ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1063–1070

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

МЕТОД РИМАНА–АДАМАРА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2021 г. А. Н. Миронов, Л. Б. Миронова

Для линейной неоднородной системы в частных производных первого порядка с тремя независимыми переменными доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу, которое построено в терминах определяемой в работе матрицы Римана–Адамара.

DOI: 10.31857/S0374064121080070

Линейная система уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \ldots, x_n) u_k + f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

коэффициенты a_{ik} и свободные члены f_i, $i, k = \overline{1, n}$, которой непрерывны, исследовалась многими авторами [1–3]. Эта система представляет интерес, в частности, с точки зрения применения получаемых результатов к изучению важных в теоретическом и практическом отношении дифференциальных уравнений смешанного типа. Отметим, что наибольшее число публикаций относится к случаю, когда в системе (1) $n = 2$.

В работе [4] предложен вариант метода Римана для гиперболических систем дифференциальных уравнений, и в терминах матрицы Римана построены решения задач Коши и Гурса. В статьях [5, 6] метод Римана применяется для исследования задач для систем уравнений с двумя и тремя независимыми переменными с кратными характеристиками. Системы гиперболических уравнений исследовались ранее рядом авторов в различных направлениях [7–13].

Отметим, что В.И. Жегаловым и его учениками разработан метод Римана для класса уравнений с доминирующими частными производными

$$(D_1 + D_2) u = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

здесь $D_1 \equiv \partial^{k_1+\ldots+k_n}/\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}$, а D_2 – линейная комбинация с переменными коэффициентами операторов вида $\partial^{l_1+\ldots+l_n}/\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}$, где $0 \leqslant l_i \leqslant k_i$, $i = \overline{1, n}$, и $l_j < k_j$ хотя бы для одного $j \in \{1, \ldots, n\}$ (см., например, работы [14–16]). Уравнение (2) имеет приложения в теориях фильтрации жидкости в трещиноватых средах, поглощения влаги корнями растений, колебаний стержней с учётом эффектов поперечной инерции, распространения волн в диспергирующих средах.

Большой интерес представляет задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Эта задача рассматривалась, в частности, в работах [17, гл. 3, § 1; 18–23].

В статье [24] для уравнения Бианки третьего порядка исследованы существование и единственность решения задачи Дарбу, а также определена функция Римана–Адамара, доказаны её существование и единственность, построено решение задачи Дарбу в терминах функции Римана–Адамара. При этом определение функции Римана–Адамара основывается на определении функции Римана [14].

Решение задачи Дарбу для системы (1) с двумя независимыми переменными построено в терминах матрицы Римана–Адамара в работе [25].

В настоящей работе для системы вида (1) с тремя независимыми переменными предложен метод решения задачи Дарбу, являющийся определённым развитием метода Римана, который естественно назвать *методом Римана–Адамара*.

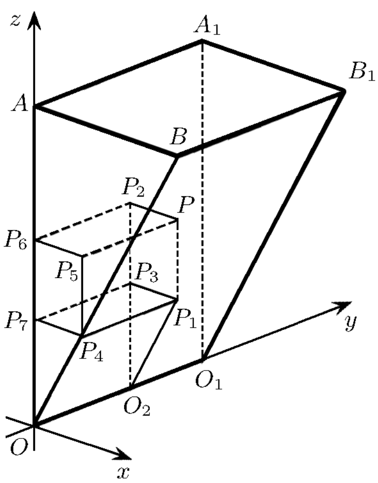

Рисунок. Области D и D_P, D_1, D_2 (призмы Π, Π_P, Π_2 и параллелепипед Π_1).

Пусть D – область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная призмой $\Pi = OABO_1A_1B_1$, задаваемой плоскостями (рисунок):

$$x = 0 \ \ (AA_1O_1O), \quad y = 0 \ \ (AOB), \quad y = y_0 > 0 \ \ (A_1O_1B_1),$$

$$z = x \ \ (OBB_1O_1), \quad z = z_0 > 0.$$

Обозначим боковые грани призмы Π при $x = 0$ и $z = x$ через X и T соответственно, а через Y её основание при $y = 0$.

В области $\overline{D}$ рассмотрим гиперболическую систему

$$u_x = a_{11}(x,y,z)u + a_{12}(x,y,z)v + a_{13}(x,y,z)w + f_1(x,y,z),$$

$$v_y = a_{21}(x,y,z)u + a_{22}(x,y,z)v + a_{23}(x,y,z)w + f_2(x,y,z),$$

$$w_z = a_{31}(x,y,z)u + a_{32}(x,y,z)v + a_{33}(x,y,z)w + f_3(x,y,z). \tag{3}$$

Считаем, что её коэффициенты и свободные члены непрерывны: $a_{ij} \in C(\overline{D})$, $f_i \in C(\overline{D})$, $i,j = \overline{1,3}$. Линейное преобразование искомых функций $u \mapsto b_1u$, $v \mapsto b_2v$, $w \mapsto b_3w$, где $b_1 = b_1(x,y,z) = \exp\int_0^x a_{11}(\alpha,y,z)\,d\alpha$ и аналогичный вид имеют функции b_2 и b_3, приводит систему (3) к случаю, в котором

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \equiv 0. \tag{4}$$

Далее считаем эти условия выполненными.

Определим класс $C^{(k,l,m)}$ функций: включение $f \in C^{(k_1,k_2,k_3)}$ равносильно существованию у функции f непрерывных производных $\partial^{r_1+r_2+r_3}f/\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\partial z^{r_3}$ $(r_i = \overline{0,k_i})$. Решение (u,v,w) системы (3) такое, что $u \in C^{(1,0,0)}(D)$, $v \in C^{(0,1,0)}(D)$, $w \in C^{(0,0,1)}(D)$, назовём *регулярным* в области D.

Задача Дарбу. В области D найти регулярное решение системы (3), удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad v|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z), \quad w|_{\overline{T}} = \psi(x,y), \tag{5}$$

где $\varphi_1 \in C(\overline{X})$, $\varphi_2 \in C(\overline{Y})$, $\psi \in C(\overline{T})$ – заданные функции.

Докажем существование и единственность решения задачи Дарбу.

Сведём систему (3) с учётом условий (4) и (5) к системе интегральных уравнений

$$u(x,y,z) = \varphi_1(y,z) + \int\limits_0^x (a_{12}v + a_{13}w + f_1)(\alpha,y,z)\,d\alpha,$$

$$v(x,y,z) = \varphi_2(x,z) + \int\limits_0^y (a_{21}u + a_{23}w + f_2)(x,\beta,z)\,d\beta,$$

$$w(x,y,z) = \psi(x,y) + \int\limits_x^z (a_{31}u + a_{32}v + f_3)(x,y,\gamma)\,d\gamma. \tag{6}$$

Решение системы интегральных уравнений Вольтерры (6) существует и единственно в классе непрерывных функций. Задача Дарбу (3)–(5) и система (6) эквивалентны. Действительно, система (6) – следствие (3)–(5). Обратно, дифференцируя уравнения системы (6), получаем систему (3) с условиями (4) и (5).

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Если выполняются условия $a_{ij} \in C(\overline{D})$, $f_i \in C(\overline{D})$, $i,j = \overline{1,3}$, то решение задачи Дарбу (3), (4) существует и единственно.*

Перейдём к построению решения задачи Дарбу в терминах матрицы Римана–Адамара.

Запишем систему (3), (4) в векторно-матричной форме

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{A}_1\mathbf{U}_x + \mathbf{A}_2\mathbf{U}_y + \mathbf{A}_3\mathbf{U}_z - \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \operatorname{colon}(u, v, w), \tag{7}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \operatorname{colon}(f_1, f_2, f_3).$$

Введём матрицу Римана [4] $\mathbf{R} = \operatorname{colon}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3)$, где вектор-функции $\mathbf{R}_i(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3})$, $i = \overline{1,3}$, являются решениями систем

$$r_{i1}(x, y, z) = \delta_{i1} - \int\limits_{\xi}^{x} (a_{21}r_{i2} + a_{31}r_{i3})(\alpha, y, z)\, d\alpha,$$

$$r_{i2}(x, y, z) = \delta_{i2} - \int\limits_{\eta}^{y} (a_{12}r_{i1} + a_{32}r_{i3})(x, \beta, z)\, d\beta,$$

$$r_{i3}(x, y, z) = \delta_{i3} - \int\limits_{\zeta}^{z} (a_{13}r_{i1} + a_{23}r_{i2})(x, y, \gamma)\, d\gamma, \tag{8}$$

в которых δ_{ij} – символ Кронекера. Решения систем (8) при каждом $i = \overline{1,3}$ существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первой тройке аргументов (x, y, z) матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряжённой к (7) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv -(\mathbf{V}\mathbf{A}_1)_x - (\mathbf{V}\mathbf{A}_2)_y - (\mathbf{V}\mathbf{A}_3)_z - \mathbf{V}\mathbf{B}.$$

Справедливо тождество

$$(\mathbf{R}\mathbf{A}_1\mathbf{U})_x + (\mathbf{R}\mathbf{A}_2\mathbf{U})_y + (\mathbf{R}\mathbf{A}_3\mathbf{U})_z = \mathbf{R}L(\mathbf{U}), \tag{9}$$

которое может быть проверено непосредственно. Интегрированием этого тождества получаем решение задачи Дарбу.

Возьмём внутри области D произвольную точку $P(\xi, \eta, \zeta)$. Она определяет (см. рисунок) область D_P, ограниченную призмой $\Pi_P = O_2P_1PP_2OP_4P_5P_6$ и состоящую из двух частей – области D_1, ограниченной прямоугольным параллелепипедом $\Pi_1 = P_1PP_2P_3P_4P_5P_6P_7$, и области D_2, ограниченной призмой $\Pi_2 = O_2P_1P_3OP_4P_7$.

Определим матрицу Римана–Адамара задачи Дарбу $\mathbf{H}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = (h_{ij})$, $i, j = \overline{1,3}$, равенством

$$\mathbf{H}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \mathbf{R}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), & (x, y, z) \in D_1, \\ \mathbf{Q}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), & (x, y, z) \in D_2. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{Q} = \operatorname{colon}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3)$, где вектор-функции $\mathbf{Q}_i = (q_{i1}, q_{i2}, q_{i3})$, $i = \overline{1,3}$, являются решениями задачи Дарбу в D_2 для сопряжённой системы

$$q_{i1_x} = -a_{21}q_{i2} - a_{31}q_{i3}, \quad q_{i2_y} = -a_{12}q_{i1} - a_{32}q_{i3}, \quad q_{i3_z} = -a_{13}q_{i1} - a_{23}q_{i2}$$

с условиями

$$q_{i1}|_{z=x} = 0, \quad q_{i2}|_{y=\eta} = 0, \quad q_{i3}|_{z=\xi} = r_{i3}|_{z=\xi}. \tag{10}$$

Последнее условие в (10) можно записать в виде $[h_{i3}]|_{z=\xi} = 0$, где $[h_{i3}]|_{z=\xi}$ – скачок функции h_{i3} на плоскости $z = \xi$.

Очевидно, что матрица Римана–Адамара существует и единственна.

Проинтегрируем тождество (9) по области D_1 (она определяется неравенствами $0 < x < \xi$, $0 < y < \eta$, $\xi < z < \zeta$):

$$\int\limits_0^\eta \int\limits_\xi^\zeta r_{11} u(\xi,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta - \int\limits_0^\eta \int\limits_\xi^\zeta r_{11} u(0,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta + \int\limits_0^\xi \int\limits_\xi^\zeta r_{12} v(\alpha,\eta,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha -$$

$$- \int\limits_0^\xi \int\limits_\xi^\zeta r_{12} v(\alpha,0,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha + \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta r_{13} w(\alpha,\beta,\zeta)\,d\beta\,d\alpha - \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta r_{13} w(\alpha,\beta,\xi)\,d\beta\,d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta \int\limits_\xi^\zeta (r_{11} f_1 + r_{12} f_2 + r_{13} f_3)(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha, \tag{11}$$

$$\int\limits_0^\eta \int\limits_\xi^\zeta r_{21} u(\xi,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta - \int\limits_0^\eta \int\limits_\xi^\zeta r_{21} u(0,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta + \int\limits_0^\xi \int\limits_\xi^\zeta r_{22} v(\alpha,\eta,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha -$$

$$- \int\limits_0^\xi \int\limits_\xi^\zeta r_{22} v(\alpha,0,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha + \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta r_{23} w(\alpha,\beta,\zeta)\,d\beta\,d\alpha - \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta r_{23} w(\alpha,\beta,\xi)\,d\beta\,d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta \int\limits_\xi^\zeta (r_{21} f_1 + r_{22} f_2 + r_{23} f_3)(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha, \tag{12}$$

$$\int\limits_0^\eta \int\limits_\xi^\zeta r_{31} u(\xi,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta - \int\limits_0^\eta \int\limits_\xi^\zeta r_{31} u(0,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta + \int\limits_0^\xi \int\limits_\xi^\zeta r_{32} v(\alpha,\eta,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha -$$

$$- \int\limits_0^\xi \int\limits_\xi^\zeta r_{32} v(\alpha,0,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha + \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta r_{33} w(\alpha,\beta,\zeta)\,d\beta\,d\alpha - \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta r_{33} w(\alpha,\beta,\xi)\,d\beta\,d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta \int\limits_\xi^\zeta (r_{31} f_1 + r_{32} f_2 + r_{33} f_3)(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha. \tag{13}$$

В равенствах (11)–(13) у r_{ij} указана только первая тройка аргументов, вторая их тройка – (ξ,η,ζ). В этих равенствах учтено также, что согласно (8) справедливы равенства

$$r_{11}(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta) = 1, \quad r_{12}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta) = 0, \quad r_{13}(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta) = 0,$$

$$r_{21}(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta) = 0, \quad r_{22}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta) = 1, \quad r_{23}(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta) = 0,$$

$$r_{31}(\xi,\beta,\gamma,\xi,\eta,\zeta) = 0, \quad r_{32}(\alpha,\eta,\gamma,\xi,\eta,\zeta) = 0, \quad r_{33}(\alpha,\beta,\zeta,\xi,\eta,\zeta) = 1.$$

Теперь проинтегрируем тождество (9) по области D_2. Очевидно, область D_2 может быть задана любой из двух систем неравенств:

1) $0 < x < \xi,\ \ 0 < y < \eta,\ \ x < z < \xi$;

2) $0 < x < z,\ \ 0 < y < \eta,\ \ 0 < z < \xi$.

Интегрируя равенство для первых компонент векторов в (9), получаем

$$\int\limits_0^\eta dy \int\limits_0^\xi dz \int\limits_0^z (q_{11}u)_x(x,y,z)\,dx + \int\limits_0^\xi dz \int\limits_0^z dx \int\limits_0^\eta (q_{12}v)_y(x,y,z)\,dy +$$

$$+\int\limits_0^\eta dy \int\limits_0^\xi dx \int\limits_x^\xi (q_{13}w)_z(x,y,z)\,dz = \iiint\limits_{D_2} (q_{11}f_1 + q_{12}f_2 + q_{13}f_3)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^\eta dy \int\limits_0^\xi (q_{11}u(z,y,z) - q_{11}u(0,y,z))\,dz + \int\limits_0^\xi dz \int\limits_0^z (q_{12}v(x,\eta,z) - q_{12}v(x,0,z))\,dx +$$

$$+\int\limits_0^\eta dy \int\limits_0^\xi (q_{13}w(x,y,\xi) - q_{13}w(x,y,x))\,dx = \iiint\limits_{D_2} (q_{11}f_1 + q_{12}f_2 + q_{13}f_3)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (14)$$

Здесь $q_{11}(z,y,z) = q_{12}(x,\eta,z) \equiv 0$ в силу условий (10).

Интегрируем равенство для вторых компонент векторов в (9):

$$\int\limits_0^\eta dy \int\limits_0^\xi dz \int\limits_0^z (q_{21}u)_x(x,y,z)\,dx + \int\limits_0^\xi dz \int\limits_0^z dx \int\limits_0^\eta (q_{22}v)_y(x,y,z)\,dy +$$

$$+\int\limits_0^\eta dy \int\limits_0^\xi dx \int\limits_x^\xi (q_{23}w)_z(x,y,z)\,dz = \iiint\limits_{D_2} (q_{21}f_1 + q_{22}f_2 + q_{23}f_3)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^\eta dy \int\limits_0^\xi (q_{21}u(z,y,z) - q_{21}u(0,y,z))\,dz + \int\limits_0^\xi dz \int\limits_0^z (q_{22}v(x,\eta,z) - q_{22}v(x,0,z))\,dx +$$

$$+\int\limits_0^\eta dy \int\limits_0^\xi (q_{23}w(x,y,\xi) - q_{23}w(x,y,x))\,dx = \iiint\limits_{D_2} (q_{21}f_1 + q_{22}f_2 + q_{23}f_3)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (15)$$

Снова $q_{21}(z,y,z) = q_{22}(x,\eta,z) \equiv 0$ в силу условий (10).

Аналогично, интегрируя равенство для третьих компонент векторов в (9), будем иметь

$$\int\limits_0^\eta dy \int\limits_0^\xi dz \int\limits_0^z (q_{31}u)_x(x,y,z)\,dx + \int\limits_0^\xi dz \int\limits_0^z dx \int\limits_0^\eta (q_{32}v)_y(x,y,z)\,dy +$$

$$+\int\limits_0^\eta dy\int\limits_0^\xi dx\int\limits_0^z (q_{33}w)_z(x,y,z)\,dz=\iiint\limits_{D_2}(q_{31}f_1+q_{32}f_2+q_{33}f_3)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^\eta dy\int\limits_0^\xi (q_{31}u(z,y,z)-q_{31}u(0,y,z))\,dz+\int\limits_0^\xi dz\int\limits_0^z (q_{32}v(x,\eta,z)-q_{32}v(x,0,z))\,dx+$$

$$+\int\limits_0^\eta dy\int\limits_0^\xi (q_{33}w(x,y,\xi)-q_{33}w(x,y,x))\,dx=\iiint\limits_{D_2}(q_{31}f_1+q_{32}f_2+q_{33}f_3)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad (16)$$

где $q_{31}(z,y,z)=q_{32}(x,\eta,z)\equiv 0$ в силу условий (10).

Складывая почленно равенства (11) и (14), получаем

$$\int\limits_0^\eta\int\limits_\xi^\zeta u(\xi,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta+\int\limits_0^\eta\int\limits_0^\zeta (q_{13}-r_{13})w(\alpha,\beta,\xi)\,d\beta\,d\alpha=$$

$$=\int\limits_0^\eta\int\limits_\xi^\zeta r_{11}u(0,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta+\int\limits_0^\xi\int\limits_\xi^\zeta r_{12}v(\alpha,0,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha+$$

$$+\int\limits_0^\eta\int\limits_0^\xi q_{11}u(0,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta+\int\limits_0^\xi\int\limits_0^z q_{12}v(\alpha,0,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha+$$

$$+\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta q_{13}w(\alpha,\beta,0)\,d\beta\,d\alpha+\iiint\limits_{D_P}(h_{11}f_1+h_{12}f_2+h_{13}f_3)(\alpha,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha. \quad (17)$$

Второе слагаемое в левой части равенства (17) обращается в нуль в силу (10).

Обозначим грани D_1 и D_2 при $z=x$ через S, при $x=0$ через X_1 и X_2, а при $y=0$ через Y_1 и Y_2 соответственно. Запишем формулу (17) в виде

$$\int\limits_0^\eta\int\limits_\xi^\zeta u(\xi,\beta,\gamma)\,d\gamma\,d\beta=\iint\limits_{X_1+X_2}h_{11}u\,d\gamma\,d\beta+\iint\limits_{Y_1+Y_2}h_{12}v\,d\gamma\,d\alpha+$$

$$+\iint\limits_S h_{13}w\,d\beta\,d\alpha+\iiint\limits_{D_P}(h_{11}f_1+h_{12}f_2+h_{13}f_3)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha. \quad (18)$$

Обозначим правую часть равенства (18) через $F_1(\xi,\eta,\zeta)$. Очевидно, что $F_1(\xi,\eta,\zeta)$ может считаться известной функцией, так как выражается через элементы матрицы $\mathbf{H}$ и данные задачи Дарбу. Дифференцируя (18), получаем

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\partial^2F_1(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta\partial\zeta}. \quad (19)$$

Аналогично складывая равенства (12) и (15), (13) и (16), находим соответственно, что

$$\int_0^\xi \int_\xi^\zeta v(\alpha,\eta,\gamma)\,d\gamma\,d\alpha = \iint_{X_1+X_2} h_{21}u\,d\gamma\,d\beta + \iint_{Y_1+Y_2} h_{22}v\,d\gamma\,d\alpha +$$

$$+\iint_S h_{23}w\,d\beta\,d\alpha + \iiint_{D_P} (h_{21}f_1 + h_{22}f_2 + h_{23}f_3)d\gamma\,d\beta\,d\alpha, \qquad (20)$$

$$\int_0^\xi \int_0^\eta w(\alpha,\beta,\zeta)\,d\beta\,d\alpha = \iint_{X_1+X_2} h_{31}u\,d\gamma\,d\beta + \iint_{Y_1+Y_2} h_{32}v\,d\gamma\,d\alpha +$$

$$+\iint_S h_{33}w\,d\beta\,d\alpha + \iiint_{D_P} (h_{31}f_1 + h_{32}f_2 + h_{33}f_3)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha, \qquad (21)$$

откуда дифференцированием получаем

$$v(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\partial^2 F_2(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi\partial\zeta}, \quad w(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\partial^2 F_3(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi\partial\eta}, \qquad (22)$$

где $F_2(\xi,\eta,\zeta)$ и $F_3(\xi,\eta,\zeta)$ – известные правые части равенств (20) и (21), выражающиеся через элементы матрицы $\mathbf{H}$ и данные задачи Дарбу.

Формулы (19) и (22) представляют собой решение задачи Дарбу (3), (5) в терминах матрицы Римана–Адамара $\mathbf{H}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными // Мат. моделирование. 1994. Т. 6. № 6. С. 22–31.
2. *Чекмарев Т.В.* Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1614–1622.
3. *Плещинская И.Е.* Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1634–1637.
4. *Миронова Л.Б.* О методе Римана в $\mathbb{R}^n$ для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Математика. 2006. № 1. С. 34–39.
5. *Жегалов В.И., Миронова Л.Б.* Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными // Изв. вузов. Математика. 2007. № 3. С. 12–21.
6. *Миронова Л.Б.* Применение метода Римана к одной системе в трехмерном пространстве // Изв. вузов. Математика. 2019. № 6. С. 48–57.
7. *Романовский Р.К.* О матрицах Римана первого и второго рода // Мат. сб. 1985. Т. 127. № 4. С. 494–501.
8. *Жегалов В.И.* Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2008. № 8. С. 70–72.
9. *Воронова Ю.Г.* О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщёнными инвариантами Лапласа // Уфимский мат. журн. 2010. Т. 2. № 2. С. 20–26.
10. *Жибер А.В., Костригина О.С.* Задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений с интегралами первого и второго порядка // Уфимский мат. журн. 2011. Т. 3. № 3. С. 67–79.
11. *Созонтова Е.А.* О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа // Изв. вузов. Математика. 2013. № 10. С. 43–54.
12. *Андреев А.А., Яковлева Ю.О.* Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некратными характеристиками // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2017. Вып. 4. С. 752–759.

13. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Вариант метода исключения для одной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 6. С. 841–845.
14. *Жегалов В.И.* О трехмерной функции Римана // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. № 5. С. 1074–1079.
15. *Миронов А.Н.* Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в $\mathbb{R}^n$ // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 3. С. 584–594.
16. *Миронов А.Н.* К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2007. Вып. 2. С. 27–32.
17. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
18. *Моисеев Е.И.* Об одном интегральном представлении решения задачи Дарбу // Мат. заметки. 1982. Т. 32. Вып. 2. С. 175–186.
19. *Моисеев Е.И.* О приближении классического решения задачи Дарбу гладкими решениями // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 1. С. 73–87.
20. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
21. *Сабитов К.Б.* Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 1023–1032.
22. *Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г.* Задачи Коши–Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2003. № 5. С. 21–29.
23. *Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С.* Некоторые свойства функций Римана и Римана–Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 477–492.
24. *Миронов А.Н.* Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 1. С. 64–71.
25. *Mironova L.B.* Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 3. P. 400–406.

Елабужский институт (филиал)
Казанского (Приволжского) федерального университета,
Самарский государственный технический университет

Поступила в редакцию 21.09.2020 г.
После доработки 21.09.2020 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.