ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 8, с. 1071–1080

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2021 г. К. Б. Сабитов, С. Н. Сидоров

Для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольном параллелепипеде изучается начально-граничная задача. Установлен критерий единственности. Решение построено в виде ряда по ортогональной системе функций. При обосновании сходимости этого ряда возникает проблема малых знаменателей, зависящих от двух натуральных аргументов. Найдены достаточные условия равномерной отделённости от нуля знаменателей, что позволило доказать сходимость ряда в классе регулярных решений и устойчивость решения относительно возмущений граничных функций.

DOI: 10.31857/S0374064121080082

Введение. Рассмотрим оператор смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu := \begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

и область $Q = \{(x,y,t) : (x,y) \in D,\ \ t \in (-\alpha,\beta)\}$, где $D = \{(x,y) : 0 < x < p,\ \ 0 < y < q\}$, а α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, b – заданное действительное число. Обозначим $Q_+ = \{(x,y,t) \in Q : t > 0\}$ и $Q_- = \{(x,y,t) \in Q : t < 0\}$.

Начально-граничная задача. Найти функцию $u(x,y,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y,t) \in C^1(\overline{Q}) \bigcap C^2(Q_+ \bigcup Q_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv 0, \quad (x,y,t) \in Q_+ \bigcup Q_-; \tag{3}$$

$$u(x,y,t)|_{x=0} = u(x,y,t)|_{x=p} = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$u(x,y,t)|_{y=0} = u(x,y,t)|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{5}$$

$$u(x,y,t)|_{t=-\alpha} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{6}$$

где $\psi(x,y)$ – заданная достаточно гладкая функция, для которой выполнены условия согласования с граничными данными (4) и (5).

Отметим, что задача Трикоми и её аналоги для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучались многими авторами [1–6] (см. также библиографию в указанных работах) в двумерных областях, гиперболическая часть которых представляет собой треугольник, ограниченный характеристиками уравнения и линией $t = 0$ изменения типа. В работах [7; 8; 9, с. 56–94] изучены аналоги начально-граничных задач для уравнений параболо-гиперболического типа в прямоугольных областях.

Постановка задачи (2)–(6) впервые была приведена в докладе [10] и в нём же сформулирован критерий единственности её решения. Ранее в работе [11] в многомерном пространстве изучались начально-граничные задачи для параболо-гиперболических уравнений, в которых сопряжение производилось по пространственной координате.

В данной работе доказан критерий единственности решения, а само решение в случае, когда D – квадрат, построено в виде ряда по собственным функциям двумерной спектральной задачи оператора Лапласа. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей, в связи с чем получены достаточные условия, обеспечивающие равномерную отделённость от нуля знаменателей, и на основании этого доказана сходимость указанного ряда в классе функций $C^2(\overline{Q}_+ \bigcup \overline{Q}_-)$ при некоторых условиях относительно функции $\psi(x,y)$, а также получены оценки решения, из которых вытекает его устойчивость по отношению к возмущению граничных условий.

1. Критерий единственности решения. Пусть $u(x, y, t)$ – решение задачи (2)–(6). Рассмотрим функции

$$u_{mn}(t) = \iint_D u(x, y, t) v_{mn}(x, y)\, dx\, dy, \quad m, n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где

$$v_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{pq}} \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

– полная ортонормированная система собственных функций оператора Лапласа в прямоугольнике D с нулевыми граничными условиями Дирихле. Отметим также, что система функций (8) образует базис в пространстве $L_2(D)$.

Продифференцируем тождество (7) по t при $t > 0$ один раз, а при $t < 0$ два раза, учитывая определение (1) оператора L, и вычислим затем интегралы по частям с учётом граничных условий (4) и (5), в результате получим уравнения

$$u'_{mn}(t) + \lambda^2_{mn} u_{mn}(t) = 0, \quad t > 0, \tag{9}$$

$$u''_{mn}(t) + \lambda^2_{mn} u_{mn}(t) = 0, \quad t < 0, \tag{10}$$

здесь

$$\lambda^2_{mn} = b + \pi^2 \left[\left(\frac{m}{p}\right)^2 + \left(\frac{n}{q}\right)^2\right]. \tag{11}$$

Далее в равенстве (11) будем считать, что $b = \mu^2 \geqslant 0$ $(\mu \geqslant 0)$, так как если $b < 0$, то, начиная с некоторых номеров $n > n_0$ или $m > m_0$, правая часть (11) принимает только положительные значения, т.е. знак коэффициента b не влияет на положительность при всех достаточно больших n или m правой части в (11), а значит, как будет следовать из дальнейшего, и на справедливость полученных результатов.

Интегрируя уравнения (9) и (10) с учётом условий задачи (2)–(6), найдём, что

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} e^{-\lambda^2_{mn} t}, & t \geqslant 0, \\ \dfrac{\psi_{mn}}{\delta_{mn}(\alpha)} (\cos(\lambda_{mn} t) - \lambda_{mn} \sin(\lambda_{mn} t)), & t \leqslant 0, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\psi_{mn} = \iint_D \psi(x, y) v_{mn}(x, y)\, dx\, dy, \tag{13}$$

при условии, что при всех $m, n \in \mathbb{N}$ выполняетя соотношение

$$\delta_{mn}(\alpha) := \cos(\lambda_{mn}\alpha) + \lambda_{mn} \sin(\lambda_{mn}\alpha) \neq 0. \tag{14}$$

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2)–(6), то оно единственно только тогда, когда при всех натуральных m и n выполнены условия (14).*

Доказательство. Пусть $\psi(x, y) \equiv 0$ и условия (14) выполнены при всех $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда из (13), (12) и (7) следует, что при всех $m, n \in \mathbb{N}$ и любом $t \in [-\alpha, \beta]$ справедливо равенство

$$\iint_D u(x, y, t) v_{mn}(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы функций (8) в пространстве $L_2(D)$ следует, что $u(x, y, t) = 0$ почти всюду в $\overline{D}$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Согласно условию (2) функция $u(x, y, t)$ непрерывна на $\overline{D}$, поэтому $u(x, y, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых $m = m_0$ и $n = n_0$ справедливо равенство $\delta_{m_0n_0}(\alpha) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(6) (где $\psi(x, y) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_{m_0n_0}(x, y, t) = \begin{cases} C_{m_0n_0} e^{-\lambda^2_{m_0n_0} t} v_{m_0n_0}(x, y), & t \geqslant 0, \\ C_{m_0n_0}(\cos(\lambda_{m_0n_0} t) - \lambda_{m_0n_0} \sin(\lambda_{m_0n_0} t)) v_{m_0n_0}(x, y), & t \leqslant 0, \end{cases}$$

где $C_{m_0n_0} \neq 0$ – произвольная постоянная.

Поэтому возникает вопрос о нулях выражения $\delta_{mn}(\alpha)$. Для ответа на него представим это выражение в виде

$$\delta_{mn}(\alpha) = \sqrt{1 + \lambda^2_{mn}} \sin(\lambda_{mn}\alpha + \gamma_{mn}), \tag{15}$$

где $\gamma_{mn} = \arcsin(1/\sqrt{1 + \lambda^2_{mn}})$. Из представления (15) вытекает, что $\delta_{mn}(\alpha) = 0$ только в том случае, когда α имеет вид

$$\alpha = \frac{\pi k}{\lambda_{mn}} - \frac{\gamma_{mn}}{\lambda_{mn}}, \quad \text{где} \quad k, m, n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Равенство (16) с учётом выражения (11) запишем в равносильном виде

$$\left(\frac{k - \gamma_{mn}/\pi}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{m}{p}\right)^2 - \left(\frac{n}{q}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^2. \tag{17}$$

Таким образом, выражение $\delta_{mn}(\alpha)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда число α представляется в виде (16) или, равносильно, диофантово уравнение (17) имеет решение (k, m, n) во множестве натуральных чисел. Придавая в равенстве (16) k, m и n всевозможные натуральные значения, получаем счётное множество нулей выражения $\delta_{mn}(\alpha)$. Теорема доказана.

2. Существование решения задачи. При соблюдении условий (14) решение $u(x, y, t)$ задачи (2)–(6) формально определяется рядом Фурье по системе функций (8), т.е.

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x, y), \tag{18}$$

в котором коэффициенты $u_{mn}(t)$ находятся по формуле (12). Так как выражения $\delta_{mn}(\alpha)$ являются знаменателями коэффициентов ряда (18) и, как показано выше, уравнение $\delta_{mn}(\alpha) = 0$ имеет счётное множество нулей (16), то возникает проблема малых знаменателей более сложной природы, чем в плоском случае [7; 8; 9, с. 61–66]. В связи с этим для обоснования сходимости ряда (18) в классе функций (2) необходимо установить достаточные условия, обеспечивающие равномерную отделённость от нуля выражения $\delta_{mn}(\alpha)$ при всех достаточно больших m и n.

Пусть $n \geqslant m$. Представим выражение $\delta_{mn}(\alpha)$ в виде

$$\delta_{mn}(\widetilde{\alpha}) = \sqrt{1 + \lambda^2_{mn}} \sin(\pi n \widetilde{\alpha} \widetilde{\lambda}_{mn} + \gamma_{mn}), \tag{19}$$

где

$$\widetilde{\alpha} = \frac{\alpha}{q}, \quad \widetilde{\lambda}_{mn} = \sqrt{1 + \left(\frac{qm}{pn}\right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n}\right)^2}.$$

Лемма 1. *Пусть $n \geqslant m$, отношение q/p рационально и $q/p \leqslant 1$. Если $\widetilde{\alpha}$ – положительное рациональное число, т.е. $\widetilde{\alpha} = r/s$, где $r, s \in \mathbb{N}$, $(r, s) = 1$, и выполнено неравенство*

$$(2\mu rpq)^2 + (2p)^2 \pi qrs < 3\pi^2, \tag{20}$$

то существуют положительные постоянные C_0 *и* n_0 $(n_0 \in \mathbb{N})$ *такие, что при всех* $n > n_0$ *и любом фиксированном* m *справедлива оценка*

$$|\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})| \geqslant C_0. \tag{21}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n > m$, где m – фиксированное натуральное число. Представим выражение $\widetilde{\lambda}_{mn}$ в следующем виде:

$$\widetilde{\lambda}_{mn} = 1 + \theta_{mn}, \tag{22}$$

при этом для θ_{mn} для всех достаточно больших n имеет место двусторонняя оценка

$$\frac{3}{8}\bigg[\bigg(\frac{qm}{pn}\bigg)^2 + \bigg(\frac{\mu q}{\pi n}\bigg)^2\bigg] < \theta_{mn} < \frac{1}{2}\bigg[\bigg(\frac{qm}{pn}\bigg)^2 + \bigg(\frac{\mu q}{\pi n}\bigg)^2\bigg], \tag{23}$$

так как существует номер n_1 такой, что при $n > n_1$ справедливо неравенство

$$\bigg(\frac{qm}{pn}\bigg)^2 + \bigg(\frac{\mu q}{\pi n}\bigg)^2 < 1.$$

Подставляя выражение (22) для $\widetilde{\lambda}_{mn}$ в представление (19), будем иметь

$$\delta_{mn}(\widetilde{\alpha}) = \sqrt{1 + \lambda_{mn}^2}\sin(\pi n\widetilde{\alpha} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_{mn} + \gamma_{mn}), \tag{24}$$

здесь $\widetilde{\theta}_{mn} = \pi n\theta_{mn}$.

Пусть $\widetilde{\alpha} = \alpha/q = r/s$, где $r, s \in \mathbb{N}$, $(r, s) = 1$. Разделим nr на s с остатком: $nr = ds + d_0$, где $d, d_0 \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $0 \leqslant d_0 < s$; вообще говоря, d и d_0 зависят от n. Тогда равенство (24) можно записать в виде

$$\delta_{mn}(\widetilde{\alpha}) = (-1)^d\sqrt{1 + \lambda_{mn}^2}\sin\bigg(\frac{\pi d_0}{s} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_{mn} + \gamma_{mn}\bigg). \tag{25}$$

В силу известных неравенств $|x| \leqslant |\arcsin x| \leqslant \pi|x|/2$, если $0 \leqslant |x| \leqslant 1$, для выражения γ_{mn} имеем оценки

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_{mn}^2}} \leqslant \gamma_{mn} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_{mn}^2}}. \tag{26}$$

Если $d_0 = 0$, то вследствие представления (25) получаем

$$|\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})| = \sqrt{1 + \lambda_{mn}^2}|\sin(\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_{mn} + \gamma_{mn})|. \tag{27}$$

Из оценок (23) и (26) следует соответственно, что $\widetilde{\theta}_{mn} \to 0$ и $\gamma_{mn} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существует натуральное число n_2 такое, что при всех $n > n_2$ справедливы неравенства $0 < \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_{mn} + \gamma_{mn} < \pi/2$. Теперь в силу известного неравенства

$$\sin x > 2x/\pi, \quad \text{если} \quad 0 < x < \pi/2, \tag{28}$$

и соотношений (27), (28), (26) и (23) приходим к оценке

$$|\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})| > \frac{2}{\pi}\sqrt{1 + \lambda_{mn}^2}(\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_{mn} + \gamma_{mn}) \geqslant \frac{2}{\pi}\sqrt{1 + \lambda_{mn}^2}\widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_{mn} + \frac{2}{\pi} > \frac{2}{\pi} = C_1 > 0. \tag{29}$$

Пусть $d_0 > 0$. Так как $1 \leqslant d_0 \leqslant s - 1$, $s \geqslant 2$, то $\pi/s \leqslant \pi d_0/s \leqslant \pi - \pi/s$, а значит, как следует из равенства (25), существует число $n_3 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_3$ имеют место оценки

$$|\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})| > \frac{1}{2}\sqrt{1 + \lambda_{mn}^2}\bigg|\sin\frac{\pi}{s}\bigg| > \frac{1}{2}\bigg|\sin\frac{\pi}{s}\bigg|\frac{\pi n}{q}(1 + \widetilde{\theta}_{mn}) = C_2 n \geqslant C_2 > 0. \tag{30}$$

Отметим, что C_1 и C_2 здесь и в дальнейшем C_i – положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, p и q.

Теперь рассмотрим случай, когда $m = n$. В этом случае выражение для $\widetilde{\lambda}_{mn}$ примет вид

$$\widetilde{\lambda}_{nn} = \sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{\mu pq}{\pi n\sqrt{p^2+q^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} A_n, \tag{31}$$

где $A_n = 1 + a_n$ и для остатка a_n при $n > n_4$, где n_4 – некоторое натуральное число, справедлива оценка

$$\frac{3}{8}\left(\frac{\mu pq}{\pi n\sqrt{p^2+q^2}}\right)^2 < a_n < \frac{1}{2}\left(\frac{\mu pq}{\pi n\sqrt{p^2+q^2}}\right)^2. \tag{32}$$

Введём в рассмотрение число

$$\nu = \widetilde{\alpha}\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} = \frac{r}{s}\sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}.$$

Тогда выражение (19) с учётом представления (31) принимает вид

$$\delta_{nn}(\widetilde{\alpha}) = \sqrt{1+\lambda_{nn}^2}\sin(\pi n\widetilde{\alpha}\widetilde{\lambda}_{nn} + \gamma_{nn}) = \sqrt{1+\lambda_{nn}^2}\sin(\pi n\nu + \pi n\nu a_n + \gamma_{nn}). \tag{33}$$

Число ν, если отношение q/p рационально, может быть только рациональным или квадратично иррациональным числом. Если оно является рациональным числом, то, рассуждая аналогично предыдущему, получим оценки вида (29) и (30).

Пусть теперь число ν является квадратично иррациональным. Для него, согласно теореме Лиувилля [12, с. 60], существует положительное число δ, зависящее от ν, такое, что при любых целых n и l $(n > 0)$ справедливо неравенство

$$\left|\nu - \frac{l}{n}\right| > \frac{\delta}{n^2}. \tag{34}$$

Соотношение (33) представим в виде

$$\delta_{nn}(\widetilde{\alpha}) = (-1)^k\sqrt{1+\lambda_{nn}^2}\sin\left[\pi n\left(\nu - \frac{k}{n}\right) + \pi n\nu a_n + \gamma_{nn}\right]. \tag{35}$$

Очевидно, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такое $k \in \mathbb{N}$, чтобы имело место неравенство [9, с. 63]

$$\left|\nu - \frac{k}{n}\right| < \frac{1}{2n}. \tag{36}$$

В силу оценок (26) и (32) существует натуральное число n_5 такое, что

$$0 < \nu\pi n a_n + \gamma_{nn} < \pi/4 \tag{37}$$

при всех $n > n_5$. Тогда на основании оценок (36) и (37) заключаем, что для аргумента синуса в соотношении (35) возможны только два случая: число $\pi n(\nu - k/n) + \pi/4 + \nu\pi n a_n + \gamma_{nn}$ принадлежит либо 1) полуинтервалу $[\pi/2, 3\pi/4)$, либо 2) полуинтервалу $(-\pi/4, \pi/2)$.

В случае 1) имеем

$$\left|\sin\left[\pi n\left(\nu - \frac{k}{n}\right) + \nu\pi n a_n + \gamma_{nn}\right]\right| > \sin\frac{3\pi}{4} = C_3 \geqslant \frac{C_3}{n}. \tag{38}$$

В случае 2), учитывая неравенство (28), получаем

$$\left|\sin\left[\pi n\left(\nu - \frac{k}{n}\right) + \nu\pi n a_n + \gamma_{nn}\right]\right| > \frac{2}{\pi}\left|\pi n\left(\nu - \frac{k}{n}\right) + \nu\pi n a_n + \gamma_{nn}\right|. \tag{39}$$

Теперь на основании неравенств (26), (32) и (34) оценим правую часть неравенства (39):

$$\frac{2}{\pi}\left|\pi n\left(\nu-\frac{k}{n}\right)+\nu\pi n a_n+\gamma_{nn}\right|\geqslant 2n\left|\nu-\frac{k}{n}\right|-2\nu n a_n-\frac{2}{\pi}\gamma_{nn}>\frac{2\delta}{n}-\frac{\nu(\mu pq)^2}{\pi^2(p^2+q^2)n}-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_{nn}^2}}>$$

$$>\frac{2\delta}{n}-\frac{\nu(\mu pq)^2}{\pi^2(p^2+q^2)n}-\frac{pq}{\pi\sqrt{p^2+q^2}}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(2\delta-\frac{\nu(\mu pq)^2}{\pi^2(p^2+q^2)}-\frac{pq}{\pi\sqrt{p^2+q^2}}\right)=\frac{C_4}{n}. \qquad (40)$$

Из оценки (40) следует, что нам достаточно показать положительность постоянной C_4. Для этого из неравенства (34) выразим число δ через ν. Не теряя общности, будем предполагать, что $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$. Так как ν является квадратично иррациональным числом, то оно является корнем многочлена второй степени с целыми коэффициентами

$$(sp)^2x^2-r^2(p^2+q^2)=(ps)^2(x-\nu)(x+\nu). \qquad (41)$$

На основании результатов из монографии [9, с. 65–66], где получена формула для вычисления δ через коэффициенты многочлена (41), имеем

$$\delta=\frac{1}{ps}\frac{1}{r\sqrt{p^2+q^2}+\sqrt{r^2(p^2+q^2)+1}}=\frac{1}{ps}(\sqrt{r^2(p^2+q^2)+1}-r\sqrt{p^2+q^2})=$$

$$=\frac{r}{ps}\sqrt{p^2+q^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{r^2(p^2+q^2)}}-1\right)=\nu\left(\sqrt{1+\frac{1}{r^2(p^2+q^2)}}-1\right), \qquad (42)$$

при этом из оценки (32) следует, что

$$\frac{3}{8}\frac{1}{r^2(p^2+q^2)}<\sqrt{1+\frac{1}{r^2(p^2+q^2)}}-1<\frac{1}{2}\frac{1}{r^2(p^2+q^2)}. \qquad (43)$$

Тогда с учётом соотношений (42) и (43) постоянная C_4 будет больше нуля, если имеет место неравенство

$$\frac{3\nu}{8r^2(p^2+q^2)}-\frac{\nu(\mu pq)^2}{2\pi^2(p^2+q^2)}-\frac{pq}{2\pi\sqrt{p^2+q^2}}>0,$$

или, равносильно,

$$\frac{3}{8r^2(p^2+q^2)}-\frac{(\mu pq)^2}{2\pi^2(p^2+q^2)}-\frac{pq}{2\pi\nu\sqrt{p^2+q^2}}>0.$$

Последнее неравенство равносильно условию (20). Теперь из равенства (33) на основании оценок (38)–(40) вытекает, что

$$|\delta_{nn}(\widetilde{\alpha})|=\sqrt{1+\lambda_{nn}^2}\frac{C_4}{n}>\lambda_{nn}\frac{C_4}{n}=\frac{\pi C_4}{q}\widetilde{\lambda}_{nn}>\frac{\pi C_4}{q}=C_5>0. \qquad (44)$$

Тогда из неравенств (29), (30) и (44) следует справедливость оценки (21) при всех $n>n_0$, где $n_0=\max\{n_i:1\leqslant i\leqslant 5\}$, $C_0=\min\{C_i\ 1\leqslant i\leqslant 5\}$. Лемма доказана.

Замечание 1. Отметим, что если $m\geqslant n$, то для рационального p/q такого, что $p/q\leqslant 1$, аналогично получаем оценку

$$|\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})|\geqslant C_0$$

при всех $m>m_0$ и любом фиксированном n. В этом случае в качестве числа $\widetilde{\alpha}$ берётся отношение α/p.

Лемма 2. *Если выполнены условия леммы 1, то при всех $n>n_0$, $n\geqslant m$ справедливы оценки*

$$|u_{mn}(t)|\leqslant C_6 n|\psi_{mn}|,\quad |u'_{mn}(t)|\leqslant C_7 n^2|\psi_{mn}|,\quad \text{где}\quad -\alpha\leqslant t\leqslant\beta; \qquad (45)$$

$$|u''_{mn}(t)|\leqslant C_8 n^3|\psi_{mn}|,\quad \text{где}\quad -\alpha\leqslant t\leqslant 0. \qquad (46)$$

Справедливость оценок (45), (46) непосредственно следует из формулы (12) на основании оценки (21).

В силу замечания 1 имеют место оценки, аналогичные оценкам (45), (46), где только n_0 надо заменить на m_0 и считать, что $m \geqslant n$.

Для обоснования равномерной сходимости ряда (18) и его производных первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$ и производных второго порядка соответственно на замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ воспользуемся следующим утверждением из теории двойных рядов [13, с. 368–369]. Рассмотрим двойной ряд $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$, где $a_{mn} \geqslant 0$, и повторные ряды $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$. Если один из этих рядов сходится, то остальные сходятся и имеют одну и ту же сумму.

Теперь формально почленным дифференцированием ряда (18) составим ряды

$$u_{xx}(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mnxx}(x,y) = -\left(\frac{\pi}{p}\right)^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} m^2 u_{mn}(t) v_{mn}(x,y),$$

$$u_{yy}(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mnyy}(x,y) = -\left(\frac{\pi}{q}\right)^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} n^2 u_{mn}(t) v_{mn}(x,y),$$

$$u_{tt}(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u''_{mn}(t) v_{mn}(x,y), \quad t \leqslant 0,$$

которые при $p = q$ для точек $(x,y,t) \in \overline{Q}$ мажорируются числовым рядом

$$C_9\Bigg[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n>n_0 \\ n \geqslant m}} n^3 |\psi_{mn}| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m>m_0 \\ m>n}} m^3 |\psi_{mn}|\Bigg].$$

Для обоснования сходимости этой суммы нам достаточно исследовать на сходимость следующие ряды:

$$C_{10} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n>n_0 \\ n \geqslant m}} n^3 |\psi_{mn}| \quad \text{и} \quad C_{11} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m>m_0 \\ m>n}} m^3 |\psi_{mn}|. \tag{47}$$

Лемма 3. *Пусть* $\psi(x,y) \in C^5(\overline{D})$ *и* $\psi(0,y) = \psi_{xx}(0,y) = \psi(p,y) = \psi''_{xx}(p,y) = 0$, $0 \leqslant y \leqslant q$, $\psi(x,0) = \psi_{yy}(x,0) = \psi(x,q) = \psi_{yy}(x,q) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant p$. *Тогда справедливы представления*

$$\psi_{mn} = \frac{p}{m\pi}\left(\frac{q}{n\pi}\right)^4 \psi_{mn}^{(1,4)} = \frac{q}{n\pi}\left(\frac{p}{m\pi}\right)^4 \psi_{mn}^{(4,1)}, \tag{48}$$

где

$$\psi_{mn}^{(1,4)} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \iint\limits_D \psi_{xyyyy} \cos\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q}\, dx\, dy, \quad \psi_{mn}^{(4,1)} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \iint\limits_D \psi_{xxxxy} \sin\frac{m\pi x}{p} \cos\frac{n\pi y}{q}\, dx\, dy,$$

при этом следующий ряд сходится:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(i,j)}|^2 \leqslant \iint\limits_D \left(\frac{\partial^5 \psi(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right)^2 dx\, dy, \tag{49}$$

здесь $i = 1$ *и* $j = 4$ *или* $i = 4$ *и* $j = 1$.

Доказательство. Чтобы получить представления (48), достаточно проинтегрировать по частям пять раз в формуле (13) с учётом условий данной леммы. Сходимость указанного ряда следует из неравенства Бесселя, которое имеет место для кратных рядов Фурье [14, с. 333], т.е. неравенство (49) является неравенством Бесселя для производной пятого порядка функции $\psi(x,y)$. Лемма доказана.

На основании этой леммы ряды (47) соответственно мажорируются сходящимися рядами

$$C_{12}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n>n_0\\ n\geqslant m}}\frac{1}{nm}|\psi_{mn}^{(1,4)}| \quad \text{и} \quad C_{13}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m>m_0\\ m>n}}\frac{1}{nm}|\psi_{mn}^{(4,1)}|.$$

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ из леммы 1 при некоторых $n=l=n_1,n_2,\ldots,n_k$, где $1\leqslant n_1<n_2<\ldots$ $\ldots<n_k\leqslant n_0$, n_i, $i=\overline{1,k}$, и k – заданные натуральные числа, $\delta_{ml}(\widetilde{\alpha})=0$, то для разрешимости задачи (2)–(6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\psi_{ml}=0, \quad l=n_1,n_2,\ldots,n_k. \tag{50}$$

В этом случае решение задачи (2)–(6) задаётся рядом

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{n_1-1}+\ldots+\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k-1}+\sum_{n=n_k+1}^{\infty}\right)u_{mn}(t)v_{mn}(x,y)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l}u_{ml}(t)v_{ml}(x,y), \tag{51}$$

где в последней сумме l принимает значения $n_1,n_2,\ldots,n_k$,

$$u_{ml}(t)=\begin{cases}C_{ml}e^{-\lambda_{ml}^2 t}, & t\geqslant 0,\\ C_{ml}(\cos(\lambda_{ml}t)-\lambda_{ml}\sin(\lambda_{ml}t)), & t\leqslant 0,\end{cases}$$

C_{ml} – произвольные постоянные, при этом если в конечных суммах в правой части (51) верхний предел меньше нижнего, то эти постоянные следует считать нулями.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2. *Пусть постоянные $\widetilde{\alpha}$, μ, p и q удовлетворяют условиям леммы 1 и $p=q$, а функция $\psi(x,y)$ удовлетворяет условиям леммы 3. Тогда если $\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})\neq 0$ при $n=\overline{1,n_0}$ и $m=\overline{1,m_0}$, то существует единственное решение задачи (2)–(6) и оно определяется рядом (18); если $\delta_{mn}(\widetilde{\alpha})=0$ при некоторых $n=n_1,n_2,\ldots,n_k\leqslant n_0$, то задача (2)–(6) разрешима только тогда, когда выполнены условия (50) и решение в этом случае определяется рядом (51).*

3. Устойчивость решения относительно граничных условий. Рассмотрим следующие нормы:

$$\|u(x,y,t)\|_{L_2(D)}=\left(\iint\limits_D u^2(x,y,t)\,dx\,dy\right)^{1/2},$$

$$\|u(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})}=\max_{(x,y,t)\in\overline{Q}}|u(x,y,t)|,$$

$$\|f(x,y)\|_{W_2^l(D)}=\left(\iint\limits_D\sum_{i,j=0}^{l}\left|\frac{\partial^{(i+j)}f(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}\right|\right)^{1/2},$$

$$\|f(x,y)\|_{C^l(\overline{D})}=\sum_{i,j=0}^{l}\max_{(x,y)\in\overline{D}}\left|\frac{\partial^{(i+j)}f(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}\right|, \quad l\geqslant 1.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения (18) задачи (2)–(6) справедливы оценки*

$$\|u(x,y,t)\|_{L_2(D)}\leqslant C_{13}\|\psi(x,y)\|_{W_2^1(D)} \quad \text{и} \quad \|u(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})}\leqslant C_{14}\|\psi(x,y)\|_{C^3(\overline{D})}. \tag{52}$$

Доказательство. Так как система функций (18) ортонормирована в пространстве $L_2(D)$, то из формулы (18) на основании первой оценки в (45) имеем

$$\|u(x,y,t)\|^2_{L_2(D)} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u^2_{mn}(t) = \sum_{n\geqslant m} u^2_{mn}(t) + \sum_{m>n} u^2_{mn}(t) \leqslant$$

$$\leqslant 2C_6^2 \sum_{n\geqslant m} n^2\psi^2_{mn} + 2C_6^2 \sum_{m>n} m^2\psi^2_{mn}. \tag{53}$$

Вследствие представлений

$$\psi_{mn} = \frac{q}{n\pi}\psi^{(0,1)}_{mn} = \frac{p}{m\pi}\psi^{(1,0)}_{mn},$$

где

$$\psi^{(0,1)}_{mn} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \iint\limits_D \varphi_y(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\cos\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy,$$

$$\psi^{(1,0)}_{mn} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \iint\limits_D \varphi_x(x,y)\cos\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy,$$

из неравенства (53) вытекает, что

$$\|u(x,y,t)\|^2_{L_2(D)} \leqslant 2\left(\frac{C_6 q}{\pi}\right)^2 \sum_{n\geqslant m} |\psi^{(0,1)}_{mn}|^2 + 2\left(\frac{C_6 q}{\pi}\right)^2 \sum_{m>n} |\psi^{(1,0)}_{mn}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C^2_{13}\left[\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi^{(0,1)}_{mn}|^2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi^{(1,0)}_{mn}|^2\right] \leqslant C^2_{13}\|\psi(x,y)\|^2_{W^1_2(D)}.$$

Отсюда следует справедливость первой оценки в (52).

Пусть (x,y,t) – произвольная точка из $\overline{Q}$. Тогда в силу формулы (18) на основании первой оценки в (45) имеем

$$|u(x,y,t)| \leqslant \sum_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}(t)| \leqslant C_6 \sum_{n\geqslant m} n|\psi_{mn}| + C_6 \sum_{m>n} m|\psi_{mn}|. \tag{54}$$

Далее воспользуемся равенствами

$$\psi_{mn} = -\frac{q}{n\pi}\left(\frac{p}{m\pi}\right)^2 \psi^{(2,1)}_{mn} = -\frac{p}{m\pi}\left(\frac{q}{n\pi}\right)^2 \psi^{(1,2)}_{mn},$$

здесь

$$\psi^{(2,1)}_{mn} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \iint\limits_D \varphi_{xxy}(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\cos\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy,$$

$$\psi^{(1,2)}_{mn} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \iint\limits_D \varphi_{xyy}(x,y)\cos\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy.$$

Тогда, продолжая оценку (54), имеем

$$|u(x,y,t)| \leqslant C_6\left(\frac{q}{\pi}\right)^2 \frac{p}{\pi} \sum_{n\geqslant m} \frac{1}{mn}|\psi^{(1,2)}_{mn}| + C_6\frac{q}{\pi}\left(\frac{p}{\pi}\right)^2 \sum_{m>n} \frac{1}{mn}|\psi^{(2,1)}_{mn}|.$$

Отсюда в силу неравенства Буняковского получаем

$$|u(x,y,t)| \leqslant \widetilde{C}_6 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn}(|\psi_{mn}^{(1,2)}| + |\psi_{mn}^{(2,1)}|) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_6 \bigg(\sum_{m,n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{mn}\Big)^2 \bigg)^{1/2} \bigg[\bigg(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(1,2)}|^2 \bigg)^{1/2} + \bigg(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(2,1)}|^2 \bigg)^{1/2} \bigg] \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{\widetilde{C}}_6 \|\psi(x,y)\|_{W_2^3(D)} \leqslant C_{14} \|\psi(x,y)\|_{C^3(\overline{D})},$$

где $\widetilde{C}_6$ и $\widetilde{\widetilde{C}}_6$ – положительные постоянные, зависящие только от p, q и α. Из последнего неравенства уже непосредственно следует вторая оценка в (52).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-31-60016.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М., Бжихталов Х.Г.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 261–264.
2. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамаджанов А.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, 1986.
3. *Капустин Н.Ю.* Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью I. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 72–78.
4. *Капустин Н.Ю.* Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. II. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1379–1386.
5. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 117–126.
6. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* Об оценке решения одной задачи для параболо-гиперболического уравнения с помощью рядов Фурье // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 656–662.
7. *Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х.* Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 9. С. 1175–1181.
8. *Сабитов К.Б.* Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273–279.
9. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. М., 2016.
10. *Сабитов К.Б.* Начально-краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольном параллелепипеде // Всерос. науч. семинар “Неклассические уравнения математической физики”, посвящ. 65-летию проф. В.Н. Врагова. Якутск, 2010. С. 79–81.
11. *Ладыженская О.А., Ступялис Л.* Об уравнениях смешанного типа // Вестн. Ленинградск. гос. ун-та. Сер. Математика, механика и астрономия. 1965. Т. 19. № 4. С. 38–46.
12. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. М., 1978.
13. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М., 2003.
14. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Т. 2. М., 1987.

Стерлитамакский филиал
Башкирского государственного университета,
Стерлитамакский филиал Института стратегических
исследований Республики Башкортостан

Поступила в редакцию 31.12.2019 г.
После доработки 07.04.2021 г.
Принята к публикации 08.06.2021 г.