*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1049–1062*

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

*УДК 517.956*

# ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВО ВНЕШНИХ ОБЛАСТЯХ

**© 2021 г. О. А. Матевосян**

Изучаются вопросы единственности и асимптотического разложения решения смешанной задачи Дирихле–Неймана для бигармонического уравнения во внешности компактного множества в предположении, что обобщённое решение этой задачи обладает конечным интегралом Дирихле со степенным весом с показателем $a \in \mathbb{R}$. В зависимости от значения параметра $a$ доказаны теоремы единственности (неединственности) и найдены точные формулы для вычисления размерности линейного пространства решений смешанной задачи Дирихле–Неймана.

DOI: 10.31857/S0374064121080069

**Введение.** Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, где $G$ – ограниченная односвязная область (или объединение конечного числа таких областей) в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\Omega \bigcup \partial\Omega = \overline{\Omega}$ – замыкание области $\Omega$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

В $\Omega$ рассматривается задача для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями Дирихле–Неймана

$$u|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta u|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \tag{2}$$

где $\overline{\Gamma}_1 \bigcup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$, $\mathrm{mes}_{n-1}\Gamma_1 \neq 0$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)^{\mathrm{т}}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Как известно, в случае, когда $\Omega$ – неограниченная область, следует дополнительно охарактеризовать поведение решения на бесконечности. Как правило, для этой цели служит либо условие конечности интеграла Дирихле (энергии), либо условие на характер убывания модуля решения при $|x| \to \infty$. Подобного рода условия на бесконечности являются естественными и изучались рядом авторов (см., например, [1–3]).

Вопросы о поведении при $|x| \to \infty$ решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения (1) рассматривались в [4, 5], в которых при определённых условиях геометрического характера на границу области получены также оценки, характеризующие поведение $|u(x)|$ и $|\mathrm{grad}\, u(x)|$ при $|x| \to \infty$.

В данной статье таким условием является ограниченность интеграла Дирихле с весом

$$D_a(u, \Omega) \equiv \int\limits_{\Omega} |x|^a \sum_{|\alpha|=2} |\partial^\alpha u|^2\, dx < \infty, \quad a \in \mathbb{R}.$$

В [6] изучается слабое решение смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения на плоскости. При решении, используя формулу Грина, задачу сводят к системе интегральных уравнений Фредгольма для неизвестных данных на другой части границы. В соответствующих пространствах Соболева установлены существование и единственность решений системы граничных интегральных уравнений.

Отметим также работу [7], в которой методом отражения исследована единственность решений основных краевых задач для бигармонического уравнения и системы уравнений Стокса в весовых $L^p$-пространствах в полупространстве.

В разных классах неограниченных областей с конечным весовым интегралом энергии (Дирихле) автором в работах [8–20] изучены вопросы единственности, а также найдены размерности пространств решений краевых задач для системы теории упругости и бигармонического (полигармонического) уравнения. Развивая подход, основанный на использовании неравенств типа Харди [1, 2, 21], в данной работе удалось получить критерий единственности решения смешанной задачи Дирихле–Неймана для бигармонического уравнения. Для построения решения используется вариационный метод, т.е. минимизируется соответствующий функционал в классе допустимых функций.

Данная работа содержит полные доказательства результатов, анонсированных в [22].

Введём обозначения: $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций в области $\Omega$, имеющих компактный носитель в $\Omega$; $H^2(\Omega,\Gamma)$, $\Gamma\subset\overline{\Omega}$, – пространство, полученное пополнением множества функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, равных нулю в окрестности $\Gamma$, по норме

$$\|u;H^2(\Omega,\Gamma)\| = \bigg(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant 2} |\partial^\alpha u|^2\,dx\bigg)^{1/2},$$

где $\partial^\alpha\equiv\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ – мультииндекс, $\alpha_j\geqslant 0$ – целые числа, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$; если $\Gamma=\varnothing$, то пространство $H^2(\Omega,\Gamma)$ будем обозначать $H^2(\Omega)$; $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ – пространство функций в $\Omega$, полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства Соболева $H^2(\Omega)$; $\overset{\circ}{H}{}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ – пространство функций в $\Omega$, полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ в системе полунорм $\|u;H^2(G_0)\|$, где $G_0\subset\overline{\Omega}$ – произвольный компакт.

Обозначим

$$D(u,\Omega)=\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=2}|\partial^\alpha u|^2\,dx,\quad D_a(u,\Omega)=\int\limits_\Omega|x|^a\sum_{|\alpha|=2}|\partial^\alpha u|^2\,dx,$$

$$\Omega_R=\Omega\bigcap\{x:|x|<R\},\quad \partial\Omega_R=\partial\Omega\bigcup\{x:|x|=R\}.$$

Под конусом $K$ в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат понимаем такую область, что если $x\in K$, то $\lambda x\in K$ при всех $\lambda>0$. Будем считать, что начало координат $x_0=0$ находится вне $\overline{\Omega}$.

**1. Определения и вспомогательные утверждения.**

**Определение 1.** *Решением* однородного бигармонического уравнения (1) в области $\Omega$ будем называть функцию $u\in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ такую, что для всякой функции $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \Delta u\,\Delta\varphi\,dx=0.$$

**Лемма.** *Пусть $u$ – решение уравнения (1) в $\Omega$, удовлетворяющее условию $D_a(u,\Omega)<\infty$. Тогда*

$$u(x)=P(x)+\sum_{\beta_0<|\alpha|\leqslant\beta}\partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha+u^\beta(x),\quad x\in\Omega, \tag{3}$$

*где $P(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord}P(x)<m_0=\max\{2,2-n/2-a/2\}$, $\beta_0=2-n/2+a/2$, $\Gamma(x)$ – фундаментальное решение уравнения (1), $C_\alpha=\mathrm{const}$, $\beta\geqslant 0$ – целое число, а для функции $u^\beta(x)$ справедлива оценка*

$$|\partial^\gamma u^\beta(x)|\leqslant C_{\gamma\beta}|x|^{3-n-\beta-|\gamma|},\quad C_{\gamma\beta}=\mathrm{const},$$

*при любом мультииндексе $\gamma$.*

**Замечание.** Для фундаментального решения $\Gamma(x)$ бигармонического уравнения известно [23], что

$$\Gamma(x) = \begin{cases} C|x|^{4-n}, & \text{если } 4-n<0 \text{ или } n \text{ нечётно},\\ C|x|^{4-n}\ln|x|, & \text{если } 4-n\geqslant 0 \text{ и } n \text{ чётно}. \end{cases}$$

**Доказательство леммы.** Рассмотрим функцию $v(x)=\theta_N(x)u(x)$, где $\theta_N(x)=\theta(|x|/N)$ и для функции $\theta\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполнены условия: $0\leqslant\theta\leqslant 1$, $\theta(s)=0$ при $s\leqslant 1$, $\theta(s)=1$ при $s\geqslant 2$. Считаем, что $N\gg 1$ и $G\subset\{x:|x|<N\}$. Продолжим функцию $v$ на $\mathbb{R}^n$, полагая $v=0$ на $G=\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}$.

Тогда функция $v$ принадлежит пространству $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 v = f,$$

где $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} f\subset\{x:|x|<2N\}$. Несложно видеть, что $D_a(v,\mathbb{R}^n)<\infty$.

Теперь мы можем использовать теорему 1 из [24], поскольку она основывается на лемме 2 из [24], в которой никаких ограничений на знак $\sigma$ нет, где $\sigma$ – степень весовой функции в указанной лемме. Следовательно, разложение

$$v(x)=P(x)+\sum_{\beta_0<|\alpha|\leqslant\beta}\partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha+v^\beta(x)$$

справедливо для любого $a$, где $P(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord}P(x)<m_0=\max\{2,2-n/2-a/2\}$, $\beta_0=2-n/2+a/2$, $C_\alpha=\mathrm{const}$ и

$$|\partial^\gamma v^\beta(x)|\leqslant C_{\gamma\beta}|x|^{3-n-\beta-|\gamma|},\quad C_{\gamma\beta}=\mathrm{const}.$$

Отсюда и из определения функции $v$ следует равенство (3). Лемма доказана.

**Определение 2.** *Решением* однородной задачи Дирихле–Неймана (1), (2) будем называть функцию $u\in \overset{\circ}{H}{}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega,\Gamma_1)$ такую, что для всякой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию $\varphi=\partial\varphi/\partial\nu=0$ на $\Gamma_1$, выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \Delta u\,\Delta\varphi\,dx=0. \tag{4}$$

Обозначим через $\operatorname{Ker}_0(\Delta^2)$ пространство обобщённых решений задачи Дирихле–Неймана (1), (2), имеющих конечный интеграл Дирихле, т.е.

$$\operatorname{Ker}_0(\Delta^2)=\left\{u:\Delta^2u=0,\ \ u|_{\Gamma_1}=\frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1}=0,\ \ \Delta u|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2}=0,\ \ D(u,\Omega)<\infty\right\}.$$

Положим по определению

$$\operatorname{Ker}_a(\Delta^2)=\left\{u:\Delta^2u=0,\ \ u|_{\Gamma_1}=\frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1}=0,\ \ \Delta u|_{\Gamma_2}=\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2}=0,\ \ D_a(u,\Omega)<\infty\right\}.$$

Через $\dim\operatorname{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim\operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$ обозначим размерности линейных пространств соответственно $\operatorname{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$. Найдём $\dim\operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$ в зависимости от значения параметра $a$.

**2. Основные результаты.**

**Теорема 1.** *Задача Дирихле–Неймана (1), (2) с условием* $D(u,\Omega)<\infty$ *имеет* $n+1$ *линейно независимых решений, т.е.* $\dim\operatorname{Ker}_0(\Delta^2)=n+1$.

**Доказательство.** Доказательство теоремы 1 приведено в [22].

**Теорема 2.** *Если* $-n\leqslant a<n-4$, $n>4$, *то* $\dim\operatorname{Ker}_a(\Delta^2)=n+1$.

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай $0 \leqslant a < n-4$, $n > 4$.

Очевидно, что $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$, если $a \geqslant 0$.

Докажем, что $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

Пусть $u \in \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. Тогда, согласно лемме, решение $u$ имеет вид (3), т.е.

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord} P(x) \leqslant 1$,

$$R(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

Нетрудно заметить, что $D_a(P(x), \Omega) = 0$ и $D_a(R(x), \Omega) < \infty$ при $a < n-4$. Следовательно, $D_a(u, \Omega) < \infty$, т.е. $u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

Итак, $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \dim \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. Согласно теореме 1 справедливо равенство

$$\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n + 1.$$

Теперь рассмотрим случай $-n \leqslant a < 0$, $n > 4$. Пусть $u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$, где $-n \leqslant a < 0$. Согласно лемме решение уравнения (1) в $\Omega$ имеет вид (3).

Так как $\operatorname{ord} P(x) \leqslant 1$, то $D(P(x), \Omega) < \infty$. Несложно проверить, что $D(R(x), \Omega) < \infty$ при $n > 4$. Следовательно, $D(u, \Omega) < \infty$, т.е. $u \in \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$.

С другой стороны, очевидно, что $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$, если $a < 0$.

Таким образом, $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \dim \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. В силу теоремы 1 имеем

$$\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n + 1.$$

Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Если* $n - 4 \leqslant a < n - 2$, $n > 4$, *то* $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n$.

**Доказательство.** Для произвольного числа $e \neq 0$ построим обобщённое решение $u = u_e$ уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_e|_{\Gamma_1} = e, \quad \left.\frac{\partial u_e}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta u_e|_{\Gamma_2} = \left.\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = 0 \tag{5}$$

и условию

$$\chi(u_e, \Omega) \equiv \int\limits_\Omega \left( \frac{|u_e|^2}{|x|^4} + \frac{|\nabla u_e|^2}{|x|^2} + |\nabla\nabla u_e|^2 \right) dx < \infty. \tag{6}$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя функционал

$$F(v) = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |\Delta v|^2 \, dx$$

в классе $\{v : v \in H^2(\Omega),\ v|_{\Gamma_1} = e,\ \partial v/\partial \nu|_{\Gamma_1} = 0,\ \operatorname{supp} v - \text{компакт}\}$ допустимых функций.

Выполнимость условия (6) как следствие неравенства Харди следует из результатов работ [1, 2, 21]. Согласно лемме решение $u_e$ имеет вид $u_e(x) = P_e(x) + R_e(x)$, где $P_e(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord} P_e(x) \leqslant 1$,

$$R_e(x) = C_0' \Gamma(x) + \sum_{0 < |\alpha| \leqslant \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x).$$

Из условия (6) вытекает, что $P_e(x) \equiv 0$.

Покажем, что постоянная $C_0'$ отлична от нуля. Предположим, что $C_0' = 0$. Умножив уравнение (1) на 1 и затем проинтегрировав по $\Omega_R$, получим

$$\left(\int\limits_{\Gamma_1\bigcup\Gamma_2} + \int\limits_{|x|=R}\right)\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds = 0.$$

Покажем сначала, что

$$\int\limits_{|x|=R}\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds \to 0 \quad \text{при} \quad R\to\infty.$$

Так как $C_0' = 0$, то

$$\left|\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\right| \leqslant C|x|^{-n},$$

$$\left|\int\limits_{|x|=R}\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds\right| \leqslant \mathrm{const}\int\limits_{|x|=R}\left|\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\right|ds \leqslant \mathrm{const}\int\limits_{|x|=R}|x|^{-n}\,ds =$$

$$= \mathrm{const}\,R^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad R\to\infty.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma_1\bigcup\Gamma_2}\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds = 0. \tag{7}$$

Теперь докажем, что

$$\int\limits_{\Omega}(\Delta u_e)^2\,dx = -e\int\limits_{\Gamma_1\bigcup\Gamma_2}\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds. \tag{8}$$

Умножив уравнение (1) на $u_e$ и проинтегрировав по $\Omega_R$ с учётом граничных условий (5), получим

$$\int\limits_{\Omega_R}(\Delta u_e)^2\,dx = -\int\limits_{\Gamma_1\bigcup\Gamma_2}u_e\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds + J_1(u_e) + J_2(u_e), \tag{9}$$

где

$$J_1(u_e) = \int\limits_{|x|=R}\Delta u_e\frac{\partial u_e}{\partial\nu}\,ds, \quad J_2(u_e) = -\int\limits_{|x|=R}u_e\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\,ds.$$

Покажем, что $J_1(u_e)\to 0$, $J_2(u_e)\to 0$ при $R\to\infty$. Так как

$$|u_e| \leqslant C|x|^{4-n}, \quad |\Delta u_e| \leqslant C|x|^{2-n}, \quad \left|\frac{\partial u_e}{\partial\nu}\right| \leqslant C|x|^{3-n}, \quad \left|\frac{\partial\Delta u_e}{\partial\nu}\right| \leqslant C|x|^{1-n},$$

то при $n>4$ и $R\to\infty$ имеем

$$|J_i(u_e)| \leqslant C\int\limits_{|x|=R}|x|^{5-2n}\,ds = \mathrm{const}\,R^{4-n} \to 0, \quad i=1,2.$$

Переходя к пределу в равенстве (9) при $R\to\infty$, получаем требуемое равенство (8), так как $u_e|_{\Gamma_1} = e$. Из равенств (7) и (8) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega}(\Delta u_e)^2\,dx = 0$$

и, значит, $\Delta u_e = 0$ в $\Omega$. Отсюда и из граничных условий (5) следует [2, гл. 2.4], что $u_e \equiv e \neq 0$. Полученное соотношение противоречит условию (6). Таким образом, $C_0' \neq 0$.

Положим $s = e/C_0'$.

Рассмотрим теперь решение $u = u_A$ уравнения (1) с граничными условиями

$$u_A(x)|_{\Gamma_1} = (Ax)|_{\Gamma_1}, \quad \frac{\partial u_A(x)}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\partial (Ax)}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1}, \quad \Delta u_A|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u_A}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \tag{10}$$

где $A$ – ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$, а $Ax$ обозначает стандартное скалярное произведение векторов $A$ и $x$.

Для любого ненулевого вектора $A$ построим обобщённое решение $u = u_A$ бигармонического уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (10) и условию

$$\chi(u_A, \Omega) < \infty. \tag{11}$$

Решение задачи (1), (10) строится вариационным методом, минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций

$$\left\{ v : v \in H^2(\Omega), \quad v(x)|_{\Gamma_1} = (Ax)|_{\Gamma_1}, \quad \frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\partial (Ax)}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1}, \quad \operatorname{supp} v \text{ – компакт в } \overline{\Omega} \right\}.$$

Согласно лемме имеет место равенство $u_A(x) = P_A(x) + R_A(x)$, где $P_A(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord} P_A(x) \leqslant 1$,

$$R_A(x) = C_0\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u_A^\beta(x).$$

Из условия (11) следует, что $P_A(x) \equiv 0$.

Рассмотрим функцию

$$v = (u_A(x) - Ax) - (u_e - e),$$

где $e = sC_0$, число $s$ определено выше. Очевидно, что $v$ – решение задачи (1), (2).

Докажем, что $D_a(v, \Omega) < \infty$ при $a < n-2$. Имеем

$$u_A(x) = C_0\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u_A^\beta(x), \tag{12}$$

$$u_e(x) = C_0'\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x), \tag{13}$$

причём $C_0' = e/s = sC_0/s = C_0$.

Следовательно,

$$u_A(x) - u_e(x) = \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha'' + u_0^\beta(x),$$

где $C_\alpha'' = C_\alpha - C_\alpha'$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$.

Нетрудно проверить, что $D_a(\partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha'', \Omega) < \infty$ и $D_a(u_0^\beta, \Omega) < \infty$ при $a < n-2$. Отсюда следует, что $D_a(u_A - u_e, \Omega) < \infty$ и $D_a(v, \Omega) < \infty$. Легко заметить, что $v \not\equiv 0$.

Таким образом, каждому ненулевому вектору $A$ из $\mathbb{R}^n$ отвечает ненулевое решение $v_A$ задачи (1), (2) с условием $D_a(v_A, \Omega) < \infty$, причём

$$v_A = u_A(x) - u_e - Ax + e.$$

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – базис в $\mathbb{R}^n$. Докажем, что соответствующие решения $v_{A_1}, \ldots, v_{A_n}$ линейно независимы.

Пусть $\sum_{i=1}^n C_i v_{A_i} \equiv 0$, где $C_i = \mathrm{const}$. Положим $W_1 \equiv \sum_{i=1}^n C_i A_i x$. Тогда

$$W_1 = \sum_{i=1}^n C_i(u_{A_i} - u_e + e) \quad \text{и} \quad \int\limits_\Omega |x|^{a-2} |\nabla W_1|^2\,dx < \infty.$$

Покажем, что $W_1 \equiv \sum_{i=1}^n C_i A_i x \equiv 0$. Пусть $T = \sum_{i=1}^n C_i A_i = (t_1, \ldots, t_n)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega |x|^{a-2} |\nabla W_1|^2\,dx = \int\limits_\Omega |x|^{a-2}(t_1^2 + \ldots + t_n^2)\,dx = \infty,$$

если $T \neq 0$. Следовательно, $T = \sum_{i=1}^n C_i A_i = 0$, откуда в силу линейной независимости векторов $A_1, \ldots, A_n$ следует, что $C_i = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Таким образом, задача (1), (2) с условием $D_a(u, \Omega) < \infty$ имеет по крайней мере $n$ линейно независимых решений.

Докажем, что любое решение $u$ задачи (1), (2) с условием $D_a(u, \Omega) < \infty$ представляется в виде линейной комбинации функций $v_{A_1}, \ldots, v_{A_n}$, т.е.

$$u = \sum_{i=1}^n C_i v_{A_i}, \quad \text{где} \quad C_i = \mathrm{const}.$$

Согласно лемме решение уравнения (1) в $\Omega$ имеет вид

$$u(x) = Ax + B + \sum_{|\alpha| \leqslant \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x),$$

где $A$ – постоянный вектор, $B$ – некоторое число.

Так как $A_1, \ldots, A_n$ – базис в $\mathbb{R}^n$, то существуют константы $C_1, \ldots, C_n$ такие, что

$$A = -\sum_{i=1}^n C_i A_i.$$

Положим

$$u_1 \equiv u - \sum_{i=1}^n C_i v_{A_i}.$$

Очевидно, что функция $u_1$ является решением задачи (1), (2) и $D_a(u_1, \Omega) < \infty$.

Докажем, что $u_1 \equiv 0$ в $\Omega$. Имеем

$$u_1 = b + z(x),$$

где $b = B - \sum_{i=1}^n C_i e_i$,

$$z(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x) - \sum_{i=1}^n C_i [u_{A_i} - u_{e_i}],$$

т.е. $z = u_1 - b$ и

$$z|_{\Gamma_1} = -b, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta z|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

Несложно видеть, что $\chi(z, \Omega) < \infty$. Таким образом, $z$ является решением следующей задачи, которую обозначим через $(z_b)$:

$$\Delta^2 z = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$z|_{\Gamma_1} = -b, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta z|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta z}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(z, \Omega) < \infty.$$

Кроме того, $D_a(z, \Omega) < \infty$.

Докажем, что если $e \neq 0$, то $D_a(u_e, \Omega) = \infty$, где $u_e$ – построенное выше решение задачи (5), (6) для уравнения $\Delta^2 u_e = 0, \quad x \in \Omega$. Имеем $u_e(x) = C_0'\Gamma(x) + R_1(x)$, причём $C_0' \neq 0$, если $e \neq 0$, и

$$R_1(x) = \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x).$$

Легко проверить, что $D_a(R_1(x), \Omega) < \infty$. Так как $\Gamma(x) = C|x|^{4-n}$, то внутри некоторого конуса $K$ справедливо неравенство $|\nabla\nabla\Gamma(x)| \geqslant C|x|^{2-n}$. Поэтому

$$D_a(C_0'\Gamma(x), \Omega) \geqslant C(C_0') \int\limits_{K\bigcap\{|x|>H\}} |x|^{2(2-n)+a} dx = \infty,$$

если $C_0' \neq 0$ и $a \geqslant n-4$. Отсюда следует, что $D_a(u_e, \Omega) = \infty$ при $e \neq 0$.

Теперь докажем единственность решения $u_e$ задачи (5), (6). Допустим, что существуют два решения $v_1$ и $v_2$ такие, что

$$v_i|_{\Gamma_1} = e, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta v_i|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta v_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда функция $v_e = v_1 - v_2$ удовлетворяет условиям

$$v_e|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta v_e|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(v_e, \Omega) < \infty.$$

Покажем, что $v_e \equiv 0$, $x \in \Omega$. Для этого в интегральное тождество (4) для функции $u = v_e$ подставим функцию $\varphi = v_e\theta_N(x)$, где функция $\theta_N(x)$ определена в начале доказательства леммы, получим

$$\int\limits_\Omega (\Delta v_e)^2 \theta_N(x)\, dx = -J_1(v_e) - J_2(v_e), \tag{14}$$

где

$$J_1(v_e) = 2\int\limits_\Omega \Delta v_e \nabla v_e \nabla\theta_N(x)\, dx, \quad J_2(v_e) = \int\limits_\Omega \Delta v_e\, v_e \Delta\theta_N(x)\, dx. \tag{15}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского с учётом условия $\chi(v_e, \Omega) < \infty$, несложно показать, что $J_1(v_e) \to 0$ и $J_2(v_e) \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, переходя в равенстве (14) к пределу при $N \to \infty$, будем иметь

$$\int\limits_\Omega (\Delta v_e)^2\, dx = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta v_e = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$v_e|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta v_e|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta v_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

Отсюда следует [25, гл. 2.4], что $v_e \equiv 0$ в $\Omega$. Тем самым, решение $u_e$ задачи (5), (6) единственно. Следовательно, $z = u_e$ при $e = -b$ и $D_a(z, \Omega) = \infty$ при $b \neq 0$.

С другой стороны, $D_a(z,\Omega) < \infty$, где $z = u_1 - b$, откуда $b = 0$. Таким образом, $u_1 = z$ является решением задачи $(z_0)$. В силу единственности решения задачи (5), (6) верно тождество $u_1 \equiv 0$ в $\Omega$. Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Если* $n-2 \leqslant a < \infty$, $n > 4$, *то* $\dim \operatorname{Ker}_a(\Delta^2) = 0$.

**Доказательство.** Пусть $a = n-2$, $u \in \operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$ и $u \not\equiv 0$.

Так как $\operatorname{Ker}_{n-2}(\Delta^2) \subset \operatorname{Ker}_{n-4}(\Delta^2)$, то в силу теоремы 3 решение $u$ имеет вид

$$u = u_A - Ax - u_e + e, \tag{16}$$

где $e = sC_0$, а $C_0$ определяется из формулы (12).

Подставляя представления (12) и (13) для функций $u_A$ и $u_e$ в (16), получаем

$$u(x) = P_0(x) + (C_0 - C_0')\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x),$$

где $P_0(x) = -Ax + e$, $\tilde{C}_\alpha = C_\alpha - C_\alpha'$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$.

Так как $C_0' = C_0$, то $C_0 - C_0' = 0$. Следовательно,

$$u(x) = P_0(x) + \sum_{0<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x). \tag{17}$$

Докажем, что $\tilde{C}_1 \neq 0$ в представлении (17). Пусть $\tilde{C}_1 = 0$, тогда

$$u(x) = P_0(x) + \sum_{1<|\alpha|\leqslant\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x).$$

Умножив уравнение (1) на $u$ и проинтегрировав по $\Omega_R$ с учётом граничных условий (2), получим

$$\int\limits_{\Omega_R} (\Delta u)^2\,dx = \int\limits_{|x|=R} \Delta u \frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds - \int\limits_{|x|=R} u\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\,ds. \tag{18}$$

Из (17) следуют оценки

$$|u| \leqslant C|x|, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right| \leqslant C, \quad |\Delta u| \leqslant C|x|^{-n}, \quad \left|\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\right| \leqslant C|x|^{-n-1}.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{|x|=R}\left(\Delta u\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\right)ds\right| \leqslant \mathrm{const}\int\limits_{|x|=R}|x|^{-n}\,ds = \mathrm{const}\,R^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad R\to\infty.$$

Переходя к пределу в равенстве (18) при $R \to \infty$, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega}(\Delta u)^2\,dx = 0.$$

Отсюда и из граничных условий (2) вытекает [25, гл. 2.4] тождество $u \equiv 0$ в $\Omega$. Полученное противоречие показывает, что $\tilde{C}_1 \neq 0$ в (17).

Так как $u \in \operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$, то, в частности, $D_a(u,\Omega) < \infty$. Легко проверить, что $D_a(P_0(x),\Omega) = 0$ и $D_a(R_2(x),\Omega) < \infty$, где

$$R_2(x) = \sum_{1<|\alpha|\leqslant\beta}\partial^\alpha\Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x).$$

Тогда в силу (17) и неравенства треугольника получаем $D_a((\tilde{C}_1\nabla)\Gamma(x),\Omega) < \infty$.

С другой стороны, $\Gamma(x) = C|x|^{4-n}$. Тогда внутри некоторого конуса $K$ имеет место неравенство $|\nabla\nabla(\tilde{C}_1\nabla)\Gamma(x)| \geqslant C|x|^{1-n}$. Следовательно,

$$\infty > D_a((\tilde{C}_1\nabla)\Gamma(x), \Omega) \geqslant C \int\limits_{K\bigcap\{|x|>H\}} |x|^{2-2n+a}\,dx = \infty \quad \text{при} \quad a \geqslant n-2.$$

Полученное противоречие означает, что $u \equiv 0$. Теорема доказана.

**Теорема 5.** *Смешанная задача Дирихле–Неймана (1), (2) с условием* $D_a(u,\Omega) < \infty$ *имеет* $k(r,n)$ *линейно независимых решений при* $-2r+2-n \leqslant a < -2r+4-n$, $n > 4$, $r > 1$, *где*

$$k(r,n) = \frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-4)!}{n!(r-4)!}.$$

**Доказательство.** Для доказательства теоремы нужно определить число линейно независимых решений бигармонического уравнения (1), степени которых не превосходят заданного числа.

Известно, что размерность линейного пространства всех многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше $r$ равна $(r+n)!/(r!n!)$ [26]. Тогда размерность линейного пространства всех бигармонических многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше $r$ равна определённому в формулировке теоремы числу $k(r,n)$, так как бигармоническое уравнение означает равенство нулю некоторого многочлена степени $r-4$ в $\mathbb{R}^n$.

Если через $l(r,n)$ обозначить число линейно независимых однородных многочленов степени $r$, являющихся решениями уравнения (1), то

$$k(r,n) = \sum_{s=0}^{r} l(s,n),$$

где

$$l(s,n) = \frac{(s+n-1)!}{(n-1)!s!} - \frac{(s+n-5)!}{(n-1)!(s-4)!}, \quad s > 0.$$

Докажем сначала, что задача (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ при $-2r+2-n \leqslant a < -2r+4-n$ имеет $k(r,n)$ линейно независимых решений.

Пусть $w_1, \ldots, w_k$ – базис в пространстве полиномиальных решений уравнения (1), степени которых не превосходят $r$. Так как $\operatorname{ord} w_i \leqslant r$, то $D_a(w_i,\Omega) < \infty$ при $-2r+2-n \leqslant a < -2r+4-n$.

По каждому $w_i$, $i = \overline{1,k}$, построим решение $v_i$ уравнения (1) такое, что

$$v_i|_{\Gamma_1} = w_i|_{\Gamma_1}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\partial w_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1}, \quad \Delta v_i|_{\Gamma_2} = \Delta w_i|_{\Gamma_2}, \quad \frac{\partial \Delta v_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta w_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2},$$

$$D(v_i,\Omega) < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |\nabla v_i|^2|x|^{-2}\,dx < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |v_i|^2|x|^{-4}\,dx < \infty.$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя функционал

$$F(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\Delta v|^2\,dx$$

в классе допустимых функций

$$\left\{ v : v \in H^2(\Omega), \quad v|_{\Gamma_1} = w, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\partial w}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1}, \quad \operatorname{supp} v \text{ – компакт в } \overline{\Omega} \right\}.$$

Рассмотрим разность $q_i = w_i - v_i$. Имеем

$$\Delta^2 q_i = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$q_i|_{\Gamma_1} = \frac{\partial q_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta q_i|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta q_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad D(q_i, \Omega) < \infty.$$

Докажем, что $q_i$, $i = \overline{1,k}$, линейно независимы. Действительно, если

$$\sum_{i=1}^{k} c_i q_i = 0, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{i=1}^{k} c_i (w_i - v_i) = 0, \quad c_i = \text{const},$$

то

$$W \equiv \sum_{i=1}^{k} c_i w_i = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i \equiv V.$$

Следовательно, $|W|^2 = |V|^2$, $|\nabla W|^2 = |\nabla V|^2$, $|\nabla\nabla W|^2 = |\nabla\nabla V|^2$ и

$$D(W, \Omega) = D(V, \Omega) < \infty,$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla W|^2 |x|^{-2}\, dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla V|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |W|^2 |x|^{-4}\, dx = \int\limits_{\Omega} |V|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Согласно лемме решение $V$ уравнения (1) в $\Omega$ имеет вид $V(x) = P(x) + R(x)$, где $P(x)$ – многочлен,

$$R(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x).$$

Нетрудно проверить, что $D(R(x), \Omega) < \infty$,

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla R(x)|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |R(x)|^2 |x|^{-4} dx < \infty \quad \text{при} \quad n > 4.$$

В силу неравенства треугольника получаем $D(P(x), \Omega) < \infty$,

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla P(x)|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |P(x)|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Докажем, что $P(x) = 0$. Пусть $\operatorname{ord} P(x) = r_1$. Тогда внутри некоторого конуса $K$ выполняется неравенство $|P(x)| \geqslant C|x|^{r_1}$. Поэтому

$$\infty > \int\limits_{\Omega} |P(x)|^2 |x|^{-4}\, dx \geqslant C \int\limits_{K \bigcap \{|x|>H\}} |x|^{(r_1-2)2}\, dx = C \int\limits_{|x|>H} |x|^{2r_1-4+n} |x|^{-1}\, d|x|.$$

Так как $n > 4$, то полученный интеграл сходится только при $r_1 < 0$.

Таким образом, $P(x) \equiv 0$ и $V(x) = R(x)$, где $R(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{k} c_i w_i \equiv W = V(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty.$$

Так как $W$ – многочлен, то

$$\sum_{i=1}^{k} c_i w_i = 0.$$

Отсюда следует, что $c_i = 0$, $i = \overline{1,k}$, поскольку $w_i$, $i = \overline{1,k}$, – базис в пространстве полиномиальных решений.

Таким образом, смешанная задача Дирихле–Неймана (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ имеет по крайней мере $k(r,n)$ линейно независимых решений.

Докажем теперь, что всякое решение $u$ смешанной задачи Дирихле–Неймана (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ можно представить в виде линейной комбинации построенных решений $q_i$, $i = \overline{1,k}$, $\quad q_i = w_i - v_i$.

Согласно лемме решение уравнения (1) в $\Omega$ можно представить в виде

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord} P(x) < m_0 = [2 - n/2 - a/2]$,

$$R(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

Так как $-2r + 2 - n \leqslant a < -2r + 4 - n$, то $1 - n/2 - a/2 \leqslant r < 2 - n/2 - a/2$, следовательно, $r = [2 - n/2 - a/2] = m_0$. Таким образом, $\operatorname{ord} P(x) \leqslant r$.

Покажем, что $P(x)$ – решение уравнения (1). Имеем $0 = \Delta^2 u = \Delta^2 P(x) + \Delta^2 R(x)$, причём $\Delta^2 R(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Так как $\Delta^2 P(x)$ – многочлен и $\Delta^2 P(x) = -\Delta^2 R(x) \to 0$ при $|x| \to$ $\to \infty$, то $\Delta^2 P(x) \equiv 0$, т.е. $P(x)$ – полиномиальное решение бигармонического уравнения (1). Следовательно, оно представляется в виде линейной комбинации функций $w_i$, $i = \overline{1,k}$:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k c_i w_i.$$

Докажем, что $u = \sum_{i=1}^k c_i q_i$. Положим

$$u_2 = u - \sum_{i=1}^k c_i q_i, \quad \text{т.е.} \quad u_2 = R(x) + \sum_{i=1}^k c_i v_i.$$

Тогда

$$\Delta^2 u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta u_2|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

По построению решения $v_i$ имеем $D(v_i,\Omega) < \infty$,

$$\int\limits_\Omega |\nabla v_i|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int\limits_\Omega |v_i|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty, \quad i = \overline{1,k}.$$

Кроме того, легко проверить, что $D(R(x),\Omega) < \infty$,

$$\int\limits_\Omega |\nabla R(x)|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int\limits_\Omega |R(x)|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Отсюда следует, что $D(u_2,\Omega) < \infty$,

$$\int\limits_\Omega |\nabla u_2|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int\limits_\Omega |u_2|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Таким образом, $u_2$ является решением следующей задачи, которую обозначим через $(u_2)$:

$$\Delta^2 u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta u_2|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$D(u_2,\Omega) < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |\nabla u_2|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} |u_2|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Покажем, что $u_2 \equiv 0$, $x \in \Omega$. Для любой функции $\varphi \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ такой, что

$$\varphi|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta\varphi|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = 0,$$

и функции $u = u_2$ справедливо интегральное тождество (4):

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u_2\, \Delta\varphi\, dx = 0.$$

Подставим в это равенство $\varphi = u_2\theta_N(x)$, где функция $\theta_N(x)$ определена в начале доказательства леммы, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta u_2)^2 \theta_N(x)\, dx = -J_1(u_2) - J_2(u_2), \tag{19}$$

функционалы $J_1$ и $J_2$ в котором заданы в (15). Применяя неравенство Коши–Буняковского и учитывая условия задачи $(u_2)$, несложно показать, что $J_1(u_2) \to 0$ и $J_2(u_2) \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, переходя в равенстве (19) к пределу при $N \to \infty$, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta u_2)^2\, dx = 0.$$

Таким образом, $\Delta u_2 = 0$, $x \in \Omega$, и $u_2|_{\Gamma_1} = \partial u_2/\partial\nu|_{\Gamma_1} = 0$, $\Delta u_2|_{\Gamma_2} = \partial \Delta u_2/\partial\nu|_{\Gamma_2} = 0$. Отсюда следует [2, гл. 2.4], что $u_2 \equiv 0$ в $\Omega$. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
2. *Коньков А.А.* О размерности пространства решений эллиптических систем в неограниченных областях // Мат. сб. 1993. Т. 184. № 12. С. 23–52.
3. *Кудрявцев Л.Д.* Решение первой краевой задачи для самосопряженных и эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 5. С. 354–366.
4. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* Estimates for solutions of the Dirichlet problem for biharmonic equation in a neighbourhood of an irregular boundary point and in a neighbourhood of infinity Saint–Venant's principle // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1983. V. 93A. P. 327–343.
5. *Олейник О.А., Кондратьев В.А., Копачек И.* Об асимптотических свойствах решений бигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 10. С. 1886–1899.
6. *Cakoni F., Hsiao G.C., Wendland W.L.* On the boundary integral equation method for a mixed boundary value problem of the biharmonic equation // Complex Variables. 2005. V. 50. № 1. P. 7–11.
7. *Farwig R.* A note on the reflection principle for the biharmonic equation and the Stokes system // Acta Appl. Math. 1994. V. 37. P. 41–51.

8. *Матевосян О.А.* О решениях краевых задач для системы теории упругости и бигармонического уравнения в полупространстве // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 6. С. 806–811.
9. *Матевосян О.А.* О решениях внешней задачи Дирихле для бигармонического уравнения с конечным весовым интегралом Дирихле // Мат. заметки. 2001. Т. 70. № 3. P. 403–418.
10. *Матевосян О.А.* О решениях смешанных краевых задач для системы теории упругости в неограниченных областях // Изв. РАН. Сер. Математика. 2003. Т. 67. № 5. С. 49–82.
11. *Matevosyan O.A.* On solutions of a boundary value problem for the polyharmonic equation in unbounded domains // Russ. J. Math. Phys. 2014. V. 21. № 1. P. 130–132.
12. *Matevossian H.A.* On solutions of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in unbounded domains // p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 2015. V. 7. № 1. P. 74–78.
13. *Матевосян О.А.* Решение смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения с конечным весовым интегралом Дирихле // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 4. С. 481–494.
14. *Матевосян О.А.* О решениях задачи Неймана для бигармонического уравнения в неограниченных областях // Мат. заметки. 2015. Т. 98. № 6. С. 944–947.
15. *Matevosyan O.A.* On solutions of the mixed Dirichlet–Navier problem for the polyharmonic equation in exterior domains // Russ. J. Math. Phys. 2016. V. 23. № 1. P. 135–138.
16. *Матевосян О.А.* О решениях одной краевой задачи для бигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1431–1435.
17. *Matevossian H.A.* On the biharmonic Steklov problem in weighted spaces // Russ. J. Math. Phys. 2017. V. 24. № 1. P. 134–138.
18. *Matevossian H.A.* On solutions of the mixed Dirichlet–Steklov problem for the biharmonic equation in exterior domains // p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 2017. V. 9. № 2. P. 151–157.
19. *Matevossian H.A.* On the Steklov-type biharmonic problem in unbounded domains // Russ. J. Math. Phys. 2018. V. 25. № 2. P. 271–276.
20. *Matevossian H.A.* On the polyharmonic Neumann problem in weighted spaces // Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. V. 64. № 1. P. 1–7.
21. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* Hardy's and Korn's inequality and their application // Rend. Mat. Appl. 1990. Serie VII. V. 10. P. 641–666.
22. *Matevossian H.* Mixed biharmonic Dirichlet–Neumann problem in exterior domains // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2020. Т. 13. № 6. С. 755–762.
23. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
24. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* On the behavior at infinity of solutions of elliptic systems with a finite energy integral // Arch. Rational Mech. Anal. 1987. V. 99. № 1. P. 75–99.
25. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производным и второго порядка. М., 1989.
26. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М., 1977.

Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,
Московский авиационный институт (НИУ “МАИ”)

Поступила в редакцию 06.02.2019 г.
После доработки 12.03.2020 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.