор-функций $\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$, для которых существует $\partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$; при этом $\|\psi;[0,T]\|^{1/2} = \max\limits_{t\in[0,T]} |\psi(t)| + \max\limits_{t\in[0,T]} |\partial^{1/2}\psi(t)|$.

Определим $H^\beta[\tau,\eta]$, $0 \leqslant \tau < \eta \leqslant T$, $0 < \beta < 1$, как пространство непрерывных вектор-функций $\psi : [\tau,\eta] \to \mathbb{R}^m$, для которых конечна величина

$$\|\psi;[\tau,\eta]\|^\beta = \max_{t\in[\tau,\eta]} |\psi(t)| + \sup_{t,t+\Delta t\in(\tau,\eta)} \{|\Delta_t\psi(t)||\Delta t|^{-\beta}\},$$

и $\underset{0}{H}{}^\beta[\tau,\eta] = \{\psi \in H^\beta[\tau,\eta] : \psi(\tau) = 0\}$.

Для любой области $G \subset \Omega \bigcap (\mathbb{R}\times(\tau,\eta))$, $0 \leqslant \tau < \eta \leqslant T$, для которой $\overline{G} \bigcap \{(x,\tau) : x \in \mathbb{R}\} \neq \neq \varnothing$, через $\underset{0}{C}(\overline{G})$ обозначим пространство непрерывных вектор-функций $u : \overline{G} \to \mathbb{R}^m$ таких, что $u(x,\tau) = 0$, при этом $\|u; G\|^0 = \sup\limits_{(x,t)\in G} |u(x,t)|$. Через $\underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{G})$ обозначим пространство вектор-функций $u \in \underset{0}{C}(\overline{G})$, для которых $\partial_x u \in \underset{0}{C}(\overline{G})$; при этом $\|u; G\|^{1,0} = \sup\limits_{(x,t)\in G} |u(x,t)| + \sup\limits_{(x,t)\in G} |\partial_x u(x,t)|$. Под значениями вектор-функций и их производных на границе области $G$ понимаем их предельные значения "изнутри" $G$. Через $\underset{0}{H}{}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{G})$, $0 < \alpha < 1$, обозначим пространство Гёльдера (см., например, [6, с. 16]) вектор-функций $u \in \underset{0}{C}(\overline{G})$, для которых конечна величина

$$\|u; G\|^{1+\alpha,(1+\alpha)/2} = \|u; G\|^{1,0} + \sup_{(x,t),(x,t+\Delta t)\in G} \frac{|\Delta_t u|}{|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}} + \sup_{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in G} \frac{|\Delta_{x,t}\partial_x u|}{|\Delta x|^{\alpha} + |\Delta t|^{\alpha/2}},$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$, $\Delta_t u = u(x,t+\Delta t) - u(x,t)$, $\Delta_{x,t}\partial_x u = \partial_x u(x+\Delta x, t+\Delta t) - \partial_x u(x,t)$.

При выполнении условий а), б) на коэффициенты системы и (1), (2) на боковые границы области существование классических решений задач (3)–(5) и (3), (4), (6) в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$, если для граничных функций имеют место включения $\psi_k \in \underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$, $k = 1,2$, и $\theta_k \in \underset{0}{C}[0,T]$, $k = 1,2$, установлено в работах [14, 15] и [17] соответственно. В этих работах получено интегральное представление решений в виде суммы векторных параболических потенциалов простого слоя. Основное содержание настоящей работы составляют следующие теоремы единственности.

**Теорема 1.1.** *Пусть выполнены условия а), б) и (1), (2). Пусть $u$ – классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \partial_x u|_{\Sigma_k} = 0, \quad k = 1,2, \tag{7}$$

такое, что $u \in \underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega})$. Тогда $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

**Теорема 1.2.** *Пусть выполнены условия а), б) и (1), (2). Пусть $u$ – классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\Sigma_k} = 0, \quad k = 1,2, \tag{8}$$

*такое, что $u \in \underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega})$. Тогда $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.*

**Замечание.** Если существенно усилить требования к боковым границам области и к гладкости решения, а именно, если потребовать, чтобы $g_k \in H^{1+\alpha/2}[0,T]$, $k = 1,2$, т.е. чтобы функции $g_k$ были дифференцируемы на $[0,T]$ и их производные принадлежали пространству $H^{\alpha/2}[0,T]$, то из [5] (см. также [6], с. 706–707) вытекает единственность решения рассматриваемых задач в существенно более узком классе Гёльдера $\underset{0}{H}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$. В [9] установлена единственность решения задачи (3)–(5) в классе Гёльдера $\underset{0}{H}{}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$. В случае параболического оператора с постоянными коэффициентами и полуполосы с негладкой боковой границей теорема 1.2 получена в [7, 8] при дополнительных условиях на старшую производную $\partial_x^2 u$ решения и характер непрерывности решения по переменной $t$.

**2. Вспомогательная лемма.** В этом пункте докажем лемму о единственности решения задачи (3), (4), (6) в пространстве Гёльдера, которая будет нужна для доказательства теоремы 1.1.

**Лемма 2.1.** *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть $u$ – классическое решение задачи (7) такое, что $u \in \underset{0}{H}{}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$. Тогда $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.*

**Доказательство.** Пусть вектор-функция $u$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. Тогда $u$ является решением первой начально-краевой задачи

$$Lv = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad v|_{t=0} = 0, \quad v|_{\Sigma_k} = \psi_k(t), \quad k = 1,2,$$

где $\psi_k(t) = u(g_k(t),t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $k = 1,2$. При этом вектор-функции $\psi_k$, $k = 1,2$, принадлежат пространству $\underset{0}{H}{}^{(1+\alpha)/2}[0,T]$. Из работ [9, 14, 15] о существовании и единственности решения первой начально-краевой задачи в классе Гёльдера $\underset{0}{H}{}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$ для параболических систем в областях с негладкими боковыми границами следует, что вектор-функция $u$ может быть представлена в виде суммы векторных параболических потенциалов простого слоя

$$u(x,t) = \sum_{l=1}^{2} \int\limits_0^t \Gamma(x,t;g_l(\tau),\tau)\varphi_l(\tau)\,d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{9}$$

где $\varphi_l = (\varphi_{l1},\ldots,\varphi_{lm})^{\mathrm{т}} \in \underset{0}{C}[0,T]$, $l = 1,2$, и $(\varphi_1,\varphi_2)$ – единственное в $C[0,T]\times C[0,T]$ решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры первого рода

$$\sum_{l=1}^{2} \int\limits_0^t \Gamma(g_k(t),t;g_l(\tau),\tau)\varphi_l(\tau)\,d\tau = \psi_k(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1,2.$$

Подставляя представление (9) для вектор-функции $u$ в граничные условия (7) и пользуясь формулой “скачка” для пространственной производной векторного параболического потенциала простого слоя [16], получаем, что вектор-функции $\varphi_l$, $l = 1,2$, одновременно являются решением системы граничных интегральных уравнений Вольтерры второго рода

$$\frac{(-1)^k}{2} A_2(g_k(t),t)\varphi_k(t) + \sum_{l=1}^{2} \int\limits_0^t \partial_x\Gamma(g_k(t),t;g_l(\tau),\tau)\varphi_l(\tau)\,d\tau = 0, \quad k = 1,2; \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{10}$$

В силу единственности в $C[0,T]\times C[0,T]$ решения системы (10) (см. [17]) получаем, что $\varphi_l \equiv$ $\equiv 0$, $l = 1,2$. Подставляя найденное решение $\varphi_l$, $l = 1,2$, в представление (9), приходим к выводу, что $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Лемма доказана.

**3. Доказательство теорем 1.1 и 1.2.** Для доказательства теорем введём следующие обозначения.

Для любых числа $h > 0$, ограниченной вектор-функции $\nu : \overline{D} \to \mathbb{R}$ и множества $\mathcal{B} \subset \overline{D}$ полагаем

$$\omega(h;\nu;\mathcal{B}) = \sup_{\substack{|z_1-z_2|\leqslant h\\ z_1,z_2\in\mathcal{B}}} |\nu(z_1) - \nu(z_2)|. \tag{11}$$

Для каждого числа $R > 0$ через $\mathcal{B}_R$ обозначим отрезок $[-R,R]$ на пространственной оси, т.е.

$$\mathcal{B}_R = \{x \in \mathbb{R} : |x| < R\}. \tag{12}$$

**Доказательство теоремы 1.1.** Пусть вектор-функция $u$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Зафиксируем произвольную точку $(x_0,t_0) \in \Omega$ и докажем, что $u(x_0,t_0) = 0$.

Рассмотрим область $\Omega_d = \{(x,t) \in \Omega : g_1(t) + d < x < g_2(t) - d,\ d < t < T - d\}$, где число $d \in (0, T/2)$ достаточно мало – такое, чтобы $(x_0,t_0) \in \Omega_d$ (число $d$ будет выбрано ниже). Не ограничивая общности, считаем, что $d \leqslant 1$. Обозначим через $\overline{u}$ продолжение вектор-функции $u$ с $\overline{\Omega}$ на $\mathbb{R}^2$ с сохранением класса [6, с. 344], причём такое, что

$$\overline{u}(x,0) = \partial_x\overline{u}(x,0) = 0 \ \text{ при } \ x \in \mathbb{R}, \quad u(x,t) = 0 \ \text{ при } \ t < 0, \quad u(x,t) = u(x,T) \ \text{ при } \ t > T. \tag{13}$$

Пусть $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ – функция, определённая равенствами

$$\rho(x,t) = C_1 \exp\{(x^2+t^2-1)^{-1}\}, \ \text{ если } \ x^2+t^2 < 1, \quad \text{и} \quad \rho(x,t) = 0, \ \text{ если } \ x^2+t^2 \geqslant 1, \tag{14}$$

где постоянная $C_1$ выбирается из условия

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \rho(x,t)\,dx\,dt = 1. \tag{15}$$

Для каждого числа $s>0$ определим “сглаженную” вектор-функцию

$$u_s(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \overline{u}(x-sy, t-s\tau)\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{D}.$$

Зафиксируем произвольно выбранное число $\varepsilon>0$. Обозначим $\|u\|^{1,0} = \|u;\Omega\|^{1,0}$. Поскольку существует число $s_0>0$ такое, что для любого числа $0<s<s_0$ имеет место неравенство

$$|u_s(x_0,t_0) - \overline{u}(x_0,t_0)| < \varepsilon,$$

то для доказательства теоремы достаточно показать, что существует число $0<s_1<s_0$, при котором имеет место неравенство

$$|u_{s_1}(x_0,t_0)| < \varepsilon. \tag{16}$$

Обозначим через $\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)$ ф.м.р. системы

$$L_1\nu \equiv \partial_t\nu - A_2(x,t)\partial_x^2\nu - A_1(x,t)\partial_x\nu = 0.$$

Для матрицы $\Gamma_1$ в силу условий а), б) справедлива оценка

$$|\partial_x^k\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C_0(t-\tau)^{-(k+1)/2}\exp\{-c_0(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \tag{17}$$

$$(x,t),(\xi,\tau)\in\overline{D}, \quad t>\tau, \quad k\leqslant 2,$$

для некоторых положительных постоянных $C_0$, $c_0$.

Обозначим $h_s(x) = u_s(x,d)$ и рассмотрим параболический потенциал Пуассона

$$P_s(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;\xi,d)h_s(\xi)\,d\xi, \quad (x,t)\in\overline{D}_d = \overline{D}\bigcap(\mathbb{R}\times[d,T-d]).$$

В силу гладкости вектор-функций $u_s$ имеет место включение

$$P_s \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{D}_d). \tag{18}$$

Кроме того,

$$\lim_{t\to d+0} P_s(x,t) = h_s(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Тогда для каждого числа $0<s<d$ вектор-функция $w_s = u_s - P_s \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{D}_d)$ является решением задачи

$$L\nu = f_s \quad \text{в} \quad \Omega_d, \quad \nu(x,d) = 0, \quad g_1(d)+d\leqslant x\leqslant g_2(d)-d, \tag{19}$$

$$\partial_x\nu(g_1(t)+d,t) = \theta_s^1(t), \quad \partial_x\nu(g_2(t)-d,t) = \theta_s^2(t), \quad d\leqslant t\leqslant T-d, \tag{20}$$

где $f_s(x,t) = Lu_s(x,t) + A_0(x,t)P_s(x,t)$, $\theta_s^1(t) = \partial_x u_s(g_1(t)+d,t) - \partial_x P_s(g_1(t)+d,t)$, $\theta_s^2(t) = \partial_x u_s(g_2(t)-d,t) - \partial_x P_s(g_2(t)-d,t)$. Из включения (18), гладкости вектор-функции $u_s$ и условия б) следует, что имеют место включения

$$f_s \in C(\overline{\Omega}_d), \quad \theta_s^k \in C[d,T-d], \quad k=1,2.$$

Кроме того, вектор-функция $f_s$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной $x$ в $\overline{\Omega}_d$.

Поскольку $w_s \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_d)$, то в силу единственности решения задачи (19), (20) (см. лемму 2.1), а также из результатов работы [17] и гладкости соответствующих потенциалов (см. [16, 18]) вытекает, что вектор-функция $w_s$ для каждого $0 < s < d$ может быть представлена в виде суммы векторных параболических потенциалов

$$w_s(x,t) = \int\limits_d^t d\tau \int\limits_{g_1(\tau)+d}^{g_2(\tau)-d} \Gamma(x,t;\xi,\tau) f_s(\xi,\tau)\, d\xi + \int\limits_d^t \Gamma(x,t;g_1(\tau)+d,\tau)\varphi_s^1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_d^t \Gamma(x,t;g_2(\tau)-d,\tau)\varphi_s^2(\tau)\, d\tau \equiv V_s(x,t) + U_s^1(x,t) + U_s^2(x,t). \qquad (21)$$

Вектор плотности $\varphi_s^k \in \underset{0}{C}[d,T-d]$, $k=1,2$, в представлении (21) – компоненты единственного в $C[d,T-d]\times C[d,T-d]$ решения $(\varphi_s^1,\varphi_s^2)$ системы интегральных уравнений Вольтерры

$$-\frac{1}{2}A_2(g_1(t)+d,t)\varphi_s^1(t) + \int\limits_d^t \partial_x\Gamma(g_1(t)+d,t;g_1(\tau)+d,\tau)\varphi_s^1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_d^t \partial_x\Gamma(g_1(t)+d,t;g_2(\tau)-d,\tau)\varphi_s^2(\tau)\, d\tau = \hat\theta_s^1(t),$$

$$\frac{1}{2}A_2(g_2(t)-d,t)\varphi_s^2(t) + \int\limits_d^t \partial_x\Gamma(g_2(t)-d,t;g_1(\tau)+d,\tau)\varphi_s^1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_d^t \partial_x\Gamma(g_2(t)-d,t;g_2(\tau)-d,\tau)\varphi_s^2(\tau)\, d\tau = \hat\theta_s^2(t), \quad d \leqslant t \leqslant T-d, \qquad (22)$$

где $\hat\theta_s^1(t) = \theta_s^1(t) - \partial_x V_s(g_1(t)+d,t) \equiv \partial_x u_s(g_1(t)+d,t) - \partial_x P_s(g_1(t)+d,t) - \partial_x V_s(g_1(t)+d,t)$, $\hat\theta_s^2(t) = \theta_s^2(t) - \partial_x V_s(g_2(t)-d,t) \equiv \partial_x u_s(g_2(t)-d,t) - \partial_x P_s(g_2(t)-d,t) - \partial_x V_s(g_2(t)-d,t)$.

Следовательно, для каждого числа $0 < s < d$ вектор-функция $u_s$ может быть представлена в виде

$$u_s(x,t) = V_s(x,t) + P_s(x,t) + U_s^1(x,t) + U_s^2(x,t), \quad (x,t)\in\overline{\Omega}_d. \qquad (23)$$

Оценим потенциалы в (23). Пусть $(x,t)\in\overline{\Omega}_d$. Рассмотрим сначала потенциал $P_s$. Существует число $R_0 > 0$ такое, что $\Omega \subset \mathcal{B}_{R_0}\times(0,T)$ (см. обозначение (12)). Для любого числа $R \geqslant R_0$ справедливо равенство

$$P_s(x,t) = \int\limits_{|\xi|<2R} \Gamma_1(x,t;\xi,d)h_s(\xi)\, d\xi + \int\limits_{|\xi|>2R} \Gamma_1(x,t;\xi,d)h_s(\xi)\, d\xi \equiv I_{1,s} + I_{2,s}.$$

Оценим сначала интеграл $I_{2,s}$. В силу оценки (17) и неравенства $|\xi - x| > R$ (при $|\xi| > 2R$) имеем

$$|I_{2,s}| \leqslant C\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\}(t-d)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-c|\xi-x|^2/(t-d)\}\, d\xi \leqslant C\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\}. \quad (24)$$

Здесь и далее через $C$, $c$ обозначаем постоянные, зависящие от $\delta$, $\alpha$, $m$, $T$, $\mathcal{M}$ и коэффициентов оператора $L$, конкретный вид которых для нас не важен.

Рассмотрим интеграл $I_{1,s}$. Воспользовавшись соотношениями (13)–(15) и непрерывностью вектор-функции $\overline{u}$, при $s < d$ получаем (см. обозначение (11))

$$|h_s(\xi)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^2} [\overline{u}(\xi - sy, d - s\tau) - \overline{u}(\xi - sy, 0)]\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{y^2+\tau^2<1} |\overline{u}(\xi - sy, d - s\tau) - \overline{u}(\xi - sy, 0)|\,dy\,d\tau \leqslant C\omega(2d;\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T]), \quad \xi \in \mathcal{B}_{2R}.$$

Отсюда и из оценки (17) следует, что $|I_{1,s}| \leqslant C\omega(2d;\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T])$.

Таким образом,

$$|P_s(x,t)| \leqslant C[\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\} + \omega_0(d;R)], \tag{25}$$

где $\omega_0(d,R) \equiv \omega(2d;\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T])$.

Оценим $\partial_x P_s(x,t)$. В силу единственности решения задачи Коши [12, с. 269] имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\Gamma_1(x,t;\xi,d)\,d\xi = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad d < t \leqslant T.$$

Поэтому

$$\partial_x P_s(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\partial_x\Gamma_1(x,t;\xi,d)][h_s(\xi) - h_s(x)]\,d\xi.$$

Для любого числа $R \geqslant R_0$ справедливо равенство

$$\partial_x P_s(x,t) = \Bigg(\int\limits_{|\xi|<2R} + \int\limits_{|\xi|>2R}\Bigg)[\partial_x\Gamma_1(x,t;\xi,d)][h_s(\xi) - h_s(x)]\,d\xi \equiv J_{1,s} + J_{2,s}.$$

По теореме о среднем имеем

$$h_s(\xi) - h_s(x) \equiv u_s(\xi,d) - u_s(x,d) = (\xi - x)\partial_\xi u_s(\overline{\xi},d), \tag{26}$$

где точка $\overline{\xi}$ расположена между точками $\xi$ и $x$. Поэтому, используя оценку (17) и гладкость вектор-функции $\overline{u}$, аналогично (24) получаем

$$|J_{2,s}| \leqslant C\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\}.$$

Рассмотрим интеграл $J_{1,s}$. В силу соотношений (13)–(15) при $s < d$ имеем

$$|\partial_\xi u_s(\overline{\xi},d)| \leqslant C \int\limits_{y^2+\tau^2<1} |\partial_\xi\overline{u}(\overline{\xi} - sy, d - s\tau) - \partial_\xi\overline{u}(\overline{\xi} - sy, 0)|\,dy\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\omega(2d;\partial_x\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T]), \quad \overline{\xi} \in \mathcal{B}_{2R}.$$

Отсюда и из (17), (26) следует, что $|J_{1,s}| \leqslant C\omega(2d;\partial_x\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T])$. Поэтому

$$|\partial_x P_s(x,t)| \leqslant C[\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\} + \omega_1(d;R)],$$

где $\omega_1(d,R) \equiv \omega(2d;\partial_x\overline{u};\mathcal{B}_{2R+1}\times[0,T])$.

Таким образом, справедлива оценка

$$\|P_s;\Omega_d\|^{1,0} \leqslant C[\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\} + \omega_0(d;R) + \omega_1(d;R)]. \tag{27}$$

Рассмотрим теперь потенциал $V_s$. Оценим вектор-функцию $f_s$. В силу (25) и условия б) для этого достаточно оценить вектор-функцию $f_s^1(x,t) \equiv Lu_s(x,t)$. Справедливо равенство

$$f_s^1(x,t) = \int\limits_{y^2+\tau^2<1} [L(x,t) - L(x-sy,t-s\tau)]\overline{u}(x-sy,t-s\tau)\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}_d.$$

Поэтому при $s \leqslant d/2$, используя гладкость вектор-функции $\overline{u}$ и условие б), получаем

$$|f_s^1(x,t)| \leqslant C \int\limits_{y^2+\tau^2<1} [|sy|^\alpha + (s\tau)^{\alpha/2}]\{|\overline{u}(x-sy,t-s\tau)| +$$

$$+ |\partial_x\overline{u}(x-sy,t-s\tau)| + |\partial_x^2\overline{u}(x-sy,t-s\tau)|\}\,dy\,d\tau \leqslant C(d)s^{\alpha/2}, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}_d.$$

Здесь и далее обозначено $C(d) = C(\|u\|^{1,0} + \sup\limits_{\Omega_{d/2}} |\partial_x^2 u|)$.

Таким образом, при $s \leqslant d/2$ выполнена оценка

$$|f_s(x,t)| \leqslant C(d)s^{\alpha/2} + C[\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\} + \omega_0(d;R)], \quad (x,t)\in\overline{\Omega}_d.$$

Следовательно, в силу свойств объёмного потенциала (см. [18]) вектор-функция $V_s$ обладает свойствами:

$$V_s \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}_d), \tag{28}$$

$$\|V_s;\Omega_d\|^{1,0} \leqslant C(d)s^{\alpha/2} + C[\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\} + \omega_0(d;R)], \quad s\leqslant d/2. \tag{29}$$

Рассмотрим потенциалы $U_s^k$, $k=1,2$. Оценим вектор-функции $\hat{\theta}_s^k$, $k=1,2$. В силу (27) и (29) для этого достаточно оценить вектор-функции $\overline{\theta}_s^1(t) \equiv \partial_x u_s(g_1(t)+d,t)$ и $\overline{\theta}_s^2(t) \equiv$ $\equiv \partial_x u_s(g_2(t)-d,t)$. Положим

$$\overline{\theta}_s^1(t) = [\partial_x u_s(g_1(t)+d,t) - \partial_x\overline{u}(g_1(t)+d,t)] + \partial_x\overline{u}(g_1(t)+d,t) \equiv \overline{\theta}_{s,1}^1 + \overline{\theta}_{s,2}^1.$$

При $s \leqslant d^2/[4(1+\mathcal{M})^2]$, где $\mathcal{M}$ – постоянная из условия (1), вследствие непрерывности производной $\partial_x\overline{u}$ имеем

$$|\overline{\theta}_{s,1}^1| \leqslant C \int\limits_{y^2+\tau^2<1} |\partial_x\overline{u}(g_1(t)+d-sy,t-s\tau) - \partial_x\overline{u}(g_1(t)+d,t)|\,dy\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\omega(2s;\partial_x\overline{u};\overline{\Omega}) \leqslant C\omega(2d;\partial_x\overline{u};\overline{\Omega}), \quad d\leqslant t\leqslant T-d,$$

$$|\overline{\theta}_{s,2}^1(t)| = |\partial_x\overline{u}(g_1(t)+d,t)| = |\partial_x\overline{u}(g_1(t)+d,t) - \partial_x\overline{u}(g_1(t),t)| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(d;\partial_x\overline{u};\overline{\Omega}), \quad d\leqslant t\leqslant T-d.$$

Следовательно,

$$\|\overline{\theta}_s^1;[d,T-d]\|^0 \leqslant C\omega_2(d), \tag{30}$$

где $\omega_2(d) \equiv \omega(2d;\partial_x\overline{u};\overline{\Omega})$.

Аналогично получаем оценку

$$\|\overline{\theta}_s^2;[d,T-d]\|^0 \leqslant C\omega_2(d). \tag{31}$$

Из соотношений (27)–(31) следует, что $\hat{\theta}_s^k \in \underset{0}{C}[d,T-d]$, $k=1,2$, и выполнены неравенства

$$\|\hat{\theta}_s^k;[d,T-d]\|^0 \leqslant C[\|u\|^{1,0}\exp\{-cR^2\} + \omega_0(d;R) + \omega_1(d;R) + \omega_2(d)] + C(d)s^{\alpha/2}, \quad k=1,2.$$

Отсюда и из результатов работы [17] заключаем, что существует решение $(\varphi_s^1, \varphi_s^2)$, где $\varphi_s^k \in \in \underset{0}{C}[d, T-d]$, $k = 1, 2$, системы (22) и имеют место оценки

$$\|\varphi_s^k; [d, T-d]\|^0 \leqslant C[\|u\|^{1,0} \exp\{-cR^2\} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R) + \omega_2(d)] + C(d)s^{\alpha/2}, \quad k = 1, 2.$$

Поэтому в силу свойств потенциала простого слоя [16] получаем

$$|U_s^k(x,t)| \leqslant C[\|u\|^{1,0} \exp\{-cR^2\} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R) + \omega_2(d)] + C(d)s^{\alpha/2}, \quad k = 1, 2, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_d.$$

Отсюда и из оценок (25), (29) вытекает, что

$$|u_s(x,t)| \leqslant C[\|u\|^{1,0} \exp\{-cR^2\} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R) + \omega_2(d)] + C(d)s^{\alpha/2}, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_d,$$

где постоянная $C$ не зависит от $R$, $d$ и $s$, а $C(d)$ не зависит от $R$ и $s$. Выбирая сначала достаточно большое $R$, затем достаточно малое $d$ и, наконец, достаточно малое $s_1 \leqslant d^2/[4(1+ + \mathcal{M})^2]$, получаем неравенство (16). Теорема 1.1 доказана.

**Доказательство теоремы 1.2.** Пусть вектор-функция $u$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2. Тогда $u$ является решением второй начально-краевой задачи

$$L\nu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \nu|_{t=0} = 0, \quad \partial_x \nu|_{\Sigma_k} = \theta_k(t), \quad k = 1, 2,$$

где $\theta_k(t) = \partial_x u(g_k(t), t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $k = 1, 2$. Из работы [17] и теоремы 1.1 следует, что вектор-функция $u$ может быть представлена в виде суммы векторных параболических потенциалов простого слоя (9), где $\varphi_l = (\varphi_{l1}, \ldots, \varphi_{lm}) \in \underset{0}{C}[0, T]$, $l = 1, 2$, и $(\varphi_1, \varphi_2)$ – единственное в $C[0,T] \times C[0,T]$ решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры

$$\frac{(-1)^k}{2} A_2(g_k(t), t)\varphi_k(t) + \sum_{l=1}^{2} \int_0^t \partial_x \Gamma(g_k(t), t; g_l(\tau), \tau)\varphi_l(\tau)\, d\tau = \theta_k(t), \quad k = 1, 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Подставляя вектор-функцию (9) в граничные условия (8), получаем, что вектор-функции $\varphi_l$, $l = 1, 2$, одновременно являются решением системы

$$\sum_{l=1}^{2} \int_0^t \Gamma(g_k(t), t; g_l(\tau), \tau)\varphi_l(\tau)\, d\tau = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1, 2. \tag{32}$$

В силу единственности в $C[0,T] \times C[0,T]$ решения системы (32) (см. [15]) получаем, что $\varphi_l \equiv \equiv 0$, $l = 1, 2$. Подставляя найденное решение $\varphi_l$, $l = 1, 2$, в представление (9), приходим к выводу, что $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

Исследование Череповой М.Ф. проведено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00033).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3 (105). С. 3–146.
2. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* О приложениях принципа максимума к параболическим уравнениям 2-го порядка // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 3. С. 529–532.
3. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
4. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Мат. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4 (12). С. 458–480.

5. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
7. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболических систем на плоскости в модельном случае // Докл. РАН. 2018. Т. 483. № 3. С. 241–243.
8. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения первой начально-краевой задачи для параболических систем с постоянными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 673–682.
9. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Uniqueness of a solution in a Holder class to the first initial boundary value problem for a parabolic system in a bounded nonsmooth domain in the Plane // J. Math. Sci. 2020. V. 251. № 5. P. 557–572.
10. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494. № 1. С. 5–8.
11. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 7. С. 1–72.
12. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.
13. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
14. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
15. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
16. *Тверитинов В.А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка: Деп. в ВИНИТИ АН СССР 02.09.88. № 6850-В88.
17. *Тверитинов В.А.* Решение второй краевой задачи для параболической системы с одной пространственной переменной методом граничных интегральных уравнений: Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 15.11.89. № 6906-В89.
18. *Черепова М.Ф.* О гладкости потенциала объёмных масс для параболических систем // Вестн. Моск. энергетич. ин-та. 1999. № 6. С. 86–97.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики,
Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.